Math. u.
91 5c. -1

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

S
<36606386230012
<36606386230012
Bayer. Staatsbibliothek

24

R


JOSEPH LOUIS LAGRANGE.
Lagrange

J. L. Lagrange's

mathematische

Werke.

Deutsch herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Erster Band,

die Theorie der analytischen Functionen enthaltend.

Berlin, bei G. Reimer.

1823.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Theorie
der
analytischen Functionen.

Enthaltend:

die Hauptsätze der Differential-Rechnung, ohne die Vorstellung vom Unendlich-Kleinen, von verschwindenden Grössen, von Grenzen und Fluxionen, ganz nach Art der algebraischen Analysis endlicher Grössen vorgetragen

von

J. L. Lagrange,

Mitgliede des Instituts der Künste und Wissenschaften, des Längen-Büreaux und des Senat-Conservateurs, Grosskreuze der Ehren-Legion und Reichsgrafen.

Neue, vom Verfasser verbesserte und vermehrte Auflage.

Nebst

Nachrichten von Lagrange's Leben und einem Verzeichnisse seiner Werke, deutsch herausgegeben und mit Anmerkungen, Erläuterungen und Zusätzen begleitet

von

Dr. A. L. Crelle,

Königl. Preuss. Geheimen Ober-Baurathe.

Mit zwei Kupfertafeln.

Berlin, bei G. Reimer.

1823.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Vorrede des Uebersetzers.

Unter den Mathematikern, die ihre Wissenschaft weiter ausbildeten, nimmt Lagrange eine vorzügliche Stelle ein. Er steht, im Verdienste um die Mathematik, in gleichem Range mit Euclides, Archimedes, Leibnitz, Newton und Euler. Ihm verdankt die Mathematik die Erfindung der Variations-Rechnung; eine rein analytische, auf den Variations-Calcul gegründete Darstellung der gesammten Mechanik, mit wichtigen Anwendungen auf die Astronomie; Entdeckungen in der Theorie der algebraischen Gleichungen, denen,

nach

nach Ihm, wenig Neues hinzugefügt worden; die Begründung und Feststellung der Principien der sogenannten Infinitesimal-Rechnung und unzählige andere einzelne Entdeckungen und Vervollkommnungen in allen Theilen der Grössenlehre. Lagrange war, in jedem Sinne, des grossen Eulers würdiger Nachfolger: in Bestrebungen, im Verdienste, und sogar in der Stelle, welche er, zwanzig Jahre lang, bei der Academie der Wissenschaften zu Berlin bekleidete. Beide Männer gingen denselben Weg, nemlich den analytischen, der in der Mathematik unstreitig der wahre Weg der Entdeckung ist. Sie Beide sind es vorzüglich, die der Mathematik ihre neueste Gestalt und Ausdehnung gaben. Eulers unerschöpflicher, einen bewundernswürdigen Fleiss belohnender Reichthum, und, mit diesem ausgerüstet, Lagrange's schaf-

fende

fende Kraft hatten Erfolge, welche Epoche in der Wissenschaft machten und dieselbe um einen ganzen Zeitraum vor, ja zum Theil, wie es z. B. mit der analytischen Mechanik scheint, über die gegenwärtige Zeit hinaus rückten. Lagrange's Schriften enthalten für den Kenner einen, noch auf späte Zeiten hin, nutzbaren Schatz von mathematischen Sätzen und Gedanken, und zum Studio sind wenige andere Schriften, in jedem Sinne, und besonders ihrer Eigenthümlichkeit wegen, so sehr zu empfehlen, wie die seinigen. In hohem Grade nemlich besass dieser Schriftsteller die seltene Gabe, einen Gegenstand aus dem umfassendsten und allgemeinsten Standpunkte zu betrachten, ihn zu überschauen und bis in seine Tiefen zu durchdringen. Lagrange's Klarheit der Ideen und der Darstellung ist fast ohne Beispiel; das

Ver-

Verwickeltes̄te ist ihm, und wird durch ihn so leicht und einfach, wie das Elementare, und an Strenge und Scharfsinn möchten nur die Alten ihm zu vergleichen sein. Alle seine Schriften sind Denen, für die er sie bestimmte, in hohem Grade deutlich, welches der stärkste Beweis ist, dass er sich selbst klar war. Denn Worte sind die Bilder der Gedanken, und Klarheit des Vortrages und der Begriffe können nur beisammen sein. Lagrange war einer der hellsten und ruhigsten, und, wenn der Ausdruck erlaubt ist, verständigsten Denker, zugleich aber einer der anspruchlosesten, und nie etwas anders als seinen Gegenstand im Auge behaltenden Lehrer, welche je die Mathematik besass. Was aber kann, besonders in einer kränkelnden Zeit, wie die jetzige, wo nur zu häufige Spuren, theils der Ueberspannung,

theils

theils der Betäubung, mit allen Verirrungen in ihrem Gefolge, nicht die Fortschritte der Wissenschaften, sondern ihren Verfall anzukündigen scheinen, diensamer und mehr Noth sein, als Werke, in welchen ein reiner, gesunder und kräftiger Sinn zu finden ist, und die nichts anders wollen, als die treue Förderung der schlichten Wahrheit und ihres Gegenstandes.

Lagrange's mathematische Schriften besitzen diese Eigenschaften in vorzüglichem Grade; und, während des grossen Eulers Schriften einen unübersehbaren Schatz von Resultaten des richtigen und natürlichen mathematischen Denkens darbieten, sind Lagrange's Werke, mit ähnlichen Resultaten ausgestattet, durch Beispiel, die schönste Lehre des richtigen mathematischen Denkens selbst, Wer mit Lagrange's Art und auf seinem Wege wan-

wandelt, wird nicht zurückgehen! Mit einem Worte: Lagrange's Werke gehören zu dem Vorzüglichsten, was je in der Mathematik geleistet wurde.

Dennoch sind diese Werke in Deutschland, im Verhältnisse ihres Werths, viel zu wenig bekannt. Fast nur wer die Mathematik ex professo treibt, weiss um sie und schätzt sie. Zum Studiren werden sie wenig benutzt und den Anfängern sind sie fast unbekannt, während doch grade ihr Nutzen für Lernende, aus den obigen Gründen, nicht geringer sein möchte, als ihr Nutzen für Kenner. Die Hindernisse allgemeiner Bekanntschaft mit diesen schätzbaren Werken liegen in mehreren Umständen. Erstlich ist unstreitig die fremde Sprache, in welcher Lagrange schrieb, ein Hinderniss allgemeiner Bekanntscaft mit seinen Schriften; denn die Fähigkeit, eine

Wis-

Wissenschaft in Büchern zu studiren die nicht in der Muttersprache verfasst sind, ist nicht allgemein; auch wird dieses Hinderniss noch durch die Schwierigkeit, in Deutschland, französische Bücher schnell und wohlfeil zu erhalten, vergrössert. Zweitens liegt ein Hinderniss darin, dass Lagrange nie eigentliche Lehrbücher schrieb, sondern fast nur zerstreute Abhandlungen und Bemerkungen über einzelne Gegenstände. Das einzige Werk, welches Lehrbuch zu nennen wäre, nemlich die analytische Mechanik, beschäftigt sich nicht mit den Elementen der Wissenschaft, wenigstens nicht in dem Sinne, den man gewöhnlich dem Worte „Elemente" beizulegen pflegt, sondern mit der allgemeinsten Entwickelung der Mechanik, bis an ihre äussersten Grenzen, und ist Denen, die die vorhergehenden Theile der Mathematik

tik nicht in demselben Geiste studirten, kaum zugänglich. Andere, mehr vereinzelte Abhandlungen über abgesonderte, aber gleichwohl fast alle Theile der Mathematik berührende Gegenstände, sind in den verschiedenartigsten periodischen Schriften, in den Memoiren der Academieen von Turin, Berlin und Paris, in den Journalen der neuen französischen Schulen u. s. w. zerstreut. Hieraus scheint zu folgen, dass Lagrange's Schriften zum eigentlichen Studio weniger geeignet sind, was indessen nicht der Fall ist. Denn immerhin mag der Lernende das Materielle der Wissenschaft, wenn er es auch nicht bei Lagrange beisammen findet, aus andern guten Lehrbüchern schöpfen: resumiren, mathematisch Denken und die Kunst, selbst zu schaffen, lehrt Niemand besser, als Lagrange. Ein drittes Hinderniss

liegt

liegt in einem Umstande, der zum Theil aus dem vorigen folgt. Da nemlich Lagrange nie die Absicht zu haben schien, die ganze Wissenschaft mit seinen Lesern durchzugehen, so setzen seine Werke überall Vorkenntnisse voraus, die man darin nur zerstreut oder auch gar nicht findet, übergehen Zwischensätze und Zwischenrechnungen und sind so verfasst, als wären sie nur mehr für Kenner geschrieben. Dieses erschwert, in Ermangelung einer Nachhülfe, bei aller ihrer Klarheit, wenigstens den Eingang in dieselben und in ihren Geist, und hindert also ebenfalls die allgemeine Benutzung.

Da es nun möglich zu sein scheint, diese Hindernisse zu heben, indem dem ersten und kleinsten eine Uebersetzung, dem zweiten eine Sammlung, und zu ihrem Zwecke dienende möglich-

lichste Zusammenstellung der mehr zerstreuten Abhandlungen, dem dritten eine Ergänzung der Zwischensätze und Zwischenrechnungen, gleichsam ein Commentar, abhelfen und diesen Schatz mathematischer Wahrheiten allgemeiner zugänglich machen dürfte, so hat der Unterzeichnete die Ausführung eines solchen Unternehmens für nützlich gehalten. Schon das blosse Sammeln so bedeutender und so sehr zerstreuter Werke scheint nicht unwichtig, weil das Beste, der Vereinzelung wegen, weniger nutzbar ist und auch selbst eher vergessen wird, oder wohl gar, in späterer Zeit, eher verloren geht. Ein nicht minder wichtiges Unternehmen würde daher auch eine gleiche Sammlung der Eulerschen Schriften sein, wovon aber die Ausführbarkeit, wegen der ungeheuren Masse dieser Schriften, und weil das

In-

Interesse an denselben, da sie schon in eine etwas frühere Epoche fallen, so wie die Wissenchaft sich weiter entwickelt, nothwendig abnehmen muss, schwer abzusehen ist. Lagrange's Werke fallen dagegen in eine spätere Bildungs-Periode, ihr Umfang ist nicht sehr gross und ihr Nutzen liegt näher; daher schien die Sammlung dieser Schriften, auch selbst blos auf den Zweck des Sammelns gesehen, einem gleichen Unternehmen mit den Eulerschen Werken wenigstens voranzugehen. Und da nun der unmittelbare Nutzen der Lagrangischen Arbeiten für das Studium der Mathematik, nach den obigen Ansichten, noch auf eine eigenthümliche Weise so bedeutend ist, so schien vorzugsweise die Sammlung und Bearbeitung dieser Werke, auf die oben angezeigte Art, rathsamer und ein Unternehmen

zu

zu sein, welches beitragen kann, die so wichtige Verallgemeinerung des Studiums der Mathematik zu befördern.

Von diesen Ansichten ausgehend, hat der Unterzeichnete den Vorsatz gefasst, die Lagrangischen mathematischen Werke zu sammeln, zu commentiren und nach und nach in deutscher Sprache herauszugeben.

Er hat mit der Theorie der Functionen und den Vorlesungen über die Functionen-Rechnung, wegen des eigenthümlichen Interesse ihres Inhalts, den Anfang gemacht.

In diesen beiden Werken, welche ein in sich abgeschlossenes Ganze bilden, und welche man in den hier erscheinenden beiden ersten Bänden der Sammlung findet, hatte Lagrange vorzüglich den Zweck, die Infinitesimal-Rechnung von den dunkeln und unsichern Vorstellungen unendlich-kleiner

ner

ner Grössen zu befreien, dieselbe auf natürliche und einfache Begriffe fester zu gründen und sie Jedem eben so begreiflich zu machen, wie es die Algebra und die elementare Geometrie ist. Die Werke selbst liefern den mathematischen Beweis, wie vollkommen ihm dieses Vorhaben gelang. Da aber Lagrange, zu diesem seinem Zwecke, die Analysis, von Anfang bis zu Ende, durchgehen musste, so enthalten diese beiden Bände zugleich einen umfassenden und eindringenden, gleichsam critischen Vortrag aller der wichtigsten Lehren der gesammten sogenannten Differential-, Integral- und Variations-Rechnung und der Anwendung derselben auf die Geometrie und Mechanik. Es fehlt ausserdem darin nicht an neuen, dem Verfasser eigenthümlichen Entdeckungen, und so sind dann diese Abhandlungen, schon ihres ma-

B teriel-

teriellen Inhalts wegen, abgesehen von ihrem eigenthümlichen Zwecke, von hohem Werthe. Sie sind also schon in dieser Hinsicht, mehr aber noch eben ihres eigenthümlichen Zwecks, und vor allem, wegen des vortrefflichen Vortrages und als Muster klarer mathematischen Abhandlungen, allen Denen zu empfehlen, die sich die Mathematik zu eigen machen, oder dieselbe auch nur als Verstandes-Bildungs-Wissenschaft studiren wollen. Die Lagrangische Theorie der Functionen und die Vorlesungen darüber tragen die Ansichten vor, welchen die meisten neuen Lehrbücher gefolgt sind; daher werden Diejenigen, welche jene Lehrbücher studirten, hier die Originale und die Quellen derselben finden. Aber auch Denjenigen, welche den Cursus dieses Theils der Mathematik noch nicht machten, wird der Lagrangische commentirte

Vor-

Vortrag sehr wohl zugänglich sein, und sie werden durch das Studium desselben einen trefflichen Grund legen, der ihnen beim weitern Lesen ausführlicher Lehrbegriffe nicht anders als von grösstem Nutzen sein kann.

Den obigen Ansichten des Zwecks seiner Arbeiten zu Folge, hat der Unterzeichnete den Text mit mehreren Zusätzen, Erläuterungen und Bemerkungen begleitet, die sich in drei verschiedene Classen theilen lassen. Die der ersten Art, welche man am häufigsten findet, sind blosse Einschaltungen von Zwischen- oder Vordersätzen und Zwischen-Rechnungen, desgleichen Erläuterungen durch Figuren, die Lagrange überging, weil er nicht für den gewöhnlichen Unterricht schrieb, die aber dem Studirenden das Lesen des Werks erleichtern werden. Die der zweiten Art sind Bemerkungen und Erläu-

läuterungs-Versuche eigenthümlicher Ansichten des Buchs, mehr im Allgemeinen. Auch diese Einschaltungen werden hoffentlich zur Erleichterung des Studiums dienen. Die der dritten Art sind Bemerkungen über Gegenstände, bei welchen der Herausgeber seine Ueberzeugung mit dem Vortrage des Verfassers nicht ganz vereinigen konnte. Die Zusätze dieser letzten Art insbesondere wünscht der Herausgeber von Kennern berücksichtigt; die Zusätze der beiden ersten Arten sind ausschliesslich für Diejenigen bestimmt, welche das Buch studiren wollen. Der Versicherung, dass die Zusätze der dritten Art nicht etwa aus der Absicht, seine Meinungen und Arbeiten den Lagrangischen gegenüber zu stellen, oder gar, diese tadeln zu wollen, entstanden, glaubt der Uebersetzer sich überheben zu können; denn eines

Theils

Theils hat er seine hohe Achtung für Lagrange, hier oben, deutlich genug ausgesprochen und er rechnet es sich ausserdem zur Ehre, Lagrange, in so fern er vorzüglich in dessen Schriften seine eigenen Studien machte, seinen Lehrer zu nennen; andern Theils aber ist der Herausgeber wirklich zu sehr überzeugt, dass der Werth, selbst des Ruhms, um so mehr also des Zolles der Eitelkeit, gegen den Werth der Wahrheit in Nichts zerfällt, als dass es ihm nur einen Augenblick eingekommen sein könnte, Etwas, das ohne einen lautern Zweck Nichts sein würde, auf Kosten der Wahrheit gelten machen zu wollen. Da inzwischen aber auch gegenseits die Wahrheit, und ihre liebste Wissenschaft, die Mathematik, keine Autorität kennt, so glaubte der Uebersetzer befugt und verpflichtet zu sein, seine Meinung, wo sie von der, Andere

rer

rer abweicht, unverholen, mit Gründen unterstützt, zu sagen. Er ist überzeugt, Lagrange selbst, wenn er lebte und dieses Buch ihm zu Gesicht käme, würde diese Ansicht nicht tadeln. Die häufigen Hinweisungen des Uebersetzers in den Anmerkungen auf seine eigenen kleinen Arbeiten könnten ebenfalls eine Neben-Absicht zu haben scheinen. Allein, da, wie gesagt, der Uebersetzer mit vorzüglicher Vorliebe Lagrange's Werke studirte, so wird man es natürlich finden, dass seine eigenen Arbeiten vorzüglich Gegenstände behandelten, die sein Meister bearbeitete. Diese Gegenstände trafen also auch mit den gegenwärtigen zusammen und folglich konnte der Uebersetzer, wo er seine Meinung zu sagen hatte, wenn er nicht wiederholen wollte, was er anderwärts schon bekannt gemacht hatte, nicht anders, als darauf hinweisen.

Wegen

Wegen der Menge der Zusätze würde es unbequem gewesen sein, ihnen, auf die gewöhnliche Art, ihre Stelle unter den Text, als Anmerkungen, anzuweisen. Sie sind daher in den Text selbst eingeschaltet und [*durch Cursiv-Schrift und Einschliessung in eckige Klammern,*] wie vorstehende Worte, vom Texte abgesondert worden. Sie sind aber überall, selbst in der Wortfügung, so gestellt worden, dass man sie beim Lesen, wenn man will, ohne dass der Zusammenhang des Textes unterbrochen wird, auch ganz weglassen kann. Lieset man das Buch so, als wenn Alles, was mit liegender Schrift gedruckt und in eckige Klammern eingeschlossen ist, gar nicht da wäre, so hat man die getreue Uebersetzung des Originals.

Es scheint, dass es möglich gewesen wäre, den Text in dieser Uebersetzung etwas abzukürzen, weil zum Theil Gegenstän-

genstän-

genstände, welche in der Theorie der Functionen abgehandelt werden, in den Vorlesungen über die Functionen-Rechnung wieder vorkommen. Allein eines Theils sind dieser Gegenstände nur wenige, andern Theils ist selbst die zwiefache Behandlung so originell und so voller eigenthümlicher Ideen, dass es nicht angemessen schien, um einige wenige Bogen zu gewinnen, vielleicht Etwas von bedeutendem Werthe zu verlieren und das Werk zu verstümmeln. Dieserhalb ist von dem Originale nicht das mindeste Wesentliche weggelassen worden.

Eine nicht geringe Schwierigkeit dieses Unternehmens, die der Uebersetzer bei diesen ersten beiden Bänden antraf, darf nicht unberührt bleiben.

Lagrange bedient sich nemlich, sowohl in der Theorie der Functionen, als in den Vorlesungen über dieselbe, eigenthümlicher, selbst geschaffener

Bezeich-

Bezeichnungen und Benennungen, die aber, Theils unzulänglich, Theils undeutlich sind, wovon der beste Beweis darin liegt, dass der Verfasser selbst, diese Bezeichnungen und Benennungen in der Folge wieder verliess. Nun aber sind Bezeichnungen und Benennungen in der Mathematik von grösserer Wichtigkeit, als es beim ersten Anblicke scheint. Sie sind die Sprache dieser Wissenschaft und eben so bedeutend für sie, wie die Rede für den Ausdruck und selbst für die Entwickelung der Gedanken. Einen merkwürdigen Beweis hiervon geben die Fluxions - Zeichen der Newtonschen Schule. Es ist bekannt, dass diese Schule in der Analysis zurückbleibt, und der Grund davon kann fast Nichts-Anderem, als der Unvollkommenheit der Zeichen zugeschrieben werden. Ferner ist es auch gewiss, dass grade die neuen

Lagran-

Lagrangischen Zeichen Vieles beigetragen haben, die Bekanntschaft mit den vortrefflichen Schriften, die sich ihrer bedienen, zu erschweren und ein Vorurtheil gegen ihren Inhalt zu erregen, oder wenigstens zu hindern, dass ihnen ganz die hohe Werthschätzung allgemein zu Theil werde, die sie verdienen. Aus allen diesen Gründen durften die neuen Lagrangischen Zeichen durchaus nicht beibehalten werden. Daraus entstand nun aber eine Verlegenheit um andere Zeichen; denn die alten Leibnitzischen Zeichen sind grade die Bilder und Bewahrer der undeutlichen und zum Theil mangelhaften Vorstellungen, deren Berichtigung den Hauptzweck des Lagrangischen Werks ausmacht. Der Uebersetzer hat zwar selbst, in seinen mathematischen Versuchen, Zeichen und Benennungen vorgeschlagen, deren Angemessenheit

und

und Consequenz sich mit Gründen darthun lässt, und er ist auch von der Consequenz derselben so fest überzeugt, dass er sich, bei seinen eigenen Arbeiten, nie anderer als ähnlicher Zeichen und Benennungen bedienen wird. Seine eigenen Ideen aber an die Stelle Lagrangischer zu setzen: dazu konnte er sich durchaus nicht entschliessen. Nach langer Berathung blieb ihm nichts anders übrig, als, nach Lagrange's Beispiel in der analytischen Mechanik, dennoch die alten Leibnitzischen Zeichen zu wählen, jedoch mit denjenigen Modificationen, welche wenigstens die unrichtigen, den Zeichen anklebenden Begriffe entfernen. Er ist sehr besorgt gewesen, die wahren Bedeutungen der Zeichen und Benennungen noch durch Zusätze zu erläutern, wo etwa das Original, wegen Lagrange's neuer Zeichen, die besondere Erläuterung ersparen

sparen konnte und glaubt nun, auf diese Weise, den Nachtheil, welchen diese unvermeidliche Abänderung hätte nach sich ziehen können, vermieden und gehoben zu haben. In Rücksicht dessen, was sich auf die Erklärung der Lagrangischen Zeichen bezieht, hat der Text natürlich einige Abänderungen und Auslassungen erfahren müssen, jedoch ist Bedacht genommen worden, dass dadurch in dem wesentlichen Inhalte durchaus keine Aenderung entstehe. Auch hat der Uebersetzer zuweilen andere Buchstaben-Bezeichnungen gewählt, welche deutlicher und bequemer schienen, z. B. statt der undeutlichen Buchstaben *i* und *o*, die Buchstaben *k* und *λ*, und dergleichen mehr, was aber im Wesentlichen nichts ändert. Ferner hat der Uebersetzer, im zweiten Bande, Paragraphen-Abtheilungen und Ueberschriften des einzel-

nen

nen Inhalts beigefügt, wodurch er die Deutlichkeit und Uebersichtlichkeit befördert zu haben glaubt.

Noch ist jedem Bande ein Verzeichniss derjenigen Druckfehler des Originals, die bei der Uebersetzung bemerkt wurden und daselbst nicht angezeigt sind, angehängt worden. Diese Verzeichnisse werden den Besitzern des Originals nützlich sein.

Einer Sammlung der Werke eines so berühmten und verdienten Schriftstellers, schien es angemessen, Nachrichten von seinem Leben und Wirken, so wie ein Verzeichniss seiner Werke vorauszuschicken. Der Uebersetzer hat zu dem ersten die von Delambre der Academie vorgelesene Biographie Lagrange's, nebst einigen Anhängen und dem was er selbst, hier, im ehemaligen Aufenthalts-Orte Lagrange's, hat sammeln können, gewählt

wählt und das Verzeichniss der Werke Lagrange's ist so mitgetheilt worden, wie es Lacroix der analytischen Mechanik angehängt hat. Das Brustbild des grossen Mannes, nach einer Medaille, die in Paris verfertigt ist und die nach dem Zeugniss Aller, welche Lagrange sahen, den Uebersetzer mit eingeschlossen, das Verdienst der äussersten Aehnlichkeit hat, ist in Kupfer gestochen worden und ziert, nebst einem Fac-simile des Namenszuges Lagrange's, den Titel des ersten Bandes.

Schliesslich kann der Herausgeber nicht unterlassen, der rühmlichen Bereitwilligkeit zu erwähnen, mit welcher die Verlags-Handlung sein Unternehmen beförderte. Man wird die Güte des Drucks und das Aeussere der vorliegenden beiden Bände nicht übersehen und ohne Zweifel den Eifer

des

des Herrn Verlegers, in Förderung nützlicher Werke in den exacten Wissenschaften, mit Vergnügen anerkennen.

Der Herausgeber wünscht nun diesen ersten Bänden nur Etwas von derjenigen Theilnahme, welche die Lagrangischen Arbeiten verdienen. Alsdann wird es seine angenehmste Pflicht sein, seine Kräfte und die wenigen, meist nächtlichen Stunden, welche seine Geschäfte im öffentlichen Dienst ihm für die Wissenschaft übrig lassen, der Fortsetzung dieses Unternehmens zu widmen.

Berlin im November 1822.

A. L. Crelle.

Nachricht von Lagrange's Leben und Schriften.

Vorgelesen von Delambre am 3. Januar 1814 in der Academie der Wissenschaften zu Paris.

(Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'institut de France, année 1812.)

Joseph Louis Lagrange, einer der Urheber der Academie von Turin, zwanzig Jahre Director der physisch-mathematischen Classe der Academie der Wissenschaften zu Berlin, Ehrenmitglied der Academie der Wissenschaften zu Paris, Mitglied des Instituts von Frankreich und des Längen-Büreaux, Senator und Graf des Reichs, Gross-Officier der Ehrenlegion und Grosskreuz des Kaiserlichen Ordens der Reunion, wurde zu Turin am 25. Januar 1736 geboren. Seine Eltern waren Joseph Louis Lagrange, Kriegszahlmeister und Maria Therese Gros, einzige Tochter eines reichen Arztes zu Cambiano.

Sein Urgrossvater, französischer Cavallerie-Capitain, war in die Dienste Emanuel des zweiten, Königs von Sardinien, gegangen, der ihn,

durch Verheirathung mit einer Dame Conti, aus einer berühmten römischen Familie, an Turin fesselte. Er war ein geborner Pariser und verwandt mit Marie Louise, *Dame d'atours* der Mutter Ludwigs des Vierzehnten und späterhin Gemalin von *François Gaston de Bethune* *).

Diese Familien-Umstände haben zwar keinen Werth bei einem Gelehrten, dessen Ruhm des Stammbaumes nicht bedarf; allein sie sind für Frankreich nicht gleichgültig, welches sich bemühte ihn wieder zu erhalten und ihn in seine alten Rechte wieder einzusetzen. Sein und seiner Mutter Namen beweisen seine französische Abkunft; alle seine Werke sind französisch geschrieben, seine Geburtsstadt war späterhin an Frankreich gekommen. Frankreich also hat unzweifelhaft das Recht, sich eins der grössten Genies zu rühmen, die jemals die Wissenschaften verherrlichten.

Lagranges Vater war reich; er hatte sich vortheilhaft verheirathet, verlor aber sein Vermögen durch gewagte Unternehmungen. Beklagen wir deshalb Lagrange nicht! Er selbst betrachtete die Geld-Verluste seines Vaters als eine der ersten Ursachen alles Guten, was ihm

*) Lobrede auf Lagrange von Cossali. Padua 1813.

hernach widerfuhr. Er äusserte selbst, er glaube, wäre er begüterter gewesen, er würde sich vielleicht der Mathematik nicht gewidmet haben, und was hätte er wohl auf irgend einer andern Laufbahn erreichen können, das mit einem ruhigen betrachtenden Leben, mit jener glänzenden Reihe von unbestrittenen Erfolgen in einer anerkannt schwierigen Wissenschaft, und mit jener hohen Achtung zu vergleichen gewesen wäre, die er bis zu seinem letzten Augenblicke, in immer steigendem Maasse, genoss!

Die Neigung für die Mathematik war nicht diejenige, die sich bei ihm zuerst zeigte. Er interessirte sich eifrig für Cicero und Virgil, ehe er Archimed und Newton lesen konnte. Bald darauf ging er, mit nicht geringerm Eifer, zu der Geometrie der Alten über, die er Anfangs der neuern Analysis vorzog. Eine Abhandlung des berühmten Halley, aus jener Zeit, worin dieser die Vorzüge der Analysis zu beweisen sucht, hatte die Ehre, Lagrange zu bekehren und ihm seine wahre Bestimmung zu offenbaren.

Er trieb nun dieses neue Studium, und zwar eben so glücklich wie bis dahin die Synthesis, in welcher er schon so ausgezeichnete Fortschritte gemacht hatte, dass er im sechszehnten Jahre

seines Alters *) die Stelle eines Professors der Mathematik an der Königl. Artillerie Schule bekleiden konnte. Die ungewöhnliche Jugend eines Lehrers gereicht ihm zum Vortheil wenn er ausserordentliche Talente hat, und seine Schüler nicht zu jung sind. Lagranges Schüler waren alle älter als er, aber desto aufmerksamer auf seinen Unterricht. Er zeichnete einige von ihnen aus, die seine Freunde wurden.

Aus dieser Verbindung entstand die Turiner Academie, die im Jahre 1759 unter dem Titel: *Actes de la societé privée*, den ersten Band ihrer Schriften herausgab. Man findet darin den jungen Lagrange die physischen Untersuchungen des Arztes Cigna und die Arbeiten des Marquis de Saluces leiten. Er lieferte Foncenex den analytischen Theil seiner Abhandlungen, ihm die weitern Entwickelungen der Sätze auf welche sich seine Formeln bezogen überlassend. Man bemerkt schon in diesen Memoiren den rein analytischen Gang, der nachher der ausschliessliche Character der grossen Lagrangeschen Schöpfungen wurde. Er hatte eine neue Theorie des Hebels gefunden. Sie macht den dritten Theil einer Abhandlung aus, die viel Glück hatte. Foncenex wurde zur

*) Nach andern im funfzehnten oder neunzehnten.

Belohnung an die Spitze der Marine gestellt, die damals der König von Sardinien errichtete. Die beiden ersten Theile scheinen den nemlichen Styl zu haben und aus derselben Feder geflossen; sind sie etwa auch von Lagrange? Er hat sie nie ausdrücklich reclamirt, aber der wahre Verfasser lässt sich noch deutlicher aus dem Umstande schliessen, dass Foncenex bald aus den Sammlungen der neuen Academie verschwindet und dass Montucla, der nicht wusste was uns Lagrange in seinen letzten Augenblicken entdeckt hat, sich wundert, dass Foncenex, nachdem er sich so vortheilhaft angekündigt, Untersuchungen eingestellt habe, die ihm hätten einen Namen machen können.

Lagrange, während er seinem Freunde einzelne Arbeiten überliess, machte um eben die Zeit unter seinem eigenen Namen Theorien bekannt, die er weiter auszuführen und zu entwickeln versprach. Nachdem er neue Methoden für die *Maxima* und *Minima* aller Art gegeben und die Unzulänglichkeit der bekannten Formeln gezeigt hatte, kündigte er an, dass er diesen Gegenstand, der ihm interessant scheine, in einem Werke an welchem er arbeite, weiter entwickeln wolle, wo sich zeigen werde, dass sich auf eben diese Sätze die ganze Mechanik, fester sowohl als flüssiger Körper, bauen lasse.

So hatte er also schon im drei und zwanzigsten Jahre den Grund zu jenem grossen Werke gelegt, das späterhin die Bewunderung der Gelehrten erregte.

In dem nemlichen Bande unterwirft er die Theorie der rücklaufenden Reihen und der Wahrscheinlichkeit, die bis dahin nur auf indirectem Wege behandelt worden waren, der Differential-Rechnung und begründet sie auf diese Weise natürlicher und fester.

Newton hatte versucht, die Bewegung flüssiger Körper der Rechnung zu unterwerfen, und Untersuchungen über die Fortpflanzung des Schalles angestellt; seine Grundsätze waren unzureichend und selbst irrig und seine Voraussetzungen nicht überall mit einander vereinbar. Lagrange beweiset sie; er gründet seine neue Untersuchungen auf bekannte dynamische Gesetze; indem er nur die in grader Linie liegenden Lufttheilchen betrachtet, bringt er die Aufgabe auf diejenige von schwingenden Saiten, über welche noch die grössten Mathematiker verschiedener Meinung gewesen waren; er zeigt, dass ihre Rechnungen zur Beantwortung der Frage nicht hinreichen; er versucht eine neue Auflösung, nach einer eben so neuen als interessanten Methode, durch welche sich eine unendliche Menge von Gleichungen zugleich auflösen lassen,

und die sich sogar auf die unstetigen Functionen ausdehnen lässt. Er begründet die Daniel-Bernoullische Theorie der Vermischung einfacher und gleichförmiger Schwingungen fester. Er zeigt die Grenzen, innerhalb welcher diese Theorie zureicht, und über welche hinaus sie fehlt; darauf kommt er zu der von Euler angegebenen Construction, die völlig genau ist, obgleich ihr Erfinder darauf durch nicht ganz strenge Rechnungen kam. Er beantwortet die d'Alembertschen Einwürfe. Er beweiset, dass, welche Gestalt auch die Saite hat, die Dauer der Schwingungen immer dieselbe ist; ein Erfahrungssatz, dessen Beweis d'Alembert für sehr schwer oder gar unmöglich gehalten hatte. Er geht zur Fortpflanzung des Schalles über, handelt von dem einfachen und zusammengesetzten Echo, von der Vermischung des Schalles, von der Möglichkeit, dass sich mehrere Klänge in einem und demselben Raum verbreiten, ohne sich zu stören. Er beweiset strenge die Entstehung der harmonischen Töne. Er schliesst mit der Bemerkung, dass er das Vorurtheil habe bekämpfen wollen, als könne die Mathematik nicht zu Aufklärungen in der Physik dienen.

Wir haben einen ausführlichen Auszug jener Abhandlung gegeben, weil sie die erste ist, an welcher sich Lagrange's Talente zeigten. Die

Analysis in dieser Abhandlung gehört zu den allerschwierigsten, aber der Gegenstand hat zugleich etwas Sinnliches. Es kommen darin Worte und Dinge vor, die unsern meisten Zuhörern nicht fremd sind. Auffallend ist, dass auf eine solche Weise, ein noch ganz junger Mann, indem er einen Gegenstand behandelt, über welchen Newton, Taylor, Bernoulli und d'Alembert arbeiteten, auf einmal mitten in der Reihe dieser grossen Gelehrten als ihres Gleichen erscheint, ja selbst als Schiedsrichter, der, einen schwierigen Streit schlichtend, Jedem zeigt, worin er Recht habe und worin er irre, den Streit entscheidet und die wahre Auflösung giebt, die Jene vermutheten, aber nicht finden konnten.

Aber, so fest und wohlbegründet ihm auch seine Sätze scheinen, so gesteht er doch, dass sie die beobachteten Erscheinungen nur unvollständig erklären, besonders bei den Blase-Instrumenten, was die Weite und Lage der Oeffnungen und die Geschwindigkeit des Schalles überhaupt betrifft; es ist in der That wahrscheinlich, dass bei den Blase-Instrumenten die Luft nicht mehr als aus gradlinigen Streifen zusammengesetzt betrachtet werden darf; indessen erklärt doch diese Rechnung den bekannten Versuch von Tartini recht gut, wenn man annimmt, dass dieser berühmte Gelehrte sich in

so fern irrte, dass er die Octave für den wirklichen Ton hielt, den er hörte.

Euler erkannte bald den Werth der neuen Methode und machte sie zum Gegenstande seiner tiefsten Forschungen. D'Alembert gab nicht nach. In Privat-Briefen und gedruckten Abhandlungen machte er eine Menge Einwürfe, welche alle späterhin Lagrange beantwortet hat, wobei es aber doch sonderbar ist, dass in einer Wissenschaft, die man gewöhnlich für so strenge hält, selbst Gelehrte des ersten Ranges noch in ihren Meinungen getheilt seyn und fortwährend darüber streiten konnten? Dies kommt ohne Zweifel daher, dass Gegenstände, deren Resultate nicht füglich unmittelbar Versuchen unterworfen werden können, ausser einem calculativen Theil, welcher strengen Gesetzen unterworfen ist, über welche sich nicht streiten lässt, gewöhnlich noch einen metaphysischen Theil haben, der zweifelhaft und dunkel bleibt [*und einen physischen, über welchen man gewöhnlich, bei solchen Anwendungen der Mathematik auf einzelne Erscheinungen, zunächst mit Hypothesen hinweg zu kommen sucht*]. Auch wohl daher, dass sich die Mathematiker öfters bei ihren Rechnungen begnügen, bloss den Gang der Beweise anzuzeigen und Entwickelungen, die keinesweges immer so überflüssig sind als es

scheint, weglassen, wo dann die Ausfüllung dieser Lücken öfters eine Arbeit erfordert zu welcher nur der Verfasser allein den Muth haben mag; endlich aber daher, dass Dieser, fortgerissen von seinem Gegenstande und von seiner Geschicklichkeit, sich erlaubt, selbst auch wohl über zwischenliegende Begriffe hinwegzuschreiten und seine Endgleichung gleichsam zu errathen, anstatt sich Schritt vor Schritt, mit derjenigen Aufmerksamkeit die jedes Misverständniss hebt, ihr zu nähern. Daher finden öfters vorsichtige Rechner, selbst bei Euler, d'Alembert und Lagrange, Fehler, und die besten Köpfe können sich nicht sogleich verständigen, weil sie sich nicht mit derjenigen Aufmerksamkeit lesen, die nöthig ist, um sich zu verstehen.

Eulers erste Antwort bestand darin, Lagrange in die Berliner Academie aufnehmen zu lassen. Als er ihm am 2. October 1759 seine Aufnahme meldet, schreibt er ihm: „Ihre „Auflösung des isoperimetrischen Problems lässt „nichts zu wünschen übrig, und ich freue mich, „dass dieser Gegenstand, mit welchem ich mich, „seit den ersten Versuchen bis jetzt, fast allein „beschäftigte, durch Sie zum höchsten Grade „der Vollkommenheit gebracht ist. Die Wich„tigkeit des Gegenstandes hat mich veranlasst, „mit Hülfe der von Ihnen gegebenen Aufklä-

„rungen, eine analytische Auflösung der Aufgabe „auszuarbeiten, die ich aber durchaus nicht eher „bekannt machen werde, bis Sie die Fortsetzung „Ihrer Untersuchungen haben drucken lassen, „um Ihnen nicht den geringsten Theil des Ruhms „zu entziehen, der Ihnen gebührt."

So sehr diese zarte Behandlung, diese Beweise der höchsten Achtung, einem jungen Manne der noch nicht vier und zwanzig Jahre alt war, schmeicheln mussten, so sehr machen sie auch dem berühmten Gelehrten Ehre, der, damals den Scepter der Mathematik in der Hand haltend, auf eine solche Weise ein Werk aufzufassen verstand, das ihm seinen Nachfolger zeigte.

Aber Eulers Worte stehen in einem Briefe; man könnte glauben, dass dieser grosse und wackere (*grand et bon*) Mann sich nur ein wenig eine gewisse Uebertreibung erlaubt habe, die wohl im Briefstyl vorkommt. Wir wollen also sehen wie er sich in der Folge in der Dissertation selbst ausdrückt, die sein Brief ankündigt. Im Eingange heisst es:

„Nachdem ich mich lange Zeit vergebens „bemüht hatte dieses Integral zu finden (*post-„quam diu et multum desudassem nec „quicquam inquisivissem*) bin ich nicht wenig „erstaunt (*penitus obstupui*) zu vernehmen, dass „die Aufgabe in den Turiner Memoiren leicht

„und glücklich gelöset sey. Diese schöne Entdeckung hat um so mehr meine Verwundrung „erregt, je mehr die Auflösung, von der Methode die ich angegeben habe, abweicht, und sie „an Einfachheit übertrifft."

So beginnt Euler seine Abhandlung, in welcher er, mit seinem gewöhnlichen lichtvollen Vortrage, die Principien der Methode seines jungen Nebenbuhlers und die Theorie des neuen Calculs, den er Variations-Rechnung nennt, auseinander setzt. [*Welch eine Lobrede auf Euler!*]

Um die verschiedenen Ursachen von Eulers Bewundrung, die er mit so edler Freimüthigkeit aussprach, deutlicher zu zeigen, wird es nicht unnütz seyn den Ursprung der Untersuchungen Lagrange's zu erzählen, wie er ihn uns zwei Tage vor seinem Tode mitgetheilt hat.

Die ersten Versuche, das Maximum und Minimum unbestimmter Integral-Ausdrücke zu finden, waren von Bernoulli, an der Linie des schnellsten Falles und der isoperimetrischen Aufgabe, gemacht worden. Euler hatte sie in eine allgemeine Methode gebracht, in einem originellen Werke, *in welchem sich überall die tiefste Einsicht des Calculs zeigt; aber seine Methode, so sinnreich sie auch war, hatte nicht diejenige Einfachheit, die sich von einem rein ana-*

lytischen Werk erwarten liess. Euler gab dies selbst zu. Er glaubte die Nothwendigkeit eines *von der Geometrie* und *der Analysis unabhängigen* Beweises zu ahnden *).

In einem Anhange am Ende des Buchs, der *von der Bewegung geworfener Körper in nicht widerstehendem Mittel handelt,* scheint er ganz den Hülfsquellen der Analysis zu misstrauen. Er sagt am Schlusse: *Ist mein Princip (dasjenige, welches Lagrange späterhin das Princip der kleinsten Wirkung nannte) etwa nicht strenge genug bewiesen, obgleich es feststeht, so glaube ich, dass man es noch durch eine gute Metaphysik zur grössten Evidenz wird bringen können und überlasse dieses den Metaphysikern.*

Diese Aufforderung, auf welche die Metaphysiker nicht antworteten, hörte Lagrange. Sie reitzte ihn. In Kurzem fand der junge Mann die Auflösung, an welcher Euler verzweifelt war; er fand sie durch die Analysis und indem er erzählt, wie er zu dieser Entdeckung gekommen sey, sagt er ausdrücklich, um auf Eulers

*) *Desideratur itaque methodus a resolutione geometrica et lineari libera, qua pateat, loco Pdp scribi posse pdP.* Und eben dieses beweiset Lagrange durch die Variations-Rechnung.

Zweifel zu antworten, dass er sie nicht für metaphysisch, sondern das Princip für eine nothwendige Folge aus den Gesetzen der Mechanik, für einen bloss einzelnen Fall eines noch allgemeinern Princips halte, auf welches er späterhin wirklich seine analytische Mechanik gebaut hat. (Man sehe die analytische Mechanik, Seite 246 der zweiten, und S. 189 der ersten Auflage.)

Dieser schöne Eifer, unübersteiglich gehaltene Schwierigkeiten zu überwinden und unvollkommen gebliebene Theorieen zu vervollkommnen, scheint Lagrange bei der Wahl seiner Gegenstände immer geleitet zu haben.

D'Alembert hatte geglaubt, dass es unmöglich sey, die Bewegung einer in einem Gefässe eingeschlossenen Flüssigkeit der Rechnung zu unterwerfen, in so fern das Gefäss nicht eine bestimmte Gestalt habe. Lagrange beweiset, dass der Fall, im Gegentheil, nur dann schwierig ist, wenn sich die Flüssigkeit in mehrere Massen theilt, dass man aber alsdann den Ort der Theilung bestimmen und die Bewegung so untersuchen könne, als wenn die Theile isolirt wären.

D'Alembert meinte, die verschiedenen Schichten einer flüssigen Masse, wie sie die Erde anfänglich habe seyn können, dürften nicht noth-

wendigerweise waagerecht seyn; Lagrange zeigt, dass d'Alemberts Gleichungen nichts als die Gleichungen der Schichten selbst sind.

Indem er so gegen d'Alembert, und zwar mit aller einem Gelehrten dieses Ranges schuldigen Achtung, stritt, bediente er sich öfters schöner Sätze seines Gegners selbst; d'Alembert seiner Seits schreibt Lagrange bei Gelegenheit dieser Untersuchungen: „Ihre Aufgabe hat mir so schön geschienen, dass ich „eine andere Auflösung gesucht habe; ich habe „eine einfachere Methode, um zn Ihrem eleganten Ausdruck zu gelangen, gefunden.“ Diese Beispiele, deren sich leicht mehrere geben liessen, zeigen, mit welcher Zartheit diese berühmten Wettkämpfer einander behandelten und dass sie, indem sie unaufhörlich ihre Kräfte maassen, besiegt oder Sieger, in ihrem Streite selbst noch Ursach fanden, sich nur um so höher zu achten, und dem Gegner Gelegenheit zu neuen Triumphen bereiteten.

Die Pariser Academie hatte die Theorie der Schwankungen des Mondes zu einer ihrer Preisaufgaben gemacht, d. h. sie verlangte die Nachweisung der Ursachen, aus welchen der Mond, indem er sich um die Erde bewegt, ihr, mit Ausnahme einiger von den Astronomen beobachteten Differenzen, deren Zusammenhang der ältere

Cassini sehr gut erklärt hat, immer dieselbe Seite zukehrt. Es kam darauf an, diese Erscheinung der Rechnung zu unterwerfen, und sie analytisch, aus dem Princip der allgemeinen Schwere, zu erklären.

Diese Aufgabe war eine Aufforderung für Lagrange's Genie, und eine ihm dargebotene Gelegenheit, seine Principien und analytischen Entdeckungen anzuwenden. D'Alemberts Erwartung ward nicht getäuscht. Lagrange's Arbeit ist eines der schönsten Denkmäler seines Ruhms. Man findet darin die erste Entwickelung seiner Ideeen und den Keim der analytischen Mechanik. D'Alembert schreibt ihm: „Ich habe mit eben so vielem Vergnügen als „Nutzen Ihre schöne Ausarbeitung über die „Monds-Schwankungen gelesen, die des erhal-„tenen Preises so würdig ist."

Dieser Erfolg bewog die Academie, die Theorie der Jupiters Trabanten zu verlangen. Euler, Clairaut und d'Alembert hatten sich an der Aufgabe von drei Körpern, bei Gelegenheit der Mondsbewegungen, geübt; Bailly wendete hernach Clairauts Theorie auf das Problem von den Trabanten an. Sie führte ihn schon zu interessanten Resultaten, aber diese Theorie war unzureichend. Die Erde hat nur einen Trabanten, Jupiter hat deren viere, die

sich

sich unaufhörlich stören und die gegenseitig auf ihren Lauf wirken; das war also die Aufgabe von sechs Körpern, der Sonne, dem Jupiter, und seinen vier Monden. Lagrange griff die Schwierigkeit gradezu an, besiegte sie glücklich, zeigte die Ursache der von den Astronomen beobachteten Ungleichheiten, und machte noch auf einige andere aufmerksam, die durch ihre Kleinheit den Beobachtern entgehen. Die Kürze der zum Concurs bestimmten Zeit und der ungeheure Umfang der analytischen und numerischen Rechnungen erlaubte ihm nicht, den Gegenstand in einer ersten Abhandlung ganz zu erschöpfen; er bemerkte Dieses selbst und versprach weitere Untersuchungen, von welchen aber vielleicht andere Arbeiten, die mehr nach seinem Geschmack seyn mochten, ihn immer abgehalten haben. Vier und zwanzig Jahre später hat der Graf Laplace diese schwierige Theorie wieder vorgenommen und interessante Entdeckungen darin gemacht, die sie vervollständigten und die Astronomen in Stand setzten, ihre Tafeln von allem blos Empirischen zu befreien.

Um eben jene Zeit erregte eine Aufgabe ganz anderer Art Lagrange's Aufmerksamkeit. Fermat, einer der grössten Geometer Frankreichs und seiner Zeit, hatte über die Eigenschaften der Zahlen äusserst merkwürdige Lehrsätze hin-

terlassen, auf die er vielleicht durch Induction gekommen war, und von welchen er sich die Beweise vorbehalten hatte, die man aber nach seinem Tode nicht fand, vielleicht weil er selbst sie als unzureichend verworfen hatte, oder aus irgend einem andern, nicht wohl auszumittelnden, Grunde. Die Lehrsätze selbst scheinen zwar nur mehr sonderbar als nützlich, aber man weiss, wie sehr Schwierigkeiten, besonders den Mathematiker, reitzen. Würden wohl sonst die Geometer, ohne diesen Reitz, so viel Wichtigkeit auf das Problem von der Brachystochrone, von der Isoperimetrie und den rechtwinkligen Trajectorien gelegt haben? Gewiss nicht; sie wollten einen neuen Calcul erschaffen, sie wollten Methoden erfinden und vervollkommnen, denen es einst an nützlichen Anwendungen nicht fehlen konnte, und so ergriffen sie die erste beste Aufgabe, welche neuer Hülfsmittel bedarf.

Die Theorie der allgemeinen Schwere, welche Newton entdeckt hatte, war für sie ein wahrer Fund. Schwerlich konnte jemals der Transcendental-Calcul einen würdigern und erhabenern Gegenstand finden. Und welche Fortschritte man hier noch machen mag, dem ersten Erfinder bleibt sein Ruhm. Auch Lagrange, der öfters Newton das grösste Genie aller Zeiten nennt, fügt hinzu „auch das glück-

lichste; denn es giebt nur eine Theorie des Weltalls zu erfinden." Hundertjährige Arbeiten und Entdeckungen sind nöthig gewesen, um das Gebäude aufzuführen, zu welchem Newton den Grund gelegt hatte, aber das Wesentliche verdankt man ihm, und es scheint gleichsam als habe er schon eine Bahn durchlaufen, die er nur mit einem Glanze eröffnete, der seinen Nachfolgern Muth gab.

Ohne Zweifel hatten sich schon mehrere Mathematiker an den Fermatschen Sätzen versucht. Keinem war Etwas gelungen. Euler allein hatte einige Schritte auf diesem schwierigen Wege gethan, auf welchem sich seitdem Legendre und Gauss ausgezeichnet haben. Lagrange, indem er einige Winke Eulers benutzte und berichtigte, lösete eine Aufgabe, die zu allen übrigen den Schlüssel zu enthalten scheint und von welcher er zugleich eine nützliche Anwendung gab, nemlich die vollständige Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades zwischen zwei unbekannten Grössen, wenn diese Grössen ganze Zahlen seyn sollen.

Die Abhandlung, obgleich, wie die vorigen, in den Turiner Memoiren abgedruckt, ist aus Berlin vom 29. September 1768 datirt. Dieses Datum erinnert an eines jener Ereignisse, welche

machen, dass Lagrange's Leben nicht ganz in seinen Werken ist.

Der Aufenhalt zu Turin gefiel ihm wenig mehr; er fand dort Niemand mehr, der sich mit einigem Erfolge mit der Mathematik beschäftigte; er wünschte die Pariser Gelehrten zu sehen, mit welchen er im Briefwechsel war. Herr von Carraccioli, mit welchem er in der vertrautesten Freundschaft stand, wurde bei der Gesandschaft in London angestellt und musste durch Paris gehen, wo er einige Zeit bleiben wollte. Er schlug Lagrange vor, mit ihm zu reisen, welches dieser mit Vergnügen annahm. Er wurde von d'Alembert, Clairaut, Condorcet, Fontaine, Nollet, Marie und andern Gelehrten ganz so aufgenommen, wie er es erwarten durfte. Plötzlich aber, nach einem Mittagsessen, bei welchem Nollet ihm lauter auf italiänische Weise zubereitete Speisen hatte vorsetzen lassen, erkrankt, konnte er seinem Freunde nicht nach London folgen. Dieser erhielt unvermuthet den Befehl sich auf seinen Posten zu begeben und musste nun Lagrange, in einer gemietheten Wohnung, unter der Aufsicht eines Vertrauten zurücklassen, der beauftragt war, für alles Nöthige zu sorgen.

Dieser Zufall änderte Lagrange's Projecte. Er kehrte nach Turin zurück. Dort widmete

er sich mit neuem Eifer der Mathematik, als er hörte, dass die Berliner Academie mit dem Verlust Eulers bedroht werde, der die Absicht habe nach Petersburg zurückzugehen. D'Alembert spricht von diesem Vorsatz Eulers in einem Briefe an Voltaire vom 3. März 1766. „Es wird mir leid thun" sagt er, „der Mann ist nicht sehr amüsant, aber ein grosser Mathematiker," d'Alembert lag freilich wenig daran, dass der „wenig amüsante Mann" sich von Paris um 7 Grad weiter nach Norden entfernte; er konnte ja die Werke „des grossen Mathematikers" eben so wohl in den Petersburger als in den Berliner Memoiren lesen. Was aber d'Alembert nicht behagte, war die Furcht, an seine Stelle berufen zu werden, und die Verlegenheit, hier Anerbietungen abzulehnen, die er nicht anzunehmen fest entschlossen war. Friedrich [*der Grosse*] bot in der That d'Alembert wiederholt die Präsidenten-Stelle seiner Academie an, die er ihm seit dem Tode Maupertius aufbewahrt hatte; d'Alembert schlug ihm vor, Lagrange an Eulers Stelle zu setzen, und wenn wir der geheimen Geschichte des Berliner Hofes (2. Band S. 477) glauben, *so hatte schon Euler selbst, Lagrange als den Mann genannt, der im Stande sey, auf seiner Bahn weiter fortzuschreiten.* In der That ist

es sehr natürlich, dass Euler, der die Erlaubniss wünschte Berlin zu verlassen, und d'Alembert, der einen Vorwand suchte es zu meiden, beide, ohne Verabredung, ihre Gründe hatten, an den Mann zu denken, der am meisten geeignet war, den Glanz zu erhalten, welchen Eulers Arbeiten über die preussische Academie verbreitet hatten.

Lagrange ward angenommen. Er erhielt einen Gehalt von 1500 Thalern, oder ungefähr 6000 Franken, mit dem Titel eines Directors der physisch-mathematischen Classe der Academie.

Man kann sich wundern, dass Euler und Lagrange, nach einander an Maupertuis Stelle, nur die Hälfte des Gehalts bekamen, welches der König d'Alembert ganz geben wollte. Dies erklärt sich daraus, dass dieser Fürst, der sich in seinen Mussestunden mit der Poesie und den Künsten beschäftigte, keinen Begriff von den Wissenschaften hatte, die er jedoch als König beschützen zu müssen glaubte, [*Diese Unrichtigkeit wird selbst durch das, was unmittelbar folgt, widerlegt.*] dass er wenig von der Mathematik hielt, gegen welche er drei Seiten Verse richtete, die er d'Alembert selbst sandte, der aber Anstand nahm, darauf bis zur Beendigung der Belagerung von Schweidnitz zu

antworten, „weil es“ wie er sagte, „zuviel auf einmal seyn würde, die Oestreicher und die Mathematik zugleich zu Gegnern zu haben“ und endlich, wenn man in der Correspondenz mit Voltaire lieset, wie Friedrich, Euler, ungeachtet seines grossen Rufs, nur gewöhnlich seinen einäugigen Mathematiker nannte, „dessen Ohren nicht dazu gemacht wären, die Reize der Poesie zu verstehen“ wozu Voltaire hinzufügt „Unserer ist nur eine kleine Zahl von Eingeweihten; die Uebrigen sind Profane“ eine mehr witzige als richtige Bemerkung, die Euler, in Beziehung auf die Mathematik, mit weit grössern Recht, Voltaire und Friedrich hätte zurück geben können. Man bemerkt leicht, dass Voltaire, der mit so vieler Gerechtigkeit Newton gelobt hatte, hier nur dem Könige schmeicheln wollte. Er geht in die Idee dieses Fürsten ein, der an der Spitze seiner Academie nur einen Mann stellen wollte, welcher zugleich, wenigstens irgend einen allgemeinen literarischen Ruf habe, indem er fürchtete, dass sich ein Mathematiker vielleicht nicht hinreichend für die Leitung der übrigen literarischen Arbeiten interessiren, ein Literator aber, an die Spitze einer Gesellschaft die zum Theil aus Gelehrten bestand, deren Sprache er nicht einmal kannte, noch weniger passen würde. So hatte er Recht,

die Stelle zu theilen, damit sie um so vollständiger ausgefüllt werde. [*Also theilte sie der grosse König aus weisen Gründen, und nicht weil er, wie es oben hiess, die Wissenschaften nicht geachtet hätte.*]

Lagrange nahm seine Stelle am 6. November 1766 ein. In dem Antritts-Protocoll wird ihm der Name Lagrange-Tournier beigelegt. *Er war von dem Könige wohl aufgenommen worden, aber er bemerkte bald, dass die Deutschen es nicht gern haben, wenn Fremden die Stellen in ihrem Lande einnehmen; er studirte eifrig ihre Sprache; er beschäftigte sich ernsthaft nur mit Mathematik; er kam Niemand im Wege, weil er nichts suchte und zwang endlich die Deutschen, ihm ihre Achtung nicht zu versagen.* „Der König" sagte er, „behandelte mich gut; ich glaube sogar, dass er mich Euler vorzog, der ein wenig frömmelte, während ich im Gegentheil jeden Glaubenszwist vermied und Jedem seine Meinung liess." Diese weise Zurückhaltung, die ihn zwar den Annehmlichkeiten des geselligen Lebens entzog, welche jedoch auch nicht ohne Inconvenienzen gewesen seyn würden, machte, dass ihm alle seine Zeit für mathematische Arbeiten blieb, von welchen er bis dahin nur den schmeichelhaftesten und ungetheiltesten Beifall geernd-

tet hatte. Nur einmal wurde dieser Einklang des Beifalls unterbrochen.

Ein französischer Mathematiker, der mit grossem Scharfsinn eine noch grössere Eigenliebe verband, und sich kaum die Mühe gab die Werke Anderer zu studiren, beschuldigte Lagrange, *er habe sich auf der neuen Bahn, die er betreten, verirrt, weil er ihre Theorie nicht hinreichend ergründet; er warf ihm vor, dass er in seinen Behauptungen und Rechnungen gefehlt habe.* Lagrange bezeigt in seiner Antwort einiges Befremden über diese nicht sehr artigen Bemerkungen, von welchen er wenig getroffen wurde. Er erwartete wenigstens, sie durch einige *gute oder schlechte* Gründe gerechtfertigt zu sehen. Er zeigte, dass Fontaines Aufgabe unvollständig und in gewisser Hinsicht widersprechend sey. Fontaine hatte sich gerühmt, den Mathematikern die Bedingungen gezeigt zu haben, unter welchen die Integration der Differential-Gleichungen zwischen drei unveränderlichen Grössen möglich ist. Lagrange zeigt ihm durch mehrere Citate, dass diese Bedingungen den Geometern längst bekannt waren, ehe Fontaine im Stande seyn konnte, sie ihnen zu lehren. Er leugnet übrigens nicht, dass Fontaine sie vielleicht ebenfalls finden konnte, „wenigstens bin ich überzeugt“ fügt er hinzu

„dass Fontaine dazu so gut als ein Anderer fähig ist.“

Mit solcher Rücksicht und Mässigung antwortete er dem angreifenden Theil. Condorcet in der Gedächtnissrede auf Fontaine ist bei Gelegenheit dieses Streits zu dem Geständniss gezwungen, dass sein College gegen die gewöhnliche Höflichkeit gefehlt habe, welche nie bei Seite zu setzen erlaubt sey, die Dieser aber vielleicht bei berühmten Gegnern, deren Ehre der kleinen Schonung nicht bedürfe, für weniger unerlässlich gehalten haben möge. Man sieht leicht den Werth dieser Entschuldigung, besonders zu Gunsten eines Mannes, der nach seinem eigenen Geständniss „die Eitelkeit Anderer studirte, um sie bei Gelegenheit zu bestrafen (*blesser*).“ Man muss wenigstens gestehen, dass Derjenige, welcher sich, im Besitz des Rechts, auf eine solche Weise angegriffen sieht und die Höflichkeit dennoch gegen seinen Gegner, der sich ihrer überhebt, beobachtet, über Diesen, dessen unüberlegten Angriff er ausserdem siegreich zurückweiset, in doppeltem Vortheil ist.

Man erwarte nicht, dass wir Lagrange Schritt vor Schritt bei seinem gelehrten Untersuchungen, mit welchen er die Berliner Memoiren, und selbst einige Bände der Turiner Academie bereichert hat, die ihm in jedem Betracht

ihre Existenz verdankt, folgen. Wir können indessen nicht umhin, wenigstens mit einigen Worten das Merkwürdigste daraus zu erwähnen. Wir nennen Folgendes.

Eine grosse Abhandlung, in welcher man den Beweis eines sonderbaren Satzes findet, den Euler nicht hatte beweisen können; eine Erweiterung dieses Satzes und directe Beweise anderer, auf welche Euler nur durch Induction gekommen war; in welcher ferner der Verfasser, nachdem er die Analysis des Diophantes und Fermat berührt hat, zu den Gleichungen mit partiellen Differentialen übergeht, ein von Euler bemerktes Paradoxon erklärt, eine ganze Gattung von neuen Gleichungen zeigt, von welchen man nur einzelne Fälle kannte und dabei einen scheinbaren Widerspruch hebt, indem er die Bedeutung, sowohl der vollständigen Integrale dieser Gleichungen, als der singulairen Auflösungen zeigt, die in jenen Integralen nicht enthalten sind.

Einen, durch seine Allgemeinheit und Einfachheit des Gesetzes der Fortschreitung, merkwürdigen Ausdruck für die Umkehrung der Reihen, von welchem er eine glückliche Anwendung auf das Keplersche Problem macht, und durch welchen es ihm gelingt die Convergenz des analytischen Ausdrucks der Gleichung für

den Mittelpunkt zu zeigen, welche Convergenz man immer angenommen hatte, ohne sie beweisen zu können.

Eine wichtige Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen, welche zugleich neue Bemerkungen über die algebraischen Gleichungen enthält. Diese Arbeit hat dem Werke, welches hernach unter demselben Titel herausgekommen ist und von welchem zwei Auflagen erschienen sind, zur Grundlage gedient.

Ein anderes nicht weniger wichtiges noch neueres Memoire, in welchem er den Differential- und Integral-Calcul auf bloss algebraische Operationen zurückführt, und dadurch aus diesem Calcul die Ideen des Unendlich Kleinen, der Fluxionen, der Grenzen und des Verschwindens, ganz verbannt. Die Legitimität der Abkürzungen die man sich in diesen beiden Rechnungen erlaubt, wird hier nachgewiesen und der Calcul wird von allen Schwierigkeiten und Paradoxen, die, seit seiner Erfindung, aus einer unvollständigen und verdächtigen Metaphysik entstanden waren, befreit.

Den Beweis eines sonderbaren Lehrsatzes von den Primzahlen, der bis dahin Niemanden gelungen und der um so schwieriger war, da sich dergleichen Sätze nicht wohl algebraisch ausdrücken lassen.

Die Integration partieller Differentiale erster Ordnung nach einem sehr allgemeinen Princip, welches für die meisten Fälle, in welchen diese Integration möglich ist, zureicht.

Eine rein analytische Auflösung der Aufgabe von der drehenden Bewegung eines Körpers von beliebiger Gestalt, durch welche es ihm endlich gelingt, die Schwierigkeiten zu überwinden, die ihn lange aufgehalten hatten, worüber aber die Mathematiker noch einige weitere Entwickelungen zu erwarten schienen, die sie im zweiten Bande seiner neuen analytischen Mechanik zu finden hofften.

Mehrere Aufsätze über die dunkle und schwierige Theorie der Wahrscheinlichkeit, wo das Integral merkwürdig ist, welches davon die Grundlage ausmacht, so wie die Zahl und Wichtigkeit der Probleme die dadurch aufgelöset werden; ferner die Anwendung die der Verfasser von dieser Theorie auf die in der Astronomie immer wieder vorkommende Aufgabe macht: über das Zutrauen, welches sich in das mittlere Resultat einer grossen Zahl von Beobachtungen setzen lässt; wobei man die interessante und für den Bordaischen Kreiss so günstige Bemerkung antrifft, dass jede grade Zahl, vor der nächst grössern ungraden, in Rücksicht auf die Wahrscheinlichkeit dass der Fehler zwischen gewissen Gren-

zen liege, den Vorzug hat. Der Graf Laplace hatte seiner Seits an der nemlichen Theorie gearbeitet. Lagrange nimmt sie abermals vor und bringt Mittel in Anwendung, die sich auf Gleichungen aller Ordnungen erstrecken, von welchen sie die endlichen Integrale geben, und die in allen Fällen die Bestimmung der willkührlichen Functionen erleichtern.

Maclaurin hatte nach Art der Alten die Anziehung elliptischer Sphäroiden behandelt. Lagrange setzt diese Arbeit mit dem Sinnreichsten und Schönsten was uns Archimedes hinterlassen hat, in Vergleich. Er zeigt aber, dass sich dieser schwierige Gegenstand eben so leicht analytisch behandeln lässt. Dies gelingt ihm, aber er bleibt mit dem englischen Mathematiker auf demselben Punkte stehen. Legendre und Laplace sind seitdem weiter gegangen. Ganz kürzlich hat uns Ivory gezeigt, dass man sich durch eine sehr einfache Betrachtung einer Menge von Rechnung überheben und selbst zu Sätzen gelangen kann, zu welchen nur die weitläuftigsten Rechnungen, und nur mit Schwierigkeit führen. Sonst suchten die Mathematiker immer erst von jeder Aufgabe eine Art von Uebersicht zu erlangen, um die Aufgabe zu vereinfachen, und sie auf schon gelösete Aufgaben zurückzubringen, und dann dadurch den Calcul zu

vereinfachen, oder ihn gar entbehrlich zu machen. Seit der Erfindung der Infinitesimal-Rechnung aber macht zuweilen die Allgemeinheit der Methode, bei welcher dem Rechner eigentliches Genie entbehrlicher ist, dass man in schwierigern Fällen nur mehr das allgemeine Instrument zu vervollkommnen sucht. Jetzt da solche Quellen durch die Arbeiten Eulers, Lagrange's und ihrer ihnen würdiger Nachfolger erschöpft zu seyn scheinen, wäre es vielleicht Zeit, mehr zu der alten Methode und zu D. Bernouillis Weise zurückzukehren, von welchem Condorcet rühmt, dass er als Rechner *mässig* gewesen sey. Lagrange hat von seinen ausgezeichneten Talenten, aus Gewohnheit, zuweilen einen andern Gebrauch gemacht. Er nimmt Alles aus der Analysis. Jedoch richtiger ist es, zu sagen, dass er im höchsten Grade beide Methoden verband; den Beweis davon giebt die Variations-Rechnung, mit welcher sich, weder der Grösse noch der Allgemeinheit nach, kaum eine der glücklichsten Ideen anderer Mathematiker vergleichen lässt. Und was die sinnreichen Uebersichten zur Vereinfachung einzelner Aufgaben betrifft, so hat er schon früher die Erscheinungen beim Schall auf die Theorie der schwingenden Saiten gebracht; auch noch in der letzten Arbeit die er der Classe vorlegte, auf eine

solche Weise seine Theorie der Variationen der störenden Elemente der Planeten ungemein vereinfacht und aus seiner Auflösung eine allgemeine Methode für alle Probleme der Mechanik gemacht, wo die störenden Kräfte gegen die Haupt-Kräfte sehr klein sind.

Sieht man ihn indessen gleich in den meisten Fällen die glücklichsten Anstrengungen machen, um eine Aufgabe zu verallgemeinern und seinen Gegenstand zu erschöpfen, so findet man doch auch zuweilen, dass er sich selbst Schwierigkeiten schafft, wo es keine giebt, und sinnreiche und gelehrte Methoden zur Auflösung elementarer Aufgaben anwendet, zu welchen blos ganz gewöhnliche Constructionen nöthig sind, [*zum Beispiel auch in der Abhandlung über die Pyramide.*]

So untersucht er bei Gelegenheit, des letzten Durchganges der Venus, die Curve des Ein- und Austrittes für die verschiedenen Länder der Erde analytisch. Aber, blos um zu der sehr leichten und mittelmässig genauen Auflösung von Delille und Lalande zu gelangen, ist er gezwungen, ganz fremde Mittel und feine Bemerkungen zu Hülfe zu nehmen und seine Coordinaten einer Menge von Verwandlungen zu unterwerfen, während man durch eine trigonometrische Rechnung von wenigen Zeilen eine vollständigere

ständigere Formel erhalten kann, in welcher sich noch Glieder finden, die Lagrange nicht hat und die, obgleich sehr klein, doch nicht zu vernachlässigen sind. Jedoch ist nicht zu leugnen, dass er aus seiner Formel ein gutes Mittel zur Berechnung der Sonnen-Parallaxe zu ziehen weiss, welches weder Delille noch Lalande bemerkt hatten, welches man aber auch ebenfalls viel leichter aus der trigonometrischen Rechnung findet. Wir bemerken noch, dass diese Abhandlung, die mir bis jetzt, da ich Alles lesen musste, was aus seiner Feder hervorgegangen ist, gänzlich unbekannt war, für einige neuere Astronomen die Veranlassung zu gewissen Methoden, die sie gern empfehlen möchten, gewesen zu seyn scheint, und dass Lagrange hier das erste, ein wenig ausgedehnte Beispiel der Auflösung einer elementaren astronomischen Aufgabe durch die Methode mit drei rechtwinkligen Coordinaten gegeben hat, die sonst in der höhern Astronomie von so grossem und ausgebreitetem Nutzen ist.

Er machte späterhin einen ähnlichen Versuch mit der Aufgabe von den Finsternissen; er fand dass die etwas weitläuftige Methode von Duséjour nicht so einfach und leicht sey als sich nach dem gegenwärtigen Zustande der Analysis erwarten lässt. Er entwickelt bei dieser

Arbeit alle seine Hülfsquellen und seine ganze Geschicklichkeit; die Abhandlung ist besonders für einen Astronomen, der die Methode noch nicht kennt, interessant. Ich vergesse nie die Wirkung, welche die Abhandlung auf mich vor nun beinahe dreissig Jahren machte, als ich sie zuerst las; ich erinnere mich noch, mit welchem Lobe mir einige Jahre später Oriani davon sprach; aber, obgleich Lagrange versucht hat, den practischen Theil derselben durch sehr sinnreiche Tafeln zu erleichtern, so sieht man doch nicht, dass die Astronomen die Methode, die von den directesten, strengsten und, dem Anschein nach, zur Anwendung auf alle Fälle geschicktesten Formeln ausgehend, am Ende doch nur bloss mit einem Näherungs-, und was noch mehr ist, indirecten Ausdruck schliesst, angenommen hätten.

Ein anderer Versuch dieser Art war nicht glücklicher, weil derselbe nicht wohl gelingen konnte. Die Aufgabe war zu einfach. Sie betraf die Differenz des heliocentrischen und geocentrischen Orts eines obern Planeten. Der Verfasser findet sie durch merkwürdige Kunstgriffe der Rechnung. Aber die Auflösung ist, ungeachtet der Eleganz der Ausdrücke, sehr unbequem.

Unter diesen Spielen seines Genies, welches

die Schwierigkeiten aufsuchte, um desto mehr seine Kraft zu zeigen, gehört auch noch die Abhandlung, in welcher er die Mittel lehrt, astronomische Tafeln aus einer Reihe von Beobachtungen aufzustellen, ohne die Gesetze der Bewegung der Himmels-Körper zu kennen. Die Astronomie lösete die Aufgabe immer auf ganz elementarem Wege. Die Mittel, welche Lagrange anwendet, sind mehr analytisch und gelehrt, aber in dem von ihm gewählten Falle, der zu den sehr einfachen gehört, darf man billig zweifeln, ob sie sichrer und leichter zum Ziele führen. Ohne Zweifel hat er nichts weiter damit gewollt, als zeigen, welche Hülfsmittel man in der Analysis würde gefunden haben, wenn nicht schon Kepler und Newton das Weltsystem und die Gesetze der Bewegung der Himmels-Körper entdeckt hätten. Denn es ist kaum anzunehmen, dass er etwa im geringsten an das Gesetz der allgemeinen Schwere, von welchem er selbst so schöne Entwickelungen gegeben hatte, gezweifelt habe, obgleich er an mehreren Stellen seiner Werke sich bemüht, Formeln für ein *beliebiges* Gesetz der Anziehung aufzustellen, um selbige von jeder Hypothese unabhängig zu machen.

Die Mathematiker werden mit Vergnügen die analytischen Untersuchungen über das Pro-

blem von den Projectionen lesen, welches nie vorher so allgemein und vollständig war behandelt worden; aber die Astronomen und Geographen werden darin nichts Practisches finden, was sie nicht schon auf elementarem Wege gelernt hätten. Liefern auch alle diese Abhandlungen wirklich keine, eigentlich nützliche Resultate, so sehr man sie auch mit Interesse lieset, so geben sie uns doch die häufig nützliche Lehre, dass leichte Aufgaben auch nur mit leichten Mitteln behandelt werden müssen, und dass die tiefere Analysis für Fälle aufbehalten bleibt, die der grössern Hülfsmittel bedarf, damit man nicht jenem Helden in der Fabel gleiche, der vom Jupiter den Blitz, oder vom Herkules die Keule lieh, um sich von einem Floh zu befreien.

Es ist wahrscheinlich, dass Lagrange den Astronomen wirklich nicht im Ernst seine beschwerlichen Methoden statt der leichtern und genauern, die sie schon kannten, empfehlen wollte; er machte nur von den leichtern, gewöhnlichern und schon aufgelöseten Aufgaben eben den Gebrauch, den die Analysten zuweilen von Gegenständen blosser Neugier machen, die ihnen zu Rechnungsbeispielen und zu Gelegenheiten, neue analytische Kunstgriffe zu zeigen, dienen, welche zu kennen immer gut ist.

Eine andere Arbeit Lagrange's, gross wegen ihres Gegenstandes, nützlich wegen ihrer beständigen Anwendungen, und seines ganzen Genies würdig, ist diejenige, in welcher er die successiven Veränderungen der Lage und Abmessungen der Planeten Bahnen berechnet. Alle Mathematiker, seit Newton, hatten sich mit dieser Aufgabe beschäftigt; ihre Differential-Formeln, der Reihe nach auf die einzelnen Planeten bezogen, waren bis auf einen gewissen Punkt, und während einer gewissen Zeit, für die Bedürfnisse der Astronomie zureichend; aber nach Ablauf dieses Zeitraums beging man mit den Formeln Fehler, und die Rechnungen mussten nach neuen Elementen wiederholt werden. Lagrange nimmt die Aufgabe aus einem völlig umfassenden Gesichtspunkte, der die vollständigste Auflösung zulässt. Anstatt die Bahnen, wie seine Vorgänger, nur Paarweise zu combiniren, betrachtet er sie alle zugleich, und es gelingt ihm, wie gross auch ihre Zahl seyn mag, der Gleichung eine Gestalt zu geben, in welcher sie sich integriren lässt, indem man auf der einen Seite das Grundgesetz der allgemeinen Schwere, auf der andern Seite die Bahnen, wie sie es sind, einen gewissen Zeitraum hindurch als bekannt annimmt. Seine Analyse zeigt, wie die Bahnen waren und wie sie es seyn werden für alle ver-

gangene und zukünftige Jahrhunderte. Die Auflösung lässt nichts weiter als etwa noch eine genaue Kenntniss der Massen derjenigen Planeten zu wünschen übrig, die keine Monde haben. Aber diese Kenntniss lässt sich mit der Zeit durch die nemlichen Formeln erlangen; einstweilen hat Laplace, aus Lagrange's Arbeit, eine begrenztere, aber leichtere Auflösung gezogen, die bis zur frühesten Epoche der Astronomie zurück, und um eben so viel Jahrhunderte über unsere Zeit hinaus also etwa 2000 Jahre zurück und in die Zukunft reicht.

Laplace war durch Induction auf die wichtigen Sätze von der Unveränderlichkeit der grossen Axen und der mittleren Bewegungen gekommen, woraus die Unveränderlichkeit des Planetensystems selbst folgt, und welches für immer die Befürchtung hebt, dass sich vielleicht die, beständig zur Sonne hingezogenen, Planeten zuletzt auf dieselbe stürzen könnten. Lagrange war schon auf ein beinah ähnliches Resultat für den Mond gekommen; es blieb jedoch noch der Zweifel übrig, ob der Satz strenge wahr sey. Lagrange beweiset ihn direct und ohne die Bahnen sehr nahe und kreisförmig zu setzen, jedoch lässt er noch die Quadrate und Producte der Massen von zwei Abmessungen weg. Poisson hat seitdem den Beweis auf Grössen der

zweiten Ordnung ausgedehnt. Es ist zu vermuthen, dass er sich auf Producte aller Ordnung erstrecken lässt. Inzwischen reicht das Geschehene hin, um zu beweisen, dass alle Furcht in dieser Hinsicht eitel und grundlos ist.

Die gewöhnliche Methode, die Gleichungen der Planeten-Bewegungen zu integriren, hatte eine Unbequemlichkeit, welche die Auflösung fast unbrauchbar machte, nemlich die Anwendung der Kreisbogen, die ohne Ende mit der Zeit zunehmen. Für gewisse Fälle war es gelungen, sie von diesen unbequemen Kreisbogen zu befreien. Laplace hatte hierüber wichtige Bemerkungen gemacht, aber sie waren auf eine zu feine Metaphysik gegründet, um einem rein analytischen Beweise die nöthige Klarheit zu geben. Lagrange sahe, dass sich, wenn man die willkührlichen Constanten verändert, wie es in der Theorie der particulairen Integrale geschiehet, die Kreisbogen bei der Berechnung der Perturbationen ganz vermeiden lassen.

Die Aufgabe von den Trajectorien oder der Gesammtheit von Curven die eine unendliche Zahl anderer Curven einerley Art unter gegebenen Winkeln schneiden, hatte alle Mathematiker, von Leibnitz und Bernouilli bis auf Euler, beschäftigt und es schien, dass bei dieser Aufgabe nichts zu wünschen übrig geblie-

ben sey. Lagrange machte daraus eine neue Aufgabe, indem er von den Curven auf Flächen überging. Diese Aufgabe führt auf eine Gleichung mit partiellen Differentialen, die nur dann integrabel ist, wenn der Durchschnitt unter einem rechten Winkel erfolgt.

Wir haben nur eine sehr unvollständige Uebersicht von der überaus grossen Menge von Arbeiten gegeben, die den Memoiren der Berliner Academie, so lange sie das Glück hatten, von Lagrange dirigirt zu werden, einen so grossen Werth gaben. Es sind darunter Abhandlungen, die, nach ihrer Ausdehnung und Wichtigkeit, für ein grosses Werk gelten können; und doch machen dieselben nur einen Theil seiner Productionen während jener zwanzig Jahre aus. Er schrieb während dieser Zeit auch seine analytische Mechanik. Er wünschte sie in Paris gedruckt zu sehen, weil er glaubte, dass daselbst die Formeln besser und genauer würden gesetzt werden. Andern Theils war es zu gewagt, ein solches Manuscript den Händen eines Reisenden anzuvertrauen, der vielleicht seinen ganzen Werth nicht kannte. Lagrange machte also eine Abschrift davon, die Duchatelet dem Abt Marie einzuhändigen übernahm, mit welchem er näher bekannt war. Marie antwortete wie es das Zutrauen mit welchem er beehrt wurde verdiente.

Seine erste Sorge war, einen Verleger zu suchen, aber, was man jetzt kaum glauben wird: er konnte keinen finden. Je neuer die Methoden waren, je feiner die Theorien, je weniger vielleicht konnten sie Leser finden, die sie verstanden, und, ohne im geringsten an den Werth des Werks zu zweifeln, waren die Buchhändler zu entschuldigen, wenn sie an Absatz zweifelten, weil derselbe sich zu leicht, blos auf eine kleine Zahl, durch Europa zerstreuter, Mathematiker beschränken konnte. Desaint, der kühnste unter denen, an die man sich wendete, übernahm den Druck, aber nur unter der Bedingung, dass Marie sich verbindlich machte, den Rest der Auflage zurückzunehmen, im Fall sie nicht nach Ablauf einer bestimmten Zeit ganz verkauft wäre. Zu diesem Dienste fügte Marie einen zweiten, für welchen Lagrange nicht weniger erkenntlich war. Er verschaffte ihm einen Herausgeber, der werth war, über den Druck eines solchen Werks die Aufsicht zu führen. Legendre widmete sich ganz der schwierigen Correctur und fand sich dafür in seinem Gefühle der Verehrung für den Verfasser, die ihn durchdrang, und durch den Dank belohnt, den ihm Lagrange in einem Briefe sagte, welchen ich in Händen gehabt habe, und der voll von Ausdrücken der Hochachtung und Erkenntlichkeit ist.

Das Buch war noch nicht erschienen, als Lagrange selbst seinen Wohnort nach Paris verlegte. Mehrere Gründe bestimmten ihn dazu, aber man muss nicht alle glauben, die angegeben zu werden pflegen.

Friedrichs Tod hatte in Preussen grosse Veränderungen hervorgebracht und liess noch grössere fürchten. Die Gelehrten fanden dort nicht mehr die bisherige Achtung; es war also sehr natürlich, dass sich in Lagrange von Neuem jener Wunsch regte, der ihn schon einmal nach Paris gezogen hatte. Dieses, nebst dem Drucke der Mechanik, waren hinreichende Beweggründe. Es war kein dritter, von der Art, wie ihn mehrere in Deutschland erschienene Flugschriften, besonders die geheime Geschichte des Berliner Hofes, erzählen, nöthig. Nie, während seines fünf und zwanzigjährigen Aufenthalts in Frankreich, haben wir von Lagrange die mindeste Klage über den Minister gehört, den man beschuldigt hat, ihn durch Herabsezzung und Verdriesslichkeiten, die er aus Achtung gegen sich selbst nicht habe ertragen dürfen, erzürnt zu haben. Man könnte zwar glauben, dass Lagrange grossmüthig genug gewesen sey, ein Unrecht zu vergessen, oder zu verzeihen, für welches wirklich die einzige, seiner würdige Vergeltung, die gewesen wäre, ein Land

zu verlassen, wo sein Verdienst verkannt wurde. Aber er ist deshalb geradezu durch ein Mitglied des Instituts (Herrn Burckhard) befragt worden und hat die Frage durchaus verneinend beantwortet. Er hat keine Ursach seines Abgehens weiter angegeben, als das Missgeschick, welches man für Preussen nahe hielt. Herzberg war tod, Lagrange war jetzt Graf und Senator von Frankreich, und hatte also kein Interesse die Wahrheit zu verschweigen. Also dürfen wir seiner Versicherung glauben.

Der Geschichtschreiber, dessen wir oben erwähnten, ist also nicht wohl unterrichtet gewesen. Der Geist der Verläumdung und Satyre, welcher sein Werk mit so vielem Recht verdächtig macht, soll uns indessen nicht abhalten, die Stelle herzusetzen, in welcher er, mit der ihm eigenen Kraft, seine Meinung sagt, die die Meinung von Europa ist, wenn es Lagrange Gerechtigkeit widerfahren lassen will *).

„Es scheint mir“ dies sind seine Worte, „dass jetzt hier eine des Königs von Frankreich „würdige Erwerbung zu machen ist. Der be„rühmte Lagrange, der grösste Mathematiker „seit Newton, ein Mann der mich, in jeder

*) Geheime Geschichte des Berliner Hofes. 1789. Zweiter Band, S. 173. seq.

„Rücksicht, durch seinen Geist und Genie in „Erstaunen gesetzt hat, Lagrange, der klügste „und vielleicht der einzige wahrhaft practische „Philosoph den es jemals gab, achtbar durch „seine nie wankende Klugheit, durch seine Sit- „ten, seinen Lebenswandel, mit einem Worte: „der Gegenstand der zärtlichsten Verehrung der „kleinen Zahl von Männern, denen er zugäng- „lich ist, Lagrange ist unzufrieden! Alles treibt „ihn, ein Land zu verlassen, wo nichts das Ver- „brechen abbüsst ein Fremder zu seyn, und wo „er es nicht ertragen mag, gleichsam nur „geduldet zu werden...... Der Fürst Car- „dito de Caffredo, neapolitanischer Mini- „ster zu Copenhagen, hat ihm von Seiten sei- „nes Souverains die schönsten Anerbietungen ge- „macht; der Grossherzog, der König von Sar- „dinien laden ihn dringend ein. Aber alle ihre „Vorschläge werden leicht über die unsrigen „vergessen werden..... Ich hänge sehr an „dieser Idee, weil ich sie für gut halte, und „weil ich den Mann, den sie zum Gegenstand „hat, zärtlich liebe.... Ich habe bewirkt, dass „Lagrange seinen Entschluss auf die Vor- „schläge die ihm gemacht sind, aufschiebt, um „die unsrigen zu erwarten. Ich habe vergessen, „Ihnen zu sagen, dass der Gesandte (von Frank-

„reich) auf mein Bitten Herrn von Vergennes „vorgeschlagen hat, Lagrange zu berufen.“

Unser Schriftsteller scheint die Weigerung des Herrn von Breteuil zu fürchten, und, nach Lagrange selbst, war es der Abt Marie, der ihn Herrn von Breteuil vorschlug; dieser Minister, welcher bei jeder Gelegenheit den Wünschen der Academie der Wissenschaften zuvorkam, nahm die Bitte an und liess sie von dem Könige Ludwig XVI. genehmigen.

Friedrichs Nachfolger, obgleich er sich nur mittelmässig für die Wissenschaften interessirte, machte einige Schwierigkeiten, einen Gelehrten, den sein Vorfahr berufen und mit seiner besondern Achtung beehrt hatte, reisen zu lassen. Nach einigen Bemühungen erhielt indessen Lagrange, dass man sich seiner Abreise nicht widersetze. Man machte ihm zur Bedingung, dass er der Berliner Academie noch einige Memoiren liefere. Die Bände von 1792, 1793 und 1803 beweisen, dass er sein Versprechen gehalten hat.

Es war im Jahre 1787, als Lagrange nach Paris kam, um in der Academie der Wissenschaften, deren *auswärtiges Mitglied* er schon seit funfzehn Jahren gewesen war, Platz zu nehmen. Damit er in den Sitzungen eine Stimme erhalte, veränderte man seinen Titel in *pension-*

naire vétéran. Seine neue Collegen bezeigten sich um die Wette glücklich und stolz, ihn zu besitzen. *Die Königin nahm ihn mit Wohlwollen auf; sie betrachtete ihn als Deutschen; er war ihr von Wien aus empfohlen. Man gab ihm eine Wohnung im Louvre. Dort lebte er recht glücklich, bis zur Revolution.* Man bemerkte äusserlich seine Behaglichkeit wenig. Stets freundlich und gut, wenn man ihn fragte, war er wenig gesprächig, schien zerstreut und schwermüthig. Ich habe ihn öfters, in Gesellschaften die nach seinem Geschmacke seyn mussten, mitten unter den Gelehrten, die er von so fern her aufgesucht hatte, unter den ausgezeichnetesten Männern aller Länder, die sich wöchentlich bei dem berühmten Lavoisier versammelten, wie träumend am Fenster stehen sehen, wo Nichts war was seine Blicke fesseln konnte; er nahm an Allem, was um ihn her gesprochen wurde, keinen Theil; er gestand selbst, dass sein Enthusiasmus erloschen sey; dass er den Geschmack an mathematische Untersuchungen verloren habe. Hörte er, dass sich ein Mathematiker mit dieser oder jener Arbeit beschäftigte, so sagte er „desto besser; ich hatte sie angefangen und erspare nun die Vollendung." Aber dieser denkende Kopf konnte höchstens den Gegenstand seiner Nachforschungen verändern. Die Metaphysik, die

Geschichte des menschlichen Geistes und die Geschichte der verschiedenen Religionen, die allgemeine Theorie der Sprachen, die Medicin, die Botanik, theilten sich in seine Musse. Fiel die Unterhaltung auf Gegenstände die man ihm ganz fremd glauben musste, so wurde man öfters überrascht von einer unerwarteten Bemerkung, einem scharfsinnigen Gedanken und einer tiefen, langes Nachdenken verrathenden, Einsicht. Umgeben von Chemikern, die die ganze Theorie ihrer Wissenschaft, selbst bis auf die Sprache, umwarfen, studirte er ihre Entdeckungen, die die bisher isolirten und unerklärbaren Erscheinungen in einen Zusammenhang brachten, dem ähnlich, welchen die verschiedenen Theile der Mathematik haben; er eignete sich mit Vergnügen Kenntnisse an, die ihm früher so ungemein dunkel geschienen hatten, und die nun *so leicht wie die Algebra* geworden waren. Man ist über diesen Vergleich verwundert gewesen, und hat geglaubt, dass er nur Lagrange habe in den Sinn kommen können. Uns scheint er eben so einfach als richtig, nur muss man ihn in seinem wahren Sinne nehmen. Die Algebra, welche so viele unauflösliche Aufgaben und so viel Schwierigkeiten hat, gegen welche Lagrange's Anstrengungen selbst nichts vermochten, konnte ihm unmöglich leicht scheinen; aber er verglich mit

den *Elementen* der Algebra, die *Elemente* der Chemie; diese neuen Elemente machten ein Ganzes aus, sie waren verständlich und der Strenge fähig, sie glichen denen der Algebra, die, so weit sie im Reinen sind, Nichts haben was schwer zu begreifen wäre, keine Wahrheit zu der man nicht durch eine Reihe der offenbarsten und evidentesten Schlüsse gelangte. Der Eingang in die Wissenschaft der Chemie schien ihm eben diese Vorzüge zu haben, obgleich vielleicht etwas weniger Gewissheit und Festigkeit als die Algebra. Auch sie hat ohne Zweifel ihre Schwierigkeiten, ihre Paradoxen, die sich nur mit vielem Scharfsinn, Nachdenken und Zeit lösen lösen lassen; auch sie wird ihre, für immer unauflösliche Aufgaben haben.

In solcher philosophischen Ruhe lebte er bis zur Revolution ohne seine mathematischen Entdeckungen fortzusetzen, selbst ohne ein einziges Mal seine analytische Mechanik anzusehen, die unterdessen seit zwei Jahren erschienen war.

Die Revolution gab den Gelehrten Gelegenheit zu einer grossen und schwierigen Neuerung, nemlich der Einführung des auf die Natur selbst gegründeten, und unsern Zahlen nachgebildeten metrischen Systems. Lagrange war bei dieser Arbeit einer der Commissarien der Academie; er war einer der eifrigsten Beförderer des neuen

Systems;

Systems; er wollte das Decimal-System in seiner ganzen Reinheit haben; er konnte es Borda nicht verzeihen, dass dieser die Gefälligkeit gehabt hatte, Viertel-Meter machen zu lassen. Er legte auf den Einwand dass die Basis des Decimal-Systems so wenige Theiler habe, keinen Werth. Er bedauerte beinahe, dass sie keine Primzahl sey, wie 11, weil dann nothwendig alle Brüche einerley Nenner bekommen hätten. Man kann Dieses, wenn man will, für eine Uebertreibung halten, die wohl dem besten Kopfe im Eifer des Streits begegnet; aber er führte die Zahl 11 nur an, um die Zahl 12 abzuwehren, welche die kühneren Neuerer statt der 10 einführen wollten, die überall die Basis des Zahlensystems ist.

Nach Aufhebung der Academieen behielt man einstweilen noch die mit der Einführung des neuen Systems beauftragten Commissarien bey. Kaum waren drei Monate verflossen, als man, um diese Commission zu *reinigen*, die Namen Lavoisier, Borda, Laplace, Coulomb, Brisson und den Namen des Astronomen, der in Frankreich operirte, von ihrer Liste strich. Lagrange wurde beibehalten. Als Präsident kündigte er mir in einem langen und sehr gütigen Briefe an, dass ich die amtliche Anzeige von meiner Absetzung erhalten würde. Bei mei-

ner Rückkehr bezeugte er mir sein Bedauern über die Entfernung so vieler Collegen.

„Ich weiss nicht“ sagte er, „warum sie *mich* beibehalten haben.“ Sollte aber die Reduction nicht allgemeiner seyn, so war es wohl schwer, dass sie sich bis auf ihn erstreckte. Je grösser die Verluste der Commission waren, um so mehr war es ihnen wichtig, nicht die Achtung zu verlieren, die man für den Namen Lagrange hegte. Man wusste übrigens, dass er nur allein den Wissenschaften lebe; er bekleidete keine Stelle, weder in der bürgerlichen Gesellschaft, noch in der Administration; die Sanftheit seines Characters machte es ihm möglich, zu unterdrücken, was er insgeheim zu denken sich nicht wehren konnte. Nie werde ich eine damalige Unterredung mit ihm vergessen. Es war den Tag nach dem Ausspruch jenes barbarischen und absurden Urtheils, das Jeden, der nur noch irgend ein Gefühl von Gerechtigkeit hatte, empörte, und die Wissenschaften durch die Hinrichtung eines der grössten Naturforscher Europas in Trauer versetzte. „Sie haben nur einen Augenblick gebraucht“ sagte er, „um diesen Kopf fallen zu machen, und hundert Jahre vielleicht werden nicht hinreichen, einen ähnlichen hervorzubringen.“ Wir seufzten gemeinschaftlich über die traurigen Folgen des gefähr-

lichen Versuchs, den Frankreich gemacht hatte. Kurze Zeit vorher hatten wir eine ähnliche Unterredung, bei Gelegenheit der Verurtheilung des unglücklichen Bailly in Lavoisiers Zimmer. Alle diese thörichten Verbesserungs-Projecte schienen ihm sehr zweifelhafte Beweise von der Grösse des menschlichen Verstandes. „Wollt ihr ihn wahrhaft gross sehen“ sagte er, „so tretet zu Newton hin und sehet ihn den Lichtstrahl spalten und das Weltsystem erforschen.“

Schon lange bedauerte er, dem Rathe seiner Freunde nicht gefolgt zu seyn, die ihm, seit dem Anfange unserer Unruhen, angelegen hatten, irgendwo einen Zufluchtsort zu suchen, den er so leicht gefunden hätte. So lange die Revolution nur etwa die Besoldung zu bedrohen schien, die er in Frankreich erhielt, hatte er jenes Rathes nicht geachtet, um die grosse Erschütterung, die man immer klüger von fern beobachtet, nahebei zu sehen. Du hast es so gewollt, sagte er zu sich selbst, indem er mir gestand, dass es ihm leid thue. Vergebens hatte ein, von Dusejour eigends der constituirenden Versammlung vorgeschlagenes, Decret ihm die Auszahlung seines Gehalt zugesichert. Vergebens hielt man ihm auch Wort; das Fallen des Papier-Geldes lösete das Decret in Nichts auf. Er war zum Mitgliede der Commission zur Prüfung und Er-

munterung nützlicher Erfindungen ernannt worden. Man hatte ihn zu einem der Münz-Administratoren gemacht; aber ein solches Geschäft war wenig geeignet, seine Aufmerksamkeit zu fesseln und seine Besorgnisse zu zerstreuen. Man wollte ihn von Neuem nach Berlin ziehen und ihm seine dortige Stelle wiedergeben, er hatte schon eingewilligt. Héraut de Séchelles, an welchen er sich wegen der Pässe wandte, bot ihm, zu mehrerer Sicherheit, einen Auftrag nach Preussen an. Er konnte sich aber nicht entschliessen, sein Vaterland zu verlassen; dieses widerstrebende Gefühl, welches er damals für ein Uebel hielt, wurde hernach für ihn eine Quelle des Glücks und der Ehre.

Die Normal-Schule, bei welcher er zum Lehrer ernannt wurde, die aber nur eine sehr vorübergehende Existenz hatte, liess ihm kaum erst Zeit, ihr seine Ansichten über die Gründe der Arithmetik, der Algebra und der Anwendungen derselben auf die Geometrie vorzutragen.

Die polytechnische Schule, aus einer glücklichern Idee entstanden, war dauernder, und man kann unter das Beste was sie geleistet hat rechnen, dass sie Lagrange der Analysis wiedergab. Hier war es, wo er Gelegenheit fand, diejenigen Ideen weiter zu entwickeln, deren Keime in einem Memoire von 1772 liegen, und die die

wahre Metaphysik des Integral-Calculs zum Gegenstande haben. Um Lagrange zu hören, oder vielmehr, diese glücklichen Entwickelungen mit zu geniessen, sahe man, wie sich die Lehrer unter ihre jungen Schüler mischten. Hier war es, *wo seine Theorie der analytischen Functionen und die Vorlesungen über den Functions-Calcul* entstanden, von welchen mehrere Auflagen erschienen sind. *Wer im Stande war diesen interessantem Vorlesungen zu folgen,* sagte einer der Professoren (Lacroix), *hat das ungemeine Vergnügen gehabt, Lagrange, unter den Augen seiner Zuhörer, beinahe seine ganze Theorie gleichsam neu erschaffen zu sehen. Er wird kostbare Notizen für die Geschichte der Wissenschaft besitzen, die, als Beispiele vom Gange des Genies bei den Erfindungen in der Analysis, werden gesammelt werden.*

Um diese Zeit war es auch, als er seine Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen, mit Bemerkungen über Mehreres aus der Theorie der algebraischen Gleichungen, herausgab.

Man sagt, Archimedes, der seinen Ruhm, wenigstens in der Geschichte, vorzüglich seinen Maschinen, und besonders denen, die die Einnahme von Syracus verzögerten, verdankt, habe

seine mechanischen Erfindungen, über welche er Nichts schrieb, selbst nicht geachtet, sondern nur auf seine rein theoretischen Werke Werth gelegt. Es scheint, dass unsere grossen Mathematiker hierin Archimedes gleichen. Sie betrachten eine Aufgabe als aufgelöset, sobald sie keine analytische Schwierigkeiten mehr hat, sobald sie nur noch Differentiationen, Substitutionen und Reductionen erfordert, zu welchen allerdings nichts weiter als Geduld und eine gewisse Geschicklichkeit gehört; sie sind zufrieden, wenn sie die wesentlichern Schwierigkeiten überwunden haben, und bekümmern sich wenig um die Schwierigkeit, die für den Rechner übrig bleibt, oder um die Mühe der Anwendung ihrer Formeln, selbst, wenn man dieselben nach den Umständen abgekürzt hat. Auch Lagrange dachte zuweilen so. Er wünschte öfters, dass analytische Untersuchungen ermuntert werden möchten, und, selbst wenn er gewöhnliche Rechnungen zu erleichtern beabsichtigte, ist es doch immer nur vorzüglich die Analysis, die er vervollkommnet.

Die allgemeine Auflösung algebraischer Gleichungen ist Schwierigkeiten unterworfen, die man für unübersteiglich hielt; in der Ausübung aber führt jede bestimmte Aufgabe auf eine Gleichung, deren Coefficienten Zahlen sind; es

würde also hinreichend sein, ein sicheres Mittel zu haben, um alle Wurzeln solcher Gleichungen, die man numerische nennt, zu finden. [*nemlich dann, wenn die Gleichung das letzte Resultat der Aufgabe ist; ist sie es nicht, so fehlt immer noch der allgemeine Ausdruck der Wurzeln.*] Diesen Gegenstand nimmt Lagrange vor; er zergliedert die bekannten Methoden und zeigt ihre Unsicherheit und Unzulänglichkeit. Er bringt die Aufgabe darauf, eine Grösse zu finden, die kleiner ist als der kleinste Unterschied der Wurzeln. Das ist sehr Viel. Man kann die analytische Kunst, die überall aus diesem Werke hervorleuchtet, nicht genung bewundern; aber, ungeachtet aller Hülfsquellen des Lagrangischen Genies, ist doch nicht zu leugnen, dass die Rechnung noch ein wenig weitläuftig ist, und dass die Rechner wahrscheinlich dennoch, bei ihren weniger directen aber schneller zum Ziele führenden Methoden bleiben werden. Viermal ist Lagrange auf diesen Gegenstand zurückgekommen. Es scheint, dass eine bequeme und allgemeine Auflösung für immer unmöglich seyn wird, oder dass sie wenigstens auf ganz anderm Wege gesucht werden muss. Der Verfasser scheint Dies auch gefühlt zu haben, als er die Budansche Methode *als die leichteste und eleganteste zur Auflösung aller*

Gleichungen, deren Wurzeln alle reel sind; empfahl.

Der Wunsch, die Anwendungen seiner analytischen Mechanik zu befördern, veranlasste ihn zu einer neuen Auflage derselben; er hatte dabei die Absicht, die gewöhnlichsten Theile derselben weiter zu entwickeln. Er arbeitete hieran mit allem Eifer und aller Geistesanstrengung seiner besten Zeit. Aber diese Anstrengung erschöpfte ihn, und zuweilen bis zur Ohnmacht. Madame Lagrange fand ihn einst in einem solchen Zustande. Er hatte im Fallen mit dem Kopfe gegen ein Meubel gestossen, und selbst der Stoss hatte ihn nicht zur Besinnung gebracht. Dies war eine Warnung, sich mehr zu schonen. So betrachtete er es Anfangs; aber die Beendigung des Werks, dessen Druck, mit längerer Unterbrechung, erst im Jahre 1815 vollendet worden ist, lag ihm zu sehr am Herzen. Der erste Band war kurz vor seinem Tode erschienen; diesem Bande folgte eine neue Ausgabe der analytischen Functionen. Eine solche Masse von Arbeiten erschöpfte ihn; gegen Ende des Märzes befiel ihn ein Fieber; der Appetit war verschwunden, der Schlaf war unterbrochen, der Mund trocken, die Ohnmachten wurden beunruhigend, besonders beim Erwachen. Er erkannte die Gefahr, aber er behielt seine Heiterkeit. Er dachte über

das nach, was in ihm vorging, und gleich als wäre er nur Zuschauer einer grossen und seltenen Erfahrung gewesen, richtete er darauf seine ganze Aufmerksamkeit. Seine Bemerkungen sind nicht verloren gegangen.

Am 8. April des Morgens besuchten ihn die Herren Lacepede, Monge und Chaptal, welcher letztere es sich zur angelegentlichsten Pflicht machte, die Hauptzüge der Unterredung, welche die letzte war, aufzuzeichnen. Wir heben sorgfältig das Wichtigste aus. (Die, ohne andere Citation, unterstrichenen Stellen sind wörtlich aus dem Manuscript des Grafen Chaptal genommen.)

Er empfing sie herzlich und gerührt. „*Ich* „*befand mich gestern sehr übel, meine Freun-* „*de,*" sagte er, „*ich glaubte zu sterben*; *mein* „*Körper wurde allmählig immer schwächer,* „*meine moralischen und physischen Kräfte* „*erloschen gleichsam, ich bemerkte, mit Beha-* „*gen, die genaue Stufenfolge der Abnahme* „*meiner Kräfte, und ich gelangte sanft bis zu* „*einem Zustande, wo der Schmerz und die* „*Klage aufhört. O, der Tod ist nicht furcht-* „*bar und wenn er sanft sich naht, ist er eine* „*letzte, nicht schmerzliche und nicht ängsti-* „*gende, Verrichtung.*"

Hierauf theilte er ihnen seine Meinungen vom

Leben mit, dessen Sitz, nach ihm, überall, durch alle Organe der ganzen Maschine verbreitet sey, die, ihm zu Folge, überall zugleich nach einerley Stufenfolge dahinsterben.

„*Einige Augenblicke später fühlte ich al-* „*les Leben aufhören, der Tod war überall,* „*der Tod ist nichts als die absolute Ruhe des* „*Körpers.*“

„*Ich wollte sterben*“ fügte er bewegter hinzu, „*ja ich wollte es recht gerne, aber meine* „*Frau wollte es nicht; ich hätte sie in diesem* „*Augenblick weniger zärtlich, weniger bemüht* „*meine Kräfte zu erwecken, gewünscht, hätte* „*gewünscht, dass sie mich sanft scheiden liesse.* „*Meine Laufbahn ist zu Ende. Ich habe ei-* „*nigen wissenschaftlichen Ruf erlangt. Ich* „*habe Niemand gehasst, ich habe nichts Bö-* „*ses gethan und glaube wohl zu enden; aber* „*meine Frau hat es nicht gewollt.*“

Da er sehr angegriffen war, besonders durch die letzten Worte, so wollten sich seine Freunde, ungeachtet der grossen Interesse, mit welchem sie ihn hörten, entfernen; aber er begann jetzt von der Geschichte seines Lebens, seiner Arbeiten und ihrer Früchte zu reden, von seinem Aufenthalte in Berlin (wo er, wie er oft sagte, *einen König* in der Nähe gesehen habe) von seiner Rückkunft nach Paris, von der Ruhe die

er dort Anfangs genossen habe, den Besorgnissen die ihm hernach die Revolution gemacht habe, von der ausgezeichneten und unerwarteten Art, wie er dafür, durch einen grössern und mächtigern Fürsten (er hätte sagen können, von einem Manne, der fähiger war ihn zu fassen) entschädigt worden, der ihn mit Ehre und Würden überhäufte, der ihm noch ganz kürzlich das Grosskreuz des Reunions-Ordens geschickt hatte, und der, wie wir hinzufügen können, nachdem er ihm bei seinem Leben die unzweideutigsten Beweise seiner höchsten Achtung gegeben hatte, so eben für seine Wittwe und seinen Bruder mehr that, als jemals Friedrich, während der ganzen Zeit, da Lagrange seine Academie verherrlichte, für ihn selbst gethan hatte. [*Diese Aeusserungen sind vom* 3. *Januar* 1814 *datirt.*]

Lagrange hatte nie nach Ehrenbezeugungen und nach Reichthümern gestrebt, aber er nahm sie mit achtungsvoller Erkenntlichkeit an, und bediente sich ihrer zum Nutzen der Wissenschaften. Er freute sich darauf, sich mit seinen Würden, an der Spitze des Werks, an welches er arbeitete, zu schmücken, um der ganzen Welt zu zeigen, wie Frankreich seine Gelehrten ehrt.

Man sieht aus der letzten Aeusserung, dass er nicht alle Hoffnung der Genesung verloren

hatte; er glaubte blos, sie werde langwierig seyn; er versprach sogar, nach der Rückkehr seiner Kräfte, mit den Herren Grafen Monge und Chaptal, beim Grafen Lacepede zu essen, und ihnen dann über sein Leben und seine Werke noch Mehreres zu erzählen, was sie sonst nirgend fänden. Diese Details sind für immer verloren; wir wissen nicht einmal, was er noch dem zweiten Bande seiner Mechanik, der schon unter der Presse war, hinzufügen wollte und hätte hinzufügen können. (Dieser Band ist seitdem 1816 erschienen.)

Während jener Unterredung, die zwei Stunden dauerte, verliess ihn öfters das Gedächtniss; er bemühte sich vergebens, Namen und Begebenheiten sich zu erinnern, jedoch war seine Rede immer zusammenhängend, voller kräftiger Gedanken und kühner Ausdrücke. Diese Anstrengung seiner Kräfte erschöpfte ihn. Kaum hatten ihn seine Freunde verlassen als er in eine gänzliche Erschlaffung verfiel. Er starb am zweiten Tage darauf, am 10. April, ein Viertel vor zehn Uhr des Morgens.

Lagrange war von zartem aber festem Körperbau; seine Ruhe, seine Mässigkeit, seine strenge und nüchterne Lebensart, von welcher er nur sehr selten abwich, haben sein Leben bis zu einem Alter von sieben und siebenzig Jahren, zwei Monaten

und zehn Tagen gebracht. Er ist zweimal verheirathet gewesen; das erste mal in Berlin, nach dem Beispiel der übrigen Academiker, deren keiner unverheirathet war. Er hatte von Turin eine Verwandte kommen lassen, die er heirathete, und die er nach einer langwierigen Krankheit verlor, in welcher er ihr die zärtlichste, unermüdeteste und aufmerksamste Sorgfalt widmete. Als er hiernächst, in Frankreich, Demoiselle Lemonnier heirathete, sagte er zu uns: „*Ich habe aus meiner ersten Ehe keine Kinder gehabt, ich weiss nicht ob ich deren aus der zweiten Ehe erhalten werde, ich wünsche jetzt keine mehr.*“ Seine Absicht war nur, eine liebenswürdige Gefährtin zu haben, deren Gesellschaft ihm einige Erholung in den Zwischenräumen seiner Arbeiten gewähren könnte, und in dieser Hinsicht blieb ihm nichts zu wünschen übrig. Die Gräfin Lagrange, Tochter, Enkelin und Nichte von Mitgliedern der Academie, war des Namens, den er ihr gab, würdig. Diese Vorzüge hoben in seinen Augen die Ungleichheit ihres Alters; und seine Gefährtin hatte für ihn die zärtlichste Anhänglichkeit. Er war dafür so dankbar, dass er stets nur ungern sie verliess, dass er nur allein ihretwegen mit einigem Widerstreben aus der Welt ging, und dass man ihm oft sagen hörte: von Allem was ihm

Gutes widerfahren, schätze er das am höchsten, dass ihm eine so zärtliche, liebevolle Gefährtin zu Theil geworden. Während seiner zehntägigen Krankheit verliess sie ihn nicht einen Augenblick und wandte alles an, seine Kräfte zu erhalten und sein Daseyn zu verlängern.

Er liebte die Einsamkeit, aber er machte sie keinesweges seiner jungen Frau ebenfalls zur Pflicht; er besuchte also Gesellschaften, und zeigte sich, wo er seinem Range nach erscheinen musste. Sehr oft sahe man deutlich dass er dort seine Forschungen, die er in seinem Zimmer begonnen hatte, fortsetzte: Man sagt, er sey gegen Musik nicht gleichgültig gewesen. In der That war es ihm in zalhreichen Gesellschaft nicht unangenehm, wenn ein Concert die Unterhaltung unterbrach und die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich zog. Ich fragte ihn bei einer solchen Gelegenheit, was er von der Musik halte; „*Ich mag sie gern*“ sagte er, „*weil* „*sie mich isolirt; ich höre die drei ersten Tacte,* „*beim vierten unterscheide ich nichts mehr, ich* „*überlasse mich meinen Gedanken; Nichts unterbricht mich, und ich habe auf diese Weise* „*mehr als eine schwierige Aufgabe gelöset.*“

Obgleich sein Antlitz voller Würde und der Abdruck seines edlen Characters war, so hat er doch niemals zugeben wollen, dass man ihn ab-

bilde; mehr als einmal hat man sich, mit verzeihlicher Geschicklichkeit, heimlich in die Sitzungen der Academie geschlichen, um ihn unbemerkt zu zeichnen. Ein von der Turiner Academie gesandter Künstler zeichnete auf diese Weise die Skizze, nach welcher die Büste verfertigt worden ist, die mehrere Monate in unserm Privat-Sitzungs Saale ausgestellt war, und die jetzt unsere Bibliothek schmückt. Seine Züge sind nach seinem Tode abgeformt worden; auch früher, wenn er schlummerte. Die danach gemachte Zeichnung wird für sehr ähnlich gehalten.

In der Unterhaltung sanft und beinahe schüchtern, liebte er besonders, Andere zu fragen, entweder um die Befragten gelten zu machen, oder die Früchte ihres Nachdenkens seinen weitumfassenden Kenntnissen hinzuzufügen. Wenn er sprach, so geschah es im Tone des Zweifels, und seine Rede begann gewöhnlich mit einem: „*ich weiss nicht.*" Er ehrte eines Jeden Meinung und war weit entfernt, die Seinigen als Regeln aufzustellen. Allein es war deshalb nicht leicht, ihn zur Aenderung seiner Meinung zu bringen. Er vertheidigte sie zuweilen mit einer Wärme, die so lange stieg, bis er an sich selbst die Bewegung bemerkte; dann kehrte seine gewöhnliche Ruhe zurück. Einst, nach einem solchen

Streite, als Lagrange fortgegangen und Borda mit mir allein geblieben war, entschlüpften diesem die Worte: „*Es thut mir Leid, das von einem Manne wie Lagrange sagen zu müssen, aber wahr ist es: ich kenne nichts Eigensinnigeres.*“ Wäre Borda zuerst weggegangen, so hätte Lagrange wahrscheinlich, von seinem Collegen, der ein Mann von Verstand und vielem Geist war, und der, wie Lagrange, nicht gern die Ueberzeugung aufgab, die er nur nach reifer Prüfung gefasst hatte, das Nemliche gesagt.

Zuweilen bemerkte man in seinem Tone eine leichte und sanfte Ironie, deren Sinn sich nicht wohl missverstehen liess, die ich aber nie Jemand habe beleidigen sehen. So sagte er einst zu mir: diese Astronomen sind sonderbar, sie wollen nicht an eine Theorie glauben, wenn sie nicht zu ihren Beobachtungen passt. Was diese Bemerkung veranlasst hatte, und die Miene mit der er sie machte, und die den wahren Sinn so wohl bezeichnete, machte, dass ich die Astronomen nicht in Schutz nehmen zu können glaubte.

Unter so vielen Meisterwerken, die wir seinem Talente verdanken, ist seine Mechanik unwidersprechlich das grösste, merkwürdigste und wichtigste. Die analytischen Functionen nehmen

nur

nur den zweiten Rang ein, ungeachtet der Fruchtbarkeit der Hauptidee und der Sicherheit der Entwickelungen. Eine weniger bequeme Bezeichnung, und obgleich klarere, so doch beschwerlichere Rechnung, werden wahrscheinlich die Geometer abhalten, ausser in schwierigen und zweifelhaften Fällen, seine Zeichen und Benennungen anzuwenden [*aber doch auch wohl nur die Zeichen und Namen, nicht die Ideen selbst, die Lagrange zuerst an die Stelle des leeren, jeden Augenblick der Gefahr der Täuschung und des Irrthums ausgesetzten, Spieles mit dem, keiner Klarheit fähigen Begriff des Unendlichen, setzte. Eine, selbst bloss eingebildete, Bequemlichkeit kann unmöglich mehr werth seyn, als strenge Ueberzeugung und Wahrheit.*] Es ist hinreichend, dass Lagrange die Mathematiker über die Legitimität der behendern Methode des Differential- und Integral-Calculs beruhigt hat, [*das hat Lagrange wohl nicht gethan. Es kann auch schwerlich allgemein geschehen, sondern nur für jeden einzelnen Fall besonders, und dann tritt die richtige Methode selbst, an die Stelle der illusorischen, und die letzte verdient weiter keine Rücksicht.*] Er selbst hat sich wieder der gewöhnlichen Bezeichnung in der zweiten Ausgabe seiner Mechanik bedient, [*wahrscheinlich deshalb;*

weil durch seine Methode die Legitimität der alten, hier noch nicht erwiesen war und dieses ihm noch zu thun übrig blieb.]

Dieses grosse Werk ist ganz auf die Variations-Rechnung gegründet, deren Erfinder er ist. Alles beruht auf einer einzigen Formel und auf einem, zwar lange vor ihm schon bekannten Grundsatze, dessen grossen Nutzen zu ahnden man aber weit entfernt war. Diese erhabene Composition vereinigt übrigens in sich alle seine vorherigen, auf diesen Gegenstand sich beziehenden Arbeiten; sie zeichnet sich durch den philosophischen Geist aus, der darin von Anfang bis zu Ende herrscht. Zugleich ist sie die beste Geschichte dieses Theils der Wissenschaft; eine Geschichte, wie sie nur von einem Manne geschrieben werden konnte, der seinen Gegenstand so ganz umfasste, und der allen seinen Vorgängern, deren Werke er zergliedert, überlegen ist. Sie gewährt eine Lectüre vom höchsten Interesse, selbst für Denjenigen, der nicht im Stande ist, allen Details des Calculs zu folgen. Ein solcher Leser bemerkt wenigstens den innigen Zusammenhang aller der Grundsätze, auf welche die grössten Geometer ihre Untersuchungen in der Mechanik gebaut haben. Er findet das geometrische Gesetz der Bewegung der Himmelskörper aus einfachen mechanischen und analy-

tischen Betrachtungen hergeleitet. Von dieser Aufgabe, das Weltsystem, wie es ist, dem Calcul zu unterwerfen, geht der Verfasser zu der schwierigern und verwickeltern Aufgabe über, die eine andere Ordnung der Dinge voraussetzt. Dergleichen Untersuchungen sind zwar blos Gegenstände der Neugier, welches auch der Verfasser bemerkt, aber sie zeigen den ganzen Umfang seiner Kräfte. Man findet darin ferner, seine neue Theorie der Veränderung der willkührlichen Constanten bei der Planeten-Bewegung, die so viel Aufsehen in den Memoiren des Instituts gemacht, und an welcher ihr Verfasser gezeigt hatte, dass er im fünf und siebenzigsten Jahre noch nicht von der hohen Stufe herabgestiegen sey, die er, nach dem Eingeständniss aller Mathematiker, so lange Zeit einnahm. [*Die analytische Mechanik steht unstreitig so hoch über den jetzigen Standpunkt des mathematischen Wissens, in so weit es allgemein verbreitet ist, dass ihre volle Würdigung und Benutzung erst einer späteren Zeit aufbehalten zu bleiben scheint.*]

Ueberall, wo er in seinen Schriften einen wichtigen Satz aufstellt, giebt er jederzeit dessen ersten Erfinder die Ehre.

Berichtigt er die Ideen eines Vorgängers oder Zeitgenossen, so geschiehet es mit aller dem

Genie gebührenden Achtung. Zeigt er den Irrthum Derer, die ihn angriffen, so geschieht es mit dem Gleichmuth (*impassibilité*) eines wahren Mathematikers, und der Ruhe eines Demonstrators. Keiner seiner berühmten Nebenbuhler hatte wohl scharfsinnigere, treffendere, allgemeinere und tiefere Ideen; und endlich, Dank sey es seinen glücklichen Bemühungen! die Mathematik gleicht jetzt einem weiten und herrlichen Pallaste, dessen Fundament er befestigt und dessen Gipfel er geschlossen hat, und in welchem man keinen Schritt thun kann, ohne, bewundernd, Spuren seines Talents zu finden.

Notizen von Guyton Morveau.

Lagrange wurde am 21. März 1792, nebst Berthollet und Mongez, zum Münzadministrator ernannt. Die nemliche Stelle hat Cicero, unter dem Namen des *quartum vir monetarius*, bekleidet. Newton hat dreissig Jahre lang die Functionen des ersten Beamten der Londoner Münze verrichtet. Dieser Dienst erforderte, als Lagrange ernannt wurde, wenig Arbeit. Aber Alles was ihn von seinen tiefen Forschungen abzog, war ihm unerträglich. Er nahm nach sechs Monaten den Abschied.

Robespierre decretirte: alle Fremde, ohne Ausnahme, sollten Frankreich verlassen. „Die Maassregel" sagte er, „kann einige Philosophen und Freunde des Menschengeschlechts treffen, aber diese Raçe ist sehr selten." Man sehe den Moniteur vom 25sten *Vendemiaire* des zweiten Jahres (16. October 1793). Lagrange fragte, erschrocken, Guyton um Rath, welcher ihm sagte, dass ein späteres Decret den Wohlfarths-

Ausschuss ermächtige, diejenigen Edelleute und Fremde, deren Beibehaltung in ihren Stellen er nützlich erachten würde, *in Requisition zu sezzen.* Guyton bat ihn, an den Ausschuss zu schreiben, aber Lagrange weigerte den kleinsten Schritt. Er wollte lieber den Ausgang erwarten. Glücklicherweise fiel es Guyton ein, ihn daran zu erinnern, dass er ihn früher von Seiten des Wohlfarths-Ausschusses ersucht habe, Huttons Lehrbuch der Artillerie zu prüfen. Lagrange willigte ein, an Guyton, als Mitglied des Ausschusses, zu schreiben, und ihn zu fragen: ob er unter diesen Umständen das Werk zurückschicken, oder mit der Prüfung fortfahren solle. Zwei Stunden darauf brachte ihm Guyton den Befehl des Ausschusses, der ihn requirirte, die übernommenen Rechnungen über die Theorie der Wurflinieen fortzusetzen.

In einem Briefe vom 12. *Ventose* des folgenden Jahres (2. März 1797), äussert sich Lagrange über das Huttonsche Werk, in folgenden Worten: „Dieses Buch reitzt meine Neu- „gier, weil die Versuche sehr genau zu seyn „scheinen, und wenigstens *der Verfasser* zu „allgemeinen Resultaten gelangt ist. Besonders „wünsche ich zu sehen, was er über die Länge „der Geschütze gefunden hat. Das ist der Punkt

„welchen Darcy untersuchen wollte, worüber er „aber nichts Entschiedenes finden konnte."

In einem andern Briefe sagt er: „Ich be-„schäftige mich, die Versuche Huttons zu prü-„fen, und zu sehen, in wie fern sie mit einer „genauern Theorie als die des Verfassers, ver-„einbar sind."

Guyton hatte ihm auf einige Stunden das Chladnische Werk geliehen. Beim Zurücksenden schrieb ihm Lagrange: „Ich will ver-„suchen, es mir zu verschaffen, um es mit Musse „zu studiren, und zu sehen, ob sich diese Ver-„suche auf eine Art von Theorie bringen las-„sen. Die auf den kreissförmigen Scheiben sich „bildenden Linien, welche durch die Gestalt „bestimmt werden, die der Sand, womit man „die Scheiben bedeckt, ehe man sie mit dem „Bogen streicht, annimmt, sind eben so wie Ru-„heorte in den harmonischen Tönen der Vio-„line und der Trompete; aber der Zusammen-„hang dieser Linien mit den zugehörigen Tö-„nen ist eine eben so sonderbare, als, theore-„tisch, schwer zu erklärende Erscheinung."

Auszug

aus einer kleinen Schrift der Aerzte Virey und Potel über das Leben und den Tod Lagrange's.

(Précis historique sur la vie et la mort de Joseph-Louis Lagrange. Paris chez Mme. Vve. Courcier. 1813.*)*

Lagrange war am 30. Januar 1736 zu Turin geboren. [*Delambre sagt oben: am* 25. *Januar* 1736. *Es ist sonderbar, dass der Tag der Geburt berühmter Menschen öfters zweifelhaft ist.*] Seine Vorfahren stammten, wie die von Descartes, aus der Touraine. Sein Grossvater, nachdem er unter Ludwig dem Vierzehnten im Kriege gedient hatte, liess sich in Piemont nieder. [*Dieser scheint der nemliche zu seyn, der, nach Delambre, Lagrange's Urgrossvater war.*] Sein Vater lebte dort 84 Jahre. J. L. Lagrange, welcher der Erstgeborne von eilf Geschwistern war, überlebte, nebst dem Letztgebornen, alle Uebrige. Von frühester Jugend an, lebte er nur für das Studium, aber nicht gleich von Anfang fesselte ihn die Mathematik; er schien sie selbst zu verkennen,

und nur für literarische Kenntnisse empfänglich. Nur in der Philosophie zeigte er Eifer für diejenigen Wissenschaften, die die Bestimmung seines Lebens ausmachen sollten. Bald nahm er aber jenen Schwung, den er späterhin anzurathen pflegte, wenn man ihn fragte wie am besten die Mathematik zu studiren sey. „Man muss sie“ sagte er, „in ihren grössten Schwierigkeiten ergründen.“ In der That eine vortreffliche Methode, um kräftige Köpfe zu bilden! aber zurückschreckend für die schwachen und unfähigen. Lagrange's Genie reifte früh, denn im funfzehnten Jahre lehrte er schon in einer Artillerie Schule die Mathematik, vor Schülern, die alle älter waren als er. Man sieht leicht, dass eine solche Anstrengung im Denken und Arbeiten, die Entwickelung seiner körperlichen Kräfte hindern musste. Er war damals sehr schlank, hager und bleich, obgleich späterhin seine Figur die gewöhnliche Grösse und gute Verhältnisse erhielt.

Im zwanzigsten oder zwei und zwanzigsten Jahre legte er den ersten Grund zu seinem Ruhme; er wurde mit dem Chevalier Saluce und Cigna der Stifter der Königl. Academie der Wissenschaften zu Turin, so wie Leibnitz der Stifter der Berliner Academie war. In diesem Alter ist es, wo sich, nach Montagnes Aus-

druck, die Köpfe entfalten; auch Newton machte im vier und zwanzigsten Jahre, nach Barrows Zeugniss, seine grossen Entdeckungen.

Wenn unser Wissen nichts anders als eine Reihe von Erinnerungen ist, wie ein Philosoph des Alterthums (Plato) meint, so gilt dies ganz besonders von der Mathematik, wo sich eine Wahrheit an die andere reiht. Lagrange hatte gleichsam eine Vorempfindung seiner spätern Entdeckungen. Er sagte: er habe sie im Keime in sich getragen. Es scheint, dass das Genie bestimmt ist, ein gewisses Maass jener herrlichen Geistesfrüchte zu tragen, oder man möchte es vielmehr als das Werkzeug einer höhern Natur betrachten, das bestimmt ist, unserm Blicke einige der leuchtenden Strahlen jener tiefern Weisheit zu enthüllen, die das Weltall regiert.

Grosse Anstrengungen der Denkkraft sind nicht ohne Einfluss auf den Körper. In zu früher Jugend untergruben sie bei Pascal die Lebenskraft und verkürzten seine Tage. Lagrange war in sich zurückgezogen und verschlossen geworden; er arbeitete unaufhörlich mit dem Kopfe, und durchdachte seine Werke, ehe er sie niederschrieb, so vollständig, dass er in seinen Manuscripten fast niemals Etwas änderte. Seine Werke gingen so vollendet aus ihm hervor, wie die Dichter Minerven, völlig gerüstet, aus Jupiters

Haupt entspringen lassen. In frühern Jahren versetzte die ungemein heftige Anstrengung des Kopfs Lagrange öfters in einen fieberischen Zustand. Von daher schrieb sich auch die Unregelmässigkeit seines Pulses, die er bis zu seinem Ende behielt. Descartes verfiel im vier und zwanzigsten Jahre, aus der nemlichen Ursach, in Schwärmerey (*enthusiasme*). (Man sehe seine Lebensbeschreibung von A. Baillet. Paris 1691. 4° 2. Band, 1stes Capitel S. 81. Es war im Herbst, im November; dieser Gelehrte war von melancolischem und nerveusem Temperament.)

Nachdem Lagrange seine berühmte Methode der Grössten und Kleinsten entdeckt und davon neue, von seinen Untersuchungen über die Fortpflanzung des Schalles unabhängige, Anwendungen auf die Dynamik gemacht hatte, (*miscellanea philosophico-mathematica. Taurini* 1759, 4° und in dem zweiten Bande dieser vermischten Schriften) bekam er im 25sten Jahre, gegen das Ende des Winters, einen Anfall von Hypochondrie. Auch zeigten sich Gallenübel. Bekanntlich ist diese Krankheit vorzüglich einer denkenden und sitzenden Lebensweise und dem tiefen Studium eigen; sie ist gewöhnlich mit jenen andern Zufällen begleitet. Sie entschied Lagrange's Temperament. Es wurde völlig nerveus und melancolisch, wie ge-

wöhnlich bei allen, in einer Wissenschaft oder Kunst, ausgezeichneten Menschen. (Diese Bemerkung macht schon Aristoteles *problem. sect.* XXX. *art.* 2. Bei den Neuern findet man eine Menge Beispiele. Wir wollen blos einige Mathematiker nennen: Galilei, Jacob und Johann Bernouilli, Pascal, J. D. Cassini, Huyghens, Newton etc. waren es von Natur. Andre sind es durch ihre Anstrengungen geworden. Die Alten dichteten den Prometheus wie ihm, an einen Felsen geschmiedet, ein Geyer die Leber zernagt, zur Strafe, dass er vom Himmel das Feuer raubte. Diese Vorstellung ist ein sinnreiches Bild der körperlichen Uebel, die aus der Anstrengung des Kopfes entstehen. Es ist bekannt, dass durch solche Anstrengung das Leber-System, wegen seiner Verbindung mit dem Gehirn, vorzüglich leidet.) Dieses ist nicht zu verwundern, wenn man erwägt, dass diese feste und in sich gezogene Constitution alle Kräfte nach innen leitet, folglich träumend und tiefsinnig macht. Die damalige Gewohnheit, viel Blut zu lassen, hatte wahrscheinlich ebenfalls beigetragen, Lagranges Temparament nerveus zu machen, denn in seinem, gewöhnlich fieberhaften Zustand, hatte man ihm in seiner Jugend wiederholt zur Ader gelassen, auch noch in Berlin, wo man ihm in Allem 29

Mal zur Ader lies, was dann nothwendig seinen sonst festen Körperbau schwächen und die Aengstlichkeit erzeugen musste, die er immer für seine Gesundheit hatte. Er beobachtete sich immer sehr genau in der Diät und allen Begegnissen; er beschäftigte sich sogar mit dem medicinischen Studium, mit Untersuchungen über die Organisation, über die Natur der Gifte und verschiedener schädlicher Substanzen. Er hatte sich verschiedene physiologische Ideen geschaffen. So zum Beispiel meinte er, dass dasjenige Temperament, welches die Alten das melancolische nannten, vorzüglich durch ein Uebergewicht des Adernsystems über das Arteriensystem entstehe, und stützte seine Meinung auf die Temperamente bejahrter Personen, oder solcher, bei welchen ein schwarzes Blut die Gefässe ausdehnt, sie kröpfig macht, die Zweige der Pfortader füllt, und zu Hämorrhoiden disponirt.

Inzwischen stellten körperliche Bewegung, Unterbrechung der Kopfarbeiten, eine stärkende Diät und Jugendkraft, Lagranges Gesundheit wieder her. Er erhielt viel Erleichterung durch den Gebrauch vegetabilischer Säuren z. B. von Citronen, so wie von Früchten und Gemüsen; er zog fast sein ganzes Leben hindurch die Pflanzen-Nahrung, fast mit pythagorischer Strenge, den Fleischspeisen vor, und diese Gewohnheit

trug ohne Zweifel nicht wenig zur Mässigung seines Temperaments und zur natürlichen Ruhe seiner Seele bei.

So wie seine ersten Entdeckungen in der gelehrten Welt bekannt wurden, kam er in Verbindung mit d'Alembert und Euler, die damals das Scepter der Mathematik führten. Man findet, dass sie mit ihm wie mit ihres Gleichen umgingen, obgleich er bei weitem jünger war. Der grosse Euler selbst verschmähte nicht, seine Variations-Rechnung zu commentiren. Im 28sten Jahre (1764) gewann Lagrange bei der Academie der Wissenschaften zu Paris den Preis auf die Untersuchung der Monds-Schwankungen. Seine Arbeit enthält den Keim der feinsten Analyse, in der ausgedehntesten Anwendung auf die Mechanik.

Als Euler, obgleich mit Mühe, von Friedrich den Grossen die Erlaubniss zur Petersburger Academie zurückkehren zu dürfen, erhalten hatte, war die Stelle des Directors der Academie offen. Der König bot sie d'Alembert an, aber dieser berühmte Mathematiker, der bei seiner sonst kärglichen Lage, in Frankreich auf die Wissenschaften einen Einfluss hatte, den er in Preussen nicht gehabt haben würde, schlug Lagrange, dessen beginnender Ruhm sich schon über ganz Europa verbreitete, vor.

Friedrich, ein würdiger Kenner des Talents, nahm ihn ehrenvoll an Eulers Stelle auf; er setzte ihm einen Gehalt von 1500 Thalern (etwa 6000 Franken) aus; dies war im Jahr 1766. Es ist bekannt, welche Menge von gelehrten Arbeiten über die numerischen und algebraischen Gleichungen, über partielle und endliche Differenzen, über die Astronomie und viele andere Theile der Mathematik, die Memoiren der Academie zu Berlin bereicherten und Lagrange's Ruhm auf die hohe Stufe erhoben, die er unwidersprechlich einnimmt. Man fand ihn tiefer und klarer als Euler, obgleich weniger fruchtbar. Friedrich schätzte ihn sehr. Wenn die Achtung eines grossen Fürsten für einen Gelehrten ehrenvoll ist, so ehrt diese Achtung des Verdienstes auch den Fürsten wiederum selbst; denn sie zeigt, dass er selbst Verdienst hat. Er fand nur in Lagrange einen weniger kühnen, weniger unternehmenden Philosophen, als er wünschte; denn der Mathematiker war *Philosoph ohne Lärm*, wie er selbst sagte, während Maupertuis, Lamettrie, d'Argents, Voltaire etc., die vielleicht weniger reel waren, in ganz Europa ein geräuschvolles Aufsehen machten. Aber diese, in Lagrange's Character liegende Mässigung machte ihn bei den Deutschen beliebt; er wurde von ihnen allgemein bewundert. Die Gesand-

ten verschiedener Mächte, besonders die von Neapel und Spanien, machten ihm, obwohl ohne Erfolg, die verführerischten Anerbietungen, um einen so grossen Mann nach ihrem Vaterlande zu ziehen. (Im Jahre 1775. Um diese nemliche Zeit schrieb er Zusätze zur Uebersetzung von Eulers Algebra; er fügte derselben die diophantische Analysis hinzu.)

Das Clima in Preussen, welches viel gemässigter ist als in Italien, bekam ihm sehr wohl. Er entwöhnte sich des Weins, den er immer nur sehr gemischt und mässig genossen hatte, ganz. Er trank statt dessen Bier, welches ihm sehr wohl bekam. Er würde sogar völlig. Er verheirathete sich mit seiner Cousine, aber diese fiel in eine langwierige und heftige Krankheit. Lagrange setzte seine Wissenschaft bey Seite und lebte nur den Pflichten des Gatten; seine medicinischen Kenntnisse gaben ihm selbst zuweilen neue Mittel an die Hand, sie ins Leben zurückzurufen. Jedoch umsonst! sie starb kinderlos und er blieb lange Zeit Wittwer. (Lagrange hat aus seinen zwei Ehen nie Kinder gehabt. Euler hatte deren mehrere. Descartes, Newton, Leibnitz etc. sind nie verheirathet gewesen; die physische Fruchtbarkeit ist selten dem genialen Menschen eigen.)

Seine, obgleich feste Gesundheit, litt öfters durch

durch zu angestrengte Arbeit. Seine sitzende und sinnende Lebensweise zog ihm Hämorrhoidal-Uebel und eine Art von Erhitzung zu, die er mit vegetabilischen Säuren, z. B. Citronen-Säure in Thee, zu dämpfen pflegte. Gegen das Ende des Winters, oder des Februars oder Märzes, als er einst viel gearbeitet hatte, litt er an gallichten Ausflüssen und an einem Rückfall seiner alten Hypochondrie. Im 42sten Jahre (1778) bekam er eine gallichte Lungenentzündung, und es mussten Zugpflaster gelegt werden. Er litt an der Harnstrenge, die von den spanischen Fliegen herrührte, gegen welche er immer Abneigung hatte.

Indessen erholte er sich. Jedoch der schmerzliche Verlust, den er in Preussen gehabt hatte, der Tod Friedrichs, und vielleicht Gleichgültigkeit seines Nachfolgers gegen die Wissenschaften, machten, dass er seinen Blick nach Frankreich richtete, wo er glücklicher zu seyn hoffte. Er betrachtete Frankreich als sein erstes Vaterland, und seit lange wünschte Dieses, eine so herrliche Zierde seines wissenschaftlichen Ruhms zu besitzen. Nachdem er 20 Jahre an der Spitze der Berliner Academie gestanden hatte, ging Lagrange im Jahre 1787 nach Paris. Die Academie der Wissenschaften hatte ihn schon im Jahre 1772 zum Mitgliede aufgenommen. Er

gab 1788 seine analytische Mechanik heraus, die er in Berlin geschrieben hatte, und deren erster Grund im Jahre 1764, in der gekrönten Preisschrift über das Schwanken des Mondes, gelegt war. Er erzählte zuweilen von der Schwierigkeit, die er gehabt hatte, einen Verleger zu diesem genialen Werke zu finden. Der Fall ist nicht der einzige in der Geschichte der Wissenschaften. Descartes, Milton etc. haben mehr davon zu sagen. [*Auch Euler, mit seiner theoria motus.*]

Es scheint, dass die schönen chemischen Entdeckungen des berühmten und unglücklichen Lavoisier, Lagrange, der seit einiger Zeit an der Geometrie gleichsam den Geschmack verloren hatte, für diese neue Wissenschaft, die eine ganz andere Form und mathematische Strenge anzunehmen schien, gewonnen hatten. Er hatte sich schon in seiner Jugend zu Turin mit der Naturkunde beschäftigt, und sein in Kenntnissen unersättlicher Geist nährte sich schon längst, in der Stille seines Zimmers, mit den mannigfaltigsten Studien. Er hatte über Religion und Metaphysik tiefe Forschungen angestellt, vielleicht nach der Leibnitzschen und Wolffischen Philosophie, vielleicht nach eigenen Begriffen. Er hat darüber nie etwas bekannt machen wollen. Er umfasste eine ausserordentliche Masse von

naturwissenschaftlichen und selbst schönwissenschaftlichen Kenntnissen. Er liebte die Musik und selbst die Botanik, diese Wissenschaft sanfter Seelen, wie die seinige war. Wahrscheinlich suchte er aus dem nemlichen Grunde das Leben und die Grazien der Jugend auf, weil er mit Montagne fand, dass „im Alter der Geist, wie der Körper, runzelt“ und sich mit Systemen und Vorurtheilen blendet, von welchen die Jugend nichts weiss. Er beobachtete insbesondere gegen die Frauen eine eigenthümliche Art von Zärtlichkeit, Naivetät und Delicatesse, die ganz der äussersten Einfachheit seines Gemüths und der originellen Unschuld seines Characters entsprach. (Er sagte einst in einer Gesellschaft, wo von sechzigjährigen Frauen gesprochen wurde, mit grosser Feinheit: „haben Sie denn je sechzigjährige Frauen gesehen? Ich nie.“)

Die nemlichen Eigenschaften fand er vorzüglich in einer der Töchter des berühmten Astronomen und Academikers Lemonnier. Sie verband sich mit ihm am 31. May 1792, in der Blüthe ihrer Jugend und im höchsten Glanz ihrer Schönheit. Lagrange war damals 56 Jahre alt. Seine Gattin widmete ihm ihre schönsten Jahre, gleich als ob ihr Alter dem seinigen gleich gewesen wäre. Ihre, über alles Lob erhabene, unausgesetzte Sorgfalt für ihn, ihre gänzliche Hingebung während

seiner Krankheit, knüpfen ihr Andenken für immer an das jenes berühmten Mannes. Er gab ihr öffentlich das ehrenvolle Zeugniss, dass wenn ihm sein Leben lieb und der Abschied vom Leben ihm schwer sey, es nur darum sey, weil er so viele Tugend und Güte verlasse, die ihm sein Daseyn versüssten. Wir erfüllen durch die Mittheilung dieser Worte eine Pflicht der Gerechtigkeit und Wahrheit. Lagrange, welcher in den Frauen einen Geist fand, der fähig ist, mit Anmuth, die feinsten Bemerkungen zu fassen, theilte sich stets seiner Gattin in seinen innigsten Angelegenheiten mit.

Als der Revolutions-Sturm den Thron und die gesellschaftliche Ordnung umstürzte, blieb Lagrange, durch seine Studien entfernt von diesen Erschütterungen, und durch die Sanftheit seines Characters sicher vor den Reibungen der Factionen. Man vergass ihn, weil man ihn unfähig fand zu schaden. Er geizte zu wenig nach Ruhm, um Jemand zu verdunkeln, und zu wenig nach Stellen, um Feinde oder Nebenbuhler zu haben. Er trachtete nach keinem andern Thron als den der Mathematik und diese Herrschaft fürchtete man nicht. Wer mag sagen, ob man dennoch in diesen Zeiten des Unglücks nicht im Sinne hatte, dieses berühmte Opfer fallen zu machen! Für gewisse Leute wäre ein solches

Verbrechen nicht ohne Reize gewesen, und man fürchtete es augenblicklich allerdings. Lagrange liebte jedenfalls die wahre Freiheit, weil er ungemein gerecht, und die wahre Philosophie, weil er ungemein vernünftig war. Die im Namen der einen und der anderen begangene Ausschweifungen, welche ihm immer fremd blieben, haben ihn weder von der einen, noch von der andern entfernt.

Als Mitglied der Münz-Commission im Jahre 1792 findet man von ihm noch eine Abhandlung in Lavoisiers Sammlung der politischen Arithmetik. Als Professor der Normal-Schule und der polytechnischen Schule, schrieb er, vorzüglich für sie, im Jahre 1797, seine Theorie der analytischen Functionen, im Jahr 1798 die Auflösung der numerisehen Gleichungen, Vorlesungen über die Functions-Rechnung u. s. w. so wie verschiedene Abhandlungen in dem Journal dieser gelehrten Schule. Das Längen-Büreaux nahm ihn in Anspruch, und die mathematische Abtheilung des Instituts konnte nicht, ohne ihn an der Spitze, gebildet werden. Man findet unter den Abhandlungen dieser berühmten Gesellschaft mehrere Memoiren von ihm, der eines ihrer aufmerksamsten und eifrigsten Mitglieder war.

Man würde diesem grossen Mann Unrecht thun,

wenn man glaubte, dass der Rang eines Senators, eines Grafen des Reichs etc. ihn geblendet hätte. Die wahre Grösse war ihm zu natürlich. Man würde ihn wenig kennen, wenn man glauben wollte, dass ihm alles das irgend einen Schritt kostete. Er sagte im Gegentheil: „der Prunk genire ihn," und sein einfaches Leben gab den Beweis davon. Er hasste den Zwang und war weit entfernt, den Höfling zu machen. Dazu bedurfte es nicht erst der Bescheidenheit: er war offenbar über seine Würden erhaben; er empfing sie dankbar aus der Hand eines grossen Mannes, der ihn ehrte, und der fähig war, ihn zu beurtheilen. Die Nachwelt weiset in der Geschichte der Völker den ausgezeichneten Gelehrten ihre Stellen neben den Helden an. Beide sind Eroberer, jeder in seiner Art. Se. Majestät, die ihn immer mit der würdigsten Auszeichnung begegnete, nannte ihn: „die hohe Pyramide der Mathematik," sie geruhete, bei seiner letzten Krankheit, sich mehrere Male nach seinem Befinden erkundigen zu lassen.

L a g r a n g e war fest- und wohlproportionirt- obwohl zart gebaut und von mittler Grösse; sein Gesicht war ruhig, sinnig und ehrwürdig, sein Blick durchdringend, aber sanft. Sein Kopf, ohne jene Grösse zu haben, die man grossen Denkern eigen glaubt, war schön und regel-

mässig; er hatte im Mannes-Alter braunes und schlichtes Haar gehabt, welches im Alter weiss geworden war, ohne auszugehen. Seine Augen waren aschenblau (*bleu cendré*), seine Nase gebogen (*aquilin*), seine Gesichtszüge waren voll Ausdrucks, Würde, Anmuth und Adels. Er hat immer eine bestimmte Abneigung gehabt, sich abbilden zu lassen, denn er meinte, dass nur die Eigenschaften des Geistes und der Seele allein verdienten, den Erinnerungen der Nachwelt aufbewahrt zu werden. (Verstohlenerweise hat man ihn während des Schlummers gezeichnet. Nach seinen Tode hat man sein Gesicht abgeformt.) Sein Körper war gedrungen (*stricte*), nervig, der Leib zurücktretend, ohne mager zu seyn; die Knochen waren stark, die Gesichtsfarbe bleich und matt, besonders um die Augen, die Haut überall etwas haarig, mit durchscheinenden Adern. (Die Neigung zu Hämorrhoiden, zur Verstopfung und beständige Besorgniss um seine Gesundheit beweisen, nebst dem Obigen, dass sein Temperament melancolischer Art war.)

Schüchtern, aber zntraulich gegen Jeden, drückte er sich mit einem angenehmen Lächeln aus, indem er immer mit einer gewissen Anmuth sein: „Ich weiss nicht" wiederholte, und bescheiden seine Zweifel und Einwürfe vortrug. Er sprach langsam und schnarrte ein wenig

(*grasseyant*), aber er erhob die Stimme, wenn er seine Ideen entwickelte, und gewöhnlich trug er sie dann unerwartet, tiefeindringend, und mit einem Reichthum von originellen und glücklich erfundenen Ausdrücken, vor. Er zweifelte viel, und suchte sich mit Jedem zu verständigen, aber ohne sich mit Worten abfertigen zu lassen, oder mit Scheingründen zu begnügen. Er liebte die Gegenstände zu erschöpfen und folgte nicht dem Faden der gewöhnlichen leeren Unterhaltung. Zuweilen versetzte ihn ein einzelnes Wort in Nachdenken, und er fasste dann seinen Gegenstand mit einer so neuen Ansicht auf, dass man wohl sahe, sie komme von tiefen Einsichten her. So z. B. sagte er einst: „die Aerzte können wohl „ein Fieber vertreiben, nicht aber uns dasjenige „Fieber geben, welches gerade das rechte wäre.“ Er war im Ausdruck sehr vorsichtig und tadelte sich selbst, wenn er etwa in der Unterhaltung etwas Gewagtes gesagt zu haben glaubte. Er nahm an der Unterhaltung keinen sehr thätigen Antheil; er hasste vielmehr die Gespräche über Andere oder über nichtige Kleinigkeiten, die nur zu oft der Gegenstand davon sind. Er liebte ein unterrichtendes und ruhiges Gespräch. Da er sich nie mit jenen Spielen beschäftigte, die zur Verschwendung der Zeit, welche Demjenigen, der ihren Werth nicht kennt, zu lang-

sam dahin läuft, erfunden sind, so bereicherte er sich, während des Müssiggangs Andrer, mit Kenntnissen.

Seine, mehr ernste als fröhliche, obgleich nicht traurige Gemüthsart war von unwandelbarer Sanftheit, die ihn zum Gegenstande der allgemeinsten Achtung machte. Es war ihm unmöglich, ein empfindendes Wesen leiden zu sehen; er verabscheute die Grausamkeit, selbst gegen Thiere; er war der erklärte Feind Alles dessen, was der Gewaltthätigkeit und dem Streite ähnlich sieht; er war, auf eine wahrhaft ängstlich-religiöse Weise, gerecht. Die Billigkeit war für ihn eine unverbrüchliche mathematische Regel, von der man sich, ohne absurd zu werden, nicht entfernen dürfe. Diese Tugend war, nebst der Güte, der Grundzug seiner Moral, und Jedermann wusste dies.

Man erlaube uns eine Bemerkung. Ist es nicht jener Zustand des Friedens und der Unschuld, entfernt von stürmischen Leidenschaften, und verbunden mit einem pythagorisch-nüchternen Lebenswandel und mit sanften, Gerechtigkeit liebenden, Gesinnungen, der die Heiterkeit der Seele erhält, und die Harmonie der Denkkraft erhöht? Fand nicht Lagrange, wie Newton, eben darin die Quelle jener Sammlung, die es ihm möglich machte, die Gegenstände

seines Nachdenkens so lange vorher zu ergründen? Wieviel, sonst nicht mittelmässige, Talente würden Intensität und Energie bekommen, wenn sie so alle Kräfte auf einen Punkt lenkten, anstatt sie voll Unruhe auf fremdartige Gegenstände zu zerstreuen! Die wahre Moral-Philosophie und die Mässigung sind dem Genie unentbehrlich.

Da Lagrange einen schwachen Magen hatte, wie gewöhnlich alle, viel mit dem Kopfe arbeitende Menschen (*imbecilli stomacho pene omnes cupidi litterarum sunt. Celsus de Medic.*) so gewöhnte er sich an eine sehr mässige und regelmässige Diät. Wenn er, in Gesellschaft, ein wenig mehr als gewöhnlich ass, so litt er sogleich an Unverdaulichkeit. Deshalb machte er sichs zum Gesetze, sehr wenig zu essen, um besser arbeiten zu können, und wenn seine körperlichen Kräfte deshalb nicht sehr zunahmen, so schützte ihn dagegen seine Mässigkeit gegen Krankheiten. Er hat bis zu seinem letzten Augenblicke sein ungeheures Gedächtniss und die unveränderliche Kraft zu fassen und zu arbeiten behalten. (Diesen Vorzug hatte er vor Newton, welcher in seinen letzten Jahren kindisch wurde. Freilich lebte dieser 85 Jahr. Er litt zuletzt am Steine). Sein Gesicht und die übrigen Sinne waren im besten Zustande, blos das Gehör war

etwas hart geworden. Wie Descartes schlief er lange und stand sehr spät auf (gegen 10 Uhr). Er ging gegen Mitternacht zu Bette und schlummerte gewöhnlich etwas, nach dem Essen. Morgens trank er Kaffee mit Milch, ass sehr mässig zu Mittag, wenig Fleisch, oder doch das leichteste, mehr Gemüse und Früchte. (Als Newton seine Optik schrieb, lebte er fast nur von Brod und Wein mit Wasser. Auch Descartes lebte fast nur von Gemüse und trank äusserst wenig Wein, öfters monatelang gar keinen. Leibnitz ass viel, vielleicht aus Gewohnheit der Deutschen und trank sehr wenig. Euler trank sehr viel, und rauchte auch Taback. Die Diät hat, auf die Dauer, Einfluss auf die Stimmung der Seele, deshalb verdient sie Erwähnung.) Er trank nur Bier und hasste alle starke Getränke. Späterhin trank er Kaffee im Wasser, sehr süss und heiss, denn er liebte überhaupt die Wärme und befand sich an schönen Tagen in der Sonne sehr wohl. Gegen 10 Uhr Abends trank er sehr heissen Thee mit vielem Zucker, zuweilen mit Citronensaft, um sich zu erquicken und von seinen Studien zu erholen.

Er war gegen die Reize der italiänischen Musik und des französischen Theaters nicht unempfindlich, und wenn er in der letzten Zeit das Schauspiel nicht mehr besuchte, so geschah es,

weil ihn die eingeschlossene Luft, zwischen einer Menge Menschen, incommodirte. Er liebte sehr die freie Luft und ging fast täglich, und schnell, beständig in Nachdenken vertieft, spazieren. Man wird hoffentlich diese Details entschuldigen.

In seinem Zimmer las und dachte Lagrange viel. Er schrieb nie eher, als bis er seinen Gegenstand reiflich von allen Seiten überlegt hatte. Er war allezeit einfach gekleidet und hasste die Sucht, sich bemerklich zu machen. Es würde Verstellung gewesen seyn, ein so ausgezeichnetes Verdienst zu verleugnen; er leugnete es, mit angenehmer Naivetät, keinesweges, denn er war äusserst aufrichtig; aber wenn man ihn hörte, so schien es, als wenn seine Schüler seines Gleichen wären; so viel Vergnügen machte es ihm, den Werth ihrer Arbeiten hervorzuheben. Es ist kaum glaublich, wie entfernt er von Stolz war. Nur erst in seiner letzten Zeit erfuhr man, dass er es gewesen war, der dem Saluce und Daviet de Foncenex etc. die Grundzüge der, unter ihren Namen, in den Sammlungen der Turiner Academie bekannt gemachten, Abhandlungen geliefert hatte. Der Astronom Lemonnier, der in einer Abhandlung, die den mechanischen Preis der Academie der Wissenschaften erhielt, analytisch-mathematische Ent-

wickelungen gefunden hatte, welche weit über die Kräfte des Concurrenten zu gehen schienen, hatte Lagrange in Verdacht der Hülfe. Dieser entschuldigte sich, dass er dem Mechaniker den Preis gewonnen habe, damit, dass derselbe ein guter Familien-Vater sey. Er war dafür bekannt, auf solche Weise die Regel zu übertreten.

In seinen letzten Tagen gestand Lagrange, dass unsre Wissenschaftan nur schwache Schimmer in dem finstern Abgrund der Unwissenheit sind, in welcher wir leben. [*Wahrlich eine erhabene und weise, Lagrange's würdige, Bemerkung!*] So hatte Der gut reden, welcher fast den ganzen Kreis des menschlichen Wissens durchlaufen und die Grenzen der mathematischen Analysis weit hinaus gerückt hatte. Die wahre Bescheidenheit wirklicher Gelehrten ist sehr natürlich. Grosse Geister schwingen sich auf, bis zu den Grenzen der möglichen Erkenntniss; und weil ihr Blick weiter reicht, als bei Andern, so messen sie das Ziel. Aber die Kurzsichtigen, deren Blick diese Grenzen nicht erreicht, glauben sich im unbeschränkten Raum und werden stolz auf ihre vermeintliche Unermesslichkeit.

Alles was das Gepräge der Nützlichkeit und Wohlthätigkeit trug, wurde von dieser wahrhaft

grossen und edlen Seele mit Wärme ergriffen. Man hat vielleicht nicht genug alle seine Tugenden gekannt, die seinen bessern Theil ausmachten, weil man nur auf sein Talent sahe. Auch ohne dieses wäre Lagrange noch ein bewundernswürdiger Mensch gewesen; aber man musste ihn näher kennen, man musste in das Heiligthum seines Herzens dringen, welches sich dem Blick einer Zeit, die oft wenig geeignet ist, es zu fassen, verbarg. Wie erhaben war ein solcher Einklang der Tugend und des Talents! Wir fürchten hier keinen Widerspruch von irgend Jemand der Lagrange kannte. Jetzt, da der Tod ihn uns entriss, da kein Interesse mehr unser Urtheil bestimmen kann, sind wir seiner Asche die Ehre der Wahrheit schuldig; wir geben ihm kein anderes als dasjenige ehrenvolle Zeugniss, welches einem braven Manne zukommt; der Schmeicheley bedarf sein Andenken nicht.

Der Mensch ist nur ein Punkt im Weltall, die Zeit seines Daseyns nur ein Augenblick; aber der Punkt vergrössert sich durch das Licht des Gedankens, das Daseyn verewigt sich durch den Adel der Tugend. Auch ich wurde von Lagrange mit seiner Achtung beehrt. Warum kann ich hier auf seinem Grabe nicht Alles ausdrücken, was ich fühle!

J. J. Virey.

Einige Zusätze zu vorstehenden Nachrichten von Lagrange's Leben.

Der Herausgeber dieser Uebersetzung der Lagrangischen Werke hat sich bemüht, hier in Berlin, wo Lagrange so lange lebte, über diesen grossen Mann noch einige Nachrichten zu sammeln. Viel Ausführlicheres als oben erzählt wird hat er nicht erfahren. Lagrange's Freunde waren nicht zahlreich und die meisten sind nicht mehr. Was er von den noch übrig gebliebenen gehört hat, setzt wenig Neues dem Obigen hinzu. Es enthält aber die einstimmunge Bestätigung alles des Guten und Rühmlichen, was Lagrange's Biographen von ihm sagen.

Jeder der Lagrange, entweder selbst, oder auch nur aus Erzählungen Andrer kannte, kann nicht genug den vortrefflichen Character, die Herzensgüte und die wahrhaft kindliche Unschuld des grossen Mannes rühmen. Einer seiner noch lebenden Freunde, den der Herausgeber um Nachrichten von ihm ersuchte, erschöpfte

sich fast in seinem Lobe. Nirgend hat Referent in Berlin jemals etwas anderes als Ruhm von Lagrange gehört. Ein hoher Beweis seiner Vortrefflichkeit! denn es folgt daraus, dass Lagrange vielleicht keinen Feind hatte. In der That lebte er, nach der Beschreibung Derer die ihn kannten, so ganz nur seiner Wissenschaft allein, dass ihm die Händel der Welt beinahe unbekannt blieben. Sein Geist wohnte im Reich des Denkens und er war dem Treiben der Menschen fast gänzlich fremd. So war es ihm denn auch möglich, durch die Stürme der französischen Revolution hindurchzukommen, ohne von ihnen ergriffen zu werden. Einer seiner hiesigen Freunde gab ihm darüber seine Verwunderung zu erkennen und fragte ihn, wie er es mache, um unangefochten zu bleiben. „Ich gehe nicht aus meinem Zimmer," erwiederte er, „sehe kaum durch das Fenster, und so weiss ich nicht was vorgeht; wahrscheinlich weiss man auch wohl nicht um mich." Eben dieser Freund, welcher ihn, wiederholt, später in Paris, auch noch zur Zeit des Consulats, sahe, rühmt seine Geradheit und sein Benehmen, das von echtem Gefühl der Würde zeugte. Während Andre sich gegen die Gewaltigen demüthigten, begegnete Lagrange ihnen mit keiner andern Achtung als die etwa ihren Verdiensten wirklich zukam.

Lagran-

Lagrange war ein wahrhaft glücklicher Mensch; denn welches Glück ist dem zu vergleichen, fern von wilden Leidenschaften, im Gebiet der Wissenschaften, wie in einer bessern Welt zu leben und von dem niedrigen Getümmel kaum etwas zu vernehmen. Aber auch äusserlich, in dem was man gewöhnlich zur Behaglichkeit nothwendig glaubt, war Lagrange nicht vom Schicksal vernachlässigt. Sein Leben floss ohne Kummer, ohne häufigere schmerzhafte Verluste dahin. Nur einmal, in Berlin, bei dem Tode seiner ersten Frau, der ihn tief betrübte, und einmal in Paris, als er durch die Revolution in den bittersten Mangel gerieth, schien auch an ihn der Kelch gekommen. In diese letzte Epoche gehört ein Umstand, den seine Biographen nicht erzählen, der aber, weil er unserm Lande sehr zur Ehre gereicht, nicht verschwiegen werden darf. In jener unglücklichen Revolutions-Zeit nemlich war Lagrange, weil das damalige Papiergeld im Werthe fast bis auf Null gesunken war, in drückenden Mangel gerathen. Er war schon mehrere Jahre von Berlin entfernt, und hatte die Pension von dreihundert Thalern jährlich, die ihm der König, ungeachtet seines Abganges, aus seinem Gehalte von 1500 Thalern festgesetzt hatte, nicht erhoben, wahrscheinlich, weil er nicht einen Gehalt

ziehen wollte, ohne dafür etwas Bestimmtes zu leisten, obgleich er allerdings, nach seinem Abgange von Berlin, noch einige Memoiren hierher geliefert hat. Man erfuhr hier seine Lage, und eben jener Freund, dessen oben erwähnt ist, und der um die Zeit sich in Paris befand, übernahm es, zu versuchen, ob Lagrange geneigt sey, von hier aus Hülfe anzunehmen. Er fand ihn zwar geneigt, aber zweifelnd an einer solchen Hülfe, weil, wie er sagte, Preussen mit Frankreich im Kriege und die Pension wahrscheinlich verfallen sey. Man sandte ihm von hier aus den Gehalt für die ganze verflossene Zeit und rettete ihn dadurch wahrscheinlich vom Verderben; denn merkwürdig ist seine Aeusserung, als sein Freund ihn fragte, was er denn wohl gethan hätte, wenn diese Hülfe nicht erschienen wäre. „Ich wäre wahrscheinlich umgekommen," erwiederte er, „denn Schulden zu machen wäre mir unmöglich gewesen."

Seine Häuslichkeit schildert sein Freund beneidenswerrth. Besonders seine zweite Frau war in jedem Betracht ausgezeichnet, an Körper und Seele. Sie war eine der schönsten und zugleich geistreichsten Frauen von Paris; sein Schwiegervater Lemonnier war das Ideal eines würdigen Greises.

Lagrange ging fast nur mit Gelehrten

verschiedener Fächer um, z. B. mit Laplace, Monge, Chaptal, Berthollet etc. aber, wie sein Freund versichert, nicht literarisch. Er wusste nicht einmal, dass die *mécanique céleste* unter der Presse sey. Aus seinen Arbeiten machte er gleichwohl kein Geheimniss. „Ich wünsche nur zu nützen, so viel ich kann," sagte er: „wie meine Arbeiten unter die Leute kommen, ist mir ziemlich gleichgültig." Von den Verdiensten Anderer sprach er mit grösster Achtung, mit besonderer Vorliebe aber von Eulers Verdiensten. Wenn man ihn fragte, wie am besten die Mathematik zu studiren sey, so verwies er an Eulers Schriften. Er war durchaus fern von eigner Ueberschätzung. Das Ideal seiner Achtung war nur seine Wissenschaft! Alles bestätiget, dass in Lagrange Tugend und Talente auf eine seltene Weise vereiniget waren.

Verzeichniss von Lagrange's Werken.

Mitgetheilt von Lacroix.

(So wie sich solches der zweiten Auflage der analytischen Mechanik angehängt findet.)

Abgesonderte Werke.

Brief an Julius Carl Fagnano, vom 23. Juny 1754, enthaltend eine mit der Newtonschen Reihe für die Potenzen correspondirende Reihe für die Differentiale und Integrale beliebiger Ordnung (zu Turin gedruckt).

Zusätze zu Eulers Algebra.

Analytische Mechanik. Erste Ausgabe 1788. Zweite Ausgabe. 1ster Band, 1811. 2ter Band, 1815.

Theorie der analytischen Functionen. Erste Ausgabe, Jahr V. (1797.) Zweite Ausgabe, 1813.

Auflösung der numerischen Gleichungen. Erste Ausgabe Jahr VI. (1798.) Zweite Ausgabe, 1808.

Vorlesungen über die Functions-Rechnung. Die erste Ausgabe macht einen Theil der zweiten Ausgabe der *séances des ecoles normales* von 1801 aus. Dieses Werk ist im zwölften Heft des Journals der *école polytechnique* vom Jahr XII (1804) abgedruckt. Im Jahr 1806 hat der Verfasser eine besondere Ausgabe

in Octav veranstaltet, welche zwei neue Vorlesungen enthält, die wieder in den vierzehnten Band des Journals *de l'école polytechnique* aufgenommen sind.

Sammlungen der Turiner Academie.

Miscellanea.

Erster Band.

Untersuchungen über die Methode der *Maxima* und *Minima.*

Ueber die Integration einer Differential-Gleichung mit endlichen Differenzen, die die Theorie der rücklaufenden Reihen enthält.

Untersuchungen über die Fortpflanzung des Schalles.

Zweiter Band.

Neue Untersuchungen über die Fortpflanzung des Schalles.

Versuch einer neuen Methode die Maxima und Minima unbestimmter Integralformeln zu finden.

Anwendung dieser Methode auf die Auflösung verschiedener Aufgaben der Dynamik.

Dritter Band.

Ueber verschiedene Aufgaben der Integral-Rechnung (mit Anwendungen auf die Hydrodynamik, Dynamik und physische Astronomie).

Vierter Band.

Auflösung einer arithmetischen Aufgabe.

Ueber die Integration einiger Differential-Gleichungen, in welchen die unbestimmten Grössen abgesondert sind, deren Glieder einzeln aber nicht integrirt werden können.

Ueber die Methode der Variationen.

Ueber die Bewegung eines Körpers, der von zwei festen Punkten angezogen wird. Erste und zweite Abhandlung.

Fünfter Band.

Ueber die Gestalt der Säulen.

Ueber den Nutzen der Methode, ein Mittel zwischen Beobachtungen zu nehmen.

Abhandlungen der Turiner Academie.

Jahr 1784—85.

Erster Theil.

Ueber den Stoss flüssiger Körper.

Zweiter Theil.

Neue Integrations-Methode für Differentiale, die ein Quadrat-Wurzel-Zeichen enthalten, unter welchem die veränderliche Grösse nicht über den vierten Grad steigt.

Abhandlungen der Berliner Academie.

XXI. Band vom Jahre 1765.

Ueber die Tautochronen.

XXII. Band vom Jahre 1766.

Ueber den Durchgang der Venus am 3. Juny 1769 (oder über die Parallaxen).

XXIII. Band vom Jahre 1767.

Ueber die Auflösung unbestimmter Aufgaben des zweiten Grades.

Ueber die Auflösung der numerischen Gleichungen.

XXIV. Band vom Jahre 1768.

Zusatz zu der Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen.

Neue Methode, unbestimmte Aufgaben in ganzen Zahlen aufzulösen.

Neue Methode, Buchstaben Gleichungen durch Reihen aufzulösen.

XXV. Band vom Jahre 1769.

Ueber die Kraft gebogener Federn.

Ueber die Keplersche Aufgabe.

Ueber die Elimination.

Neue Abhandlungen der Berliner Academie.

Jahr 1770.

Neue Betrachtungen über die Tautochronen.

Beweis eines arithmetischen Lehrsatzes.

Betrachtungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen.

Jahr 1771.

Beweis eines neuen Lehrsatzes über die Primzahlen.

Fortsetzung der Betrachtungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen.

Jahr 1772.

Ueber eine neue Art von Rechnung, die sich auf Differentiation und Integration bezieht.

Ueber die Gestalt der unmöglichen Wurzeln der Gleichungen.

Ueber astronomische Strahlenbrechung.

Ueber die Integration der Gleichungen mit partiellen Differentialen erster Ordnung.

Jahr 1773.

Neue Auflösung der Aufgabe über die drehende Bewegung eines Körpers.

Ueber die Anziehung elliptischer Sphäroiden.

Analytische Auflösung einiger Aufgaben von der dreiseitigen Pyramide.

Arithmetische Untersuchungen.

Jahr 1774.

Ueber die singulairen Integrale von Differential-Gleichungen.

Ueber die Bewegung der Knoten der Planeten-Bahnen.

Jahr 1775.

Untersuchungen über die rücklaufenden Reihen, deren Glieder auf verschiedene Art abwechseln, oder über die linearen Gleichungen mit partiellen Differenzen, so wie über den Gebrauch dieser Gleichungen in der Theorie des Zufalls.

Zusatz zu der Abhandlung über die Anziehung elliptischer Sphäroiden.

Fortsetzung der im Bande von 1773 gedruckten arithmetischen Untersuchungen.

Jahr 1776.

Ueber die Veränderung der mittlern Bewegung der Planeten.

Auflösung einiger Aufgaben der sphärischen Astronomie durch Reihen.

Ueber den Nutzen der continuirlichen Brüche in der Integral-Rechnung.

Jahr 1777.

Untersuchung über die Bestimmung der Zahl der unmöglichen Wurzeln in den Buchstaben-Gleichungen.

Ueber einige Aufgaben der diophantischen Analysis.

Allgemeine Bemerkungen über die Bewegung mehrerer Körper, die sich anziehen.

Bemerkungen über die Hemmung *(échappement)*.

Jahr 1778.

Ueber die Aufgabe von Bestimmung der Cometen-Bahnen. Erste Abhandlung.

— Zweite Abhandlung.

Ueber die Theorie der Brillengläser.

Ueber eine besondere Art, die Zeit in den Kegelschnitten auszudrücken.

Jahr 1779.

Ueber verschiedene Aufgaben der Analysis, die sich auf die Theorie der singulairen Integrale beziehen.

Ueber die Construction der geographischen Carten. Erste Abhandlung.

— Zweite Abhandlung.

Jahr 1780.

Theorie vom Schwanken des Mondes.

Jahr 1781.

*) Ueber die Theorie der Bewegung flüssiger Körper.

Theorie der hundertjährigen Variationen der Elemente der Planeten-Bahnen. Erster Theil.

Jahr 1782.

*) Theorie der hundertjährigen Veränderungen. Zweiter Theil.

Jahr 1783.

Theorie der periodischen Veränderungen der Bewegung der Planeten. Erster Theil.

*) Man findet auch in der Geschichte dieses Jahres, S. 17, ein Gutachten von Lagrange über eine Quadratur des Kreises.

**) Gutachten über ein zur Bestimmung der Figur der Erde vorgeschlagenes Mittel. (Geschichte S. 55).

Ueber die hundertjährigen Veränderungen der mittlern Bewegung der Planeten.

Ueber eine Art, die gewöhnlichen Näherungs-Methoden bei Integration der Gleichungen über die Bewegung der Planeten zu berichtigen.

Ueber eine besondere Methode der Näherung und Einschaltung.

Ueber eine neue Eigenschaft des Mittelpunkts der Schwere.

Ueber die Aufgabe der Bestimmung der Cometen-Bahnen. Dritte Abhandlung.

Jahr 1784.

Theorie der periodischen Bewegung der Planeten. Zweiter Theil.

Jahr 1785.

Allgemeine Methode, die Gleichungen mit partiellen Differenzen erster Ordnung zu integriren, wenn die Differenzen nur lineär sind.

Jahr 1786.

Geometrische Theorie der Sonnenfernen, zur Ergänzung der Newtonschen Principien.

Berichtigung zweier Stellen in Newtons Principien, betreffend die Fortpflanzung des Schalles und die Bewegung der Wellen.

Jahr 1787.

(Lagrange legt der Academie zu Berlin die Bestimmung der hundertjährigen und periodischen Variationen der Herschelschen Elemente von Duval le Roi vor.)

Jahr 1792 — 93.

Ueber eine Aufgabe, die Annuitäten betreffend.

Untersuchungen über mehrere analytische Gegenstände, die

sich auf verschiedene Stellen früherer Abhandlungen beziehen.

1) Ueber den Ausdruck des allgemeinen Gliedes rücklaufender Reihen.
2) Ueber die Anziehung elliptischer Sphäroiden.
3) Ueber das Interpolations-Verfahren.
4) Ueber die hundertjährige Gleichung des Mondes.

(Lagrange legt einen Zusatz von Duval le Roi zu seiner Abhandlung über die Variation der Herschelschen Elemente vor.)

Jahr 1803.

Ueber ein allgemeines Gesetz der Optik.

Sammlungen der Academie der Wissenschaften zu Paris.

Abhandlungen.

Jahr 1772. Erster Theil.

Untersuchungen über die Mittel, Planeten-Tafeln nach Beobachtungen zu berechnen.

(Diese Abhandlung betrifft vorzüglich die rücklaufenden Reihen.)

Jahr 1774.

Untersuchungen über die hundertjährigen Gleichungen der Knoten-Bewegungen und der Neigung der Planeten-Bahnen.

Preis-Aufgabe.

Neunter Band.

Untersuchung über das Schwanken des Mondes. Jahr 1764. (Hier wandte Lagrange zum erstenmal das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten an.)

Untersuchung über die Ungleichheiten der Jupiters Trabanten. Jahr 1766.

Versuch einer neuen Methode, die Aufgabe von drei Körpern aufzulösen. Jahr 1772.

Savans étrangers.

Siebenter Band.

Ueber die hundertjährige Mond-Gleichung.

Zehnter Band.

Untersuchung über die Störung eines Cometen, der dicht an einen Planeten vorbei geht.

Institut von Frankreich.

Abhandlungen der ersten Classe.

Jahr 1808.

Ueber die Theorie der Variationen der Elemente der Planeten, und derjenigen der grossen Axen ihrer Bahnen insbesondere.

Ueber die allgemeine Theorie der Variationen der willkührlichen Constanten in allen Aufgaben der Mechanik.

Zusatz zu der vorigen Abhandlung.

Jahr 1809.

Zweite Abhandlung über die Theorie der Variationen der willkührlichen Constanten in den Aufgaben der Mechanik.

Abhandlungen die in besondern Sammlungen eingerückt sind.

Journal der polytechnischen Schule.

Fünftes Heft. Zweiter Theil.

Versuch einer numerischen Analyse über die Verwandlung der Brüche.

Ueber das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Sechstes Heft. Zweiter Band.

Bemerkungen über den Gegenstand der Theorie der analytischen Functionen.

Auflösung einiger Aufgaben von den sphärischen Dreiecken, nebst einer vollständigen Analyse dieser Dreiecke.

Zwölftes Heft.

(Man sehe die besondern Werke.)

Funfzehntes Heft. Achter Band.

Erläuterungen einer besondern Schwierigkeit bei der Berechnung der Anziehung, wenig von der Kugel verschiedener, Sphäroiden.

Séances des ecoles normales.

Vorlesungen über die Arithmetik und Algebra. Gehalten in dieser Schule im Jahre III. (1794—95.)

(Wieder abgedruckt in der zweiten Ausgabe der nemlichen Sammlung von 1801, und in dem 7ten und 8ten Heft des Journals der polytechnischen Schule, welches im Jahre 1812 herauskam, um eine Lücke in diesem Journal zu füllen.)

Connoissances des tems.

Jahr 1814.

Ueber den Ursprung der Cometen.

Jahr 1817.

Ueber die Berechnung der den Parallaxen unterworfenen Verfinsterungen. (Eine Abhandlung, welche schon im Deutschen, in den Berliner Ephemeriden vom Jahr 1782, erschienen war.)

Ver-

Versuch einer politischen Arithmetik; gedruckt in einer Sammlung verschiedener Schriften über die politische Arithmetik von Lavoisier, Lagrange und Anderen. Herausgegeben im Jahr IV. (1795—96) von Röderer.

Anmerkung. Carnot, als Minister des Innern, hat die von Lagrange hinterlassenen Manuscripte von der Regierung kaufen lassen, und die mathematische und physische Classe des Instituts hat auf seinen Wunsch eine Commission ernannt, um diejenigen auszuwählen, die zum Druck fähig sind. Die andern sind geordnet und in der Bibliothek des Instituts niedergelegt.

Theorie

der

analytischen Functionen.

Vorerinnerung zur zweiten Auflage.

Diese zweite Ausgabe hat mehrere Vorzüge vor der ersten, die im Jahre 1797 erschien. Sie ist correcter; der Inhalt ist geordneter und in Abschnitte getheilt, was Anfangs nicht wohl anging, weil dieses Werk, wie aus dem Stegreife verfasst, und so wie es entstand, gedruckt wurde. Ferner sind mehrere Zusätze gemacht worden, vorzüglich im vierzehnten Abschnitte des zweiten Theils und im fünften des dritten.

Man gedachte Anfangs, mit dem ersten Theil dieses Werks die Vorlesungen über die Functionen-Rechnung, welche einen Commentar und die Fortsetzung dieses Theils ausmachen, zu verbinden *). Da indessen diese Vorlesungen ein

*) Diese Vorlesungen erschienen zuerst in der Sammlung von Vorlesungen der Normal-Schule. Aber die zweite Auflage, welche 1806 bei Courcier herauskam, ist sehr vermehrt. Diese letztere wird hier citirt.

besonderes Werk sind, welches für sich und unabhängig von der Theorie der Functionen gelesen werden kann, so hat man sich begnügt, es überall, wo es Erläuterungen und nützliche Entwickelungen enthält, zu citiren.

Inhalt der Theorie der Functionen.

Einleitung.

Seite.

Von den Functionen überhaupt. Von Stamm- und abgeleiteten Functionen. Von den verschiedenen Ansichten der Differential-Rechnung. Gegenstand dieses Werks 3

Erster Theil.

Uebersicht der Theorie mit ihren vorzüglichsten Anwendungen auf die Analysis.

Seite.

Erster Abschnitt. Entwickelung einer Function von einer veränderlichen Grösse in eine Reihe, wenn man der veränderlichen Grösse ein Wachsthum beilegt. Stufenweise Bildung der Glieder dieser Reihe. Wichtiger Lehrsatz über die Natur dieser Reihe 13

Seite.

Zweiter Abschnitt. Abgeleitete Functionen. Ihre Bezeichnung und ihr Algorithmus 30

Dritter Abschnitt. Ableitungen von Potenzen, Exponential-Grössen, Logarithmen, Sinus und Cosinus, und von Ausdrücken, die aus diesen einfachen Functionen zusammengesetzt sind. Ableitungs-Gleichungen 40

Vierter Abschnitt. Digression. Ueber die Mittel, die Reihen für Exponential-Grössen, Logarithmen, Sinus, Cosinus und Kreisbogen blos algebraisch zu entwickeln 63

Fünfter Abschnitt. Von der Entwickelung der Functionen, wenn man der veränderlichen Grösse einen bestimmten Werth beilegt. Fall, in welchem die allgemeine Regel nicht zutrifft. Von den Werthen der Brüche, deren Zähler und Nenner zugleich verschwinden. Von den besonderen Fällen, in welchen die Entwickelung einer Function nicht nach Potenzen mit ganzen positiven Exponenten des Wachsthums der veränderlichen Grössen fortschreitet 78

Sechster Abschnitt. Allgemeine Auflösung der Functionen in Reihen. Entwickelung der Functionen in endliche Reihen von einer beliebigen Gliederzahl. Mittel, die Reste nach einem beliebigen Gliede auszudrücken. Neuer Lehrsatz von solchen Reihen 96

Siebenter Abschnitt. Von den Ableitungs-Gleichungen und ihrem Nutzen in der Analysis, bei Umformung der Functionen. Allgemeine Theorie

Seite.

dieser Gleichungen und der darin vorkommenden willkürlichen Constanten 129

Achter Abschnitt. In welchem die einfachsten Fälle der Zurückleitung von abgeleiteten Functionen, oder von Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung, untersucht werden. Von den lineären Functionen der verschiedenen Ordnungen, und denen, die lineär gemacht werden können 151

Neunter Abschnitt. Von den singulairen Ausdrücken, die nicht in den vollständigen Stammgleichungen mit begriffen sind. Von den singulairen Stammgleichungen 178

Zehuter Abschnitt. Vom Gebrauch der Ableitungen in der Analysis und von Bestimmung der willkürlichen Constanten. Anwendung auf die Summirung der Reihen und die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades 195

Eilfter Abschnitt. Von der Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, in welcher die veränderlichen Grössen gesondert sind, in welcher man aber direct die Stammgrösse jedes einzelnen Gliedes nicht finden kann. Merkwürdige Eigenschaften dieser Stammgrössen 206

Zwölfter Abschnitt. Von der Entwickelung der Functionen zweier veränderlichen Grössen. Von ihren Ableitungen. Bezeichnung dieser Functionen und Bedingungen, welchen sie entsprechen müssen. Allgemeines Gesetz zwischen den Gliedern der Entwickelung einer Function von mehreren veränderlichen Grössen und den Gliedern, die wieder aus der Entwickelung der ersten Glieder entstehen 233

Seite.

Dreizehnter Abschnitt. In welchem die Mittel angegeben werden, Functionen einer beliebigen Zahl veränderlicher Grössen in endliche Reihen von so vielen Gliedern als man will, zu entwickeln und den Werth der Reste auszudrücken . 246

Vierzehnter Abschnitt. Von den abgeleiteten Gleichungen mit drei veränderlichen Grössen. Von den willkürlichen Functionen in den vollständigen Stammgrössen zwischen drei veränderlichen Grössen 254

Fnufzehnter Abschnitt. Merkwürdiger Ausdruck für die Entwickelung eiuer beliebigen Function der in der Gleichung $z = x + f\gamma z$ enthaltenen unbekannten Grösse z in eine Reihe . . . 264

Sechzehnter Abschnitt. Allgemeine Methode, die Stammgleichung einer linearen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen mehreren veränderlichen Grössen, desgleichen die Stammgleichung einer beliebigen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen drei veränderlichen Grössen zu finden 281

Zweiter Theil.

Anwendung der Theorie der Functionen auf die Geometrie.

Seite.

Erster Abschnitt. Ueber die verschiedenen Ansichten von den Tangenten. Theorie der Tangenten und der Berührung von verschiedenen Ordnungen, nach den Grundsätzen der Geometrie der Alten 303

Zweiter Abschnitt. Von den gradlinigen Tangenten und von den Berührungs-Kreisen und dem geometrischen Ort ihrer Mittel-Puncte. Von den Krümmungs-Kreisen und dem geometrischen Ort ihrer Mittel-Puncte. Allgemeine Untersuchung der Berührung von Curven in der Ebene. Von der Berührung in singulairen Fällen und den Asymptoten 313

Dritter Abschnitt. Directe und umgekehrte Aufgaben über die Berührung der Curven. Untersuchung der Fälle, in welchen ein Verhältniss zwischen den beiden Elementen der Berührung erster Ordnung gegeben ist. Von der Curve, welche durch die singulaire Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ausgedrückt wird. 339

Vierter Abschnitt. Von der Berührung zweiter Ordnung. Theorie und Construction der singulairen Stammgleichungen höherer Ordnungen. Beispiel an der analytischen Theorie der Evoluten. 365

Fünfter Abschnitt. Von den grössten und kleinsten Werthen der Functionen einer veränderlichen Grösse 383

Seite.

Sechster Abschnitt. Von der Quadratur und Retification der Curven in der Ebene. Von dem Volumen und der Oberfläche der Conoïden. Allgemeine Regel für die analytische Auflösung dieser Art von Aufgaben 393

Siebenter Abschnitt. Theorie der Berührung der Curven doppelter Krümmung. Vom Krümmungs-Halbmesser, von den Mittel-Puncten der Krümmung und den geometrischen Orten derselben. Von den Evoluten der Curven doppelter Krümmung. Quadratur und Rectification dieser Curven 414

Achter Abschnitt. Von den krummen Flächen und ihren berührenden Ebenen. Theorie der Berührung der krummen Flächen. Von der Berührung der verschiedenen Ordnungen 438

Neunter Abschnitt. Von den Berührungs-Kugeln. Von den Linien der grössten und kleinsten Krümmung. Eigenschaften dieser Linien . . . 451

Zehnter Abschnitt. Auflösung einiger Aufgaben, bei welchen bestimmte Verhältnisse zwischen den Elementen der Berührung krummer Flächen in der ersten Ordnung gegeben sind. Zeichnung der Auflösungen. Gleichung developpabler Flächen. 463

Eilfter Abschnitt. Von den grössten und kleinsten Werthen der Ordinaten krummer Flächen. Allgemeine Auflösung der Aufgabe de maximis et minimis. Mittel, die Maxima und Minima der Functionen mehrerer veränderlichen Grössen zu untersuchen 472

Seite.

Zwölfter Abschnitt. Von den Aufgaben über Maxima und Minima, die sich auf die Variations-Rechnung beziehen. Von der für das Maximum und Minimum gemeinschaftlich Statt findenden Gleichung und vom Unterscheidungs-Zeichen der Maxima und Minima 500

Dreizehnter Abschnitt. Ausdehnung der obibigen Methode auf Functionen einer beliebigen Zahl veränderlicher Grössen. Aufgabe von der Brachystochrone. Kennzeichen an einer gegebenen Grösse, ob sie eine Ableitung erster, oder überhaupt beliebiger Ordnung sey 526

Vierzehnter Abschnitt. Von der Berechnung des Inhalts und der Oberfläche von Körpern von gegebener Gestalt 542

Dritter Theil.

Anwendung der Theorie der Functionen auf die Mechanik.

Seite.

Erster Abschnitt. Vom Gegenstande der Mechanik. Von der gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten Bewegung. Von der gradlinigen Bewegung überhaupt. Verhältnisse zwischen Raum, Geschwindigkeit und beschleunigender Kraft . . 567

Zweiter Abschnitt. Von der Zusammensetzung der Bewegungen, besonders dreier gleichförmigen. Von der Zusammensetzung und Zerlegung der Ge-

Seite.

schwindigkeiten und Kräfte. Von den Wurflinien im leeren Raume 586

Dritter Abschnitt. Von der krummlinigen Bewegung. Von den Geschwindigkeiten und Kräften bei diesen Bewegungen. Allgemeine Gleichungen der Bewegung eines von beliebigen Kräften getriebenen Körpers. Von den Mitteln, die Zeit zwischen diesen Gleichungen zu eliminiren, um die Bahn des Körpers zu finden 599

Vierter Abschnitt. Von der Aufgabe, den Widerstand des Mittels zu finden, in welchem ein geworfener Körper eine gegebene Curve beschreibt. Newtons Auflösung dieser Aufgabe in der ersten Ausgabe seiner Principien. Ursachen des Irrthums in dieser Auflösung. Unterschied zwischen der Methode der Reihen und der Methode der Ableitungen, oder der Differential-Rechnung 612

Fünfter Abschnitt. Von der Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Fläche, oder unter gewissen Bedingungen. Von der Bewegung mehrerer, unter einander verbundener Körper. Von den Bedingungs-Gleichungen zwischen den gegebenen Coordinaten dieser verschiedenen Körper und der Methode, daraus die Kräfte zu finden, die aus der Wechselwirkung entstehen. Allgemeiner Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten . 640

Sechster Abschnitt. Von dem Gesetze der Bewegung des Schwerpuncts. Von dem Gesetze der Flächen bei der drehenden Bewegung um eine feste Axe, oder um einen einzelnen festen Puuct, oder um den Schwerpunct, in freien Systemen . 654

Seite.

Siebenter Abschnitt. Vom dem Gesetze der lebendigen Kräfte bei der Bewegung eines, von beliebigen beschleunigenden Kräfte getriebenen Systems. Von der Erhaltung der lebendigen Kräfte bei dem Stosse elastischer Körper. Vom Verluste dieser Kräfte bei dem Stosse harter Körper, oder, im Allgemeinen, bei plötzlichen Veränderungen, die dem Systeme widerfahren können. Von der Summe der lebendigen Kräfte im Zustande des Gleichgewichts. Allgemeine Bemerkungen über die Ersparung der Kräfte bei Maschinen , 673

Zusatz zum zweiten Abschnitte des ersten Theils. 692

Ende des Inhalts.

Verzeichniss

einiger bei der Uebersetzung bemerkten Druckfehler des Originals, die daselbst nicht angezeigt sind.

Seite 25 *Zeile* 3 *v. u. steht* $\frac{x^6}{2.3.4.5}$ *statt* $\frac{x^5}{2.3.4.5}$.

— 26 — 13 *v. o.* — $\frac{y^2 i^2}{2}+$ *statt* $\frac{y'' i^2}{2}+$.

— 61 — 3 *v. u.* — *relativement à m statt relativement à x.*

— 85 — 8 *v. o. steht y et x statt y en x.*

— 121 — 4 *v. u.* — $tg\frac{2}{2}$ *statt* $tg\frac{z}{2}$.

— 145 — 6 *v. o.* — $-\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=0$ *et* $z-\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\times\frac{x}{y}=0$ *statt* $z'-y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\times\frac{1}{y}=0$ *et* $z_{,}-\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\times\frac{x}{y^2}=0$.

— 150 — 10 *v. u. steht* $=u'_{,}fz^2+2u'z_{,}zfz$ *statt* $=u'_{,}fz^2+2u'z_{,}f'zfz$.

— 157 — 7 *v. u. steht* $\varphi(P,Q)$ *statt* $\varphi(Q,R)$ *und P et Q statt Q et R,*

Seite 189 *Zeile* 8 *v. o. steht* $\sqrt{K}$ *statt* $2\sqrt{K}$.

— 218 — 16 *v. u. steht* $du = y\,dx$ *statt* $dy = y\,du$.

— 232 — 16 *v. o. steht courbe développable statt surface développable.*

— 236 — 16 *v. u. steht* $y = 0$ *statt* $y + 0$.

— 251 — 6 *v. u. steht courbes statt surfaces.*

— 251 — 11 *v. u. desgleichen.*

— 273 — 13 *v. o. steht* $f'(y)$ *etc. statt* $f'(y'')$ *etc.*

— 277 — 16 *v. n. steht la proposée statt la quantité proposée.*

— 281 — 16 *v. u. steht* $f''(y) = 2nf''(y,y') = 2m$ *statt* $f''(y) = 2n, f''(y,y') = 2m$.

— 281 — 11 *v. u. steht* $y'' - my'$ *stat* $y'' + my'$.

— 284 — 11 *v. u. steht* $2\varrho = f''(y,y'')$ *statt* $2\varrho = f''(y',y'')$.

— 290 — 3 *u.* 4 *v. u. steht à un plan statt celle d'un plan.*

— 292 — 10 *v. u. steht* $\omega'' f''(y'')$ *statt* $\omega'' f'(y'')$.

— 293 — 8 *v. u. desgleichen.*

— 303 — 10 *v. u. steht t, et u, statt t et u,*

— 305 — 14 *v. o. steht* $\frac{dx}{dy} \times \frac{dy}{dt}$ *statt* $\frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{dt}$.

— 307 — 7 *v. u. steht* $\sin t = -s$ *statt* $\sin t = -s'$.

— 317 — 2 *v. n. steht t, en x statt t et en x.*

Seite 329 *Zeile* 15 *v. u. steht par ces forces statt pour ces forces.*

— 336 — 3 *v. o. steht* $\frac{3q}{x'^3}$ *statt* $\frac{3qg}{x'^3}$.

— 337 — 8 *v. o. steht* $\frac{y'''}{2y''\sqrt{(1+y')}}$ *statt* $\frac{y'''}{2y''\sqrt{(1+y'^2)}}$.

— 337 — 10 *v. u. steht* $y = Ae^{ks}$ *statt* $y'' = Ae^{ks}$.

— 341 — 3 *v. o. steht* $y + Qo - Ro^2 - So^3 + So^3$ *statt* $y + Qo - Ro^2 + So^3$.

— 342 — 7 *v. o. steht* p *statt* γ.

— 343 — 8 *v. o. steht* $\frac{gT^2}{u}$ *statt* $\frac{gT^2}{2}$.

— 343 — 8 *v. u. steht* $\frac{\varrho}{r}$ *statt* $\frac{\varrho}{\gamma}$.

— 346 — 11 *v. o. steht* $\frac{gr}{2}$ *statt* $\frac{gr}{u}$.

— 360 — 15 *v. o. steht* x *statt* X.

— 375 — 2 *v. u. steht* u, v *les statt* u, v *etc. les.*

— 377 — 12 *v. u. steht* $MU^2 - NV^2 - Mu^2 - Nv^2 -$ *etc. statt* $MU^2 + NV^2 +$ *etc.* $- Mu^2 - Nu^2 -$ *etc.*

Vergleichung

der Paragraphen-Zahlen und Bemerkung der vorzüglichsten Abweichungen der beiden Ausgaben des Originals.

Zweite Ausgabe.	*Erste Ausgabe.*
Die Einleitung tritt an die Stelle von	§. 1—8.
1. *Th.* §. 1—13 *treten an die Stelle von*	§. 9—21.
§. 14—17 — — — —	§. 29—33.
§. 18—23 — — — —	§. 22—28.
§. 24—35 *u.* 38 — — —	§. 34—48.
§. 36—37 *kommt hinzu.*	
§. 39—75 *treten an die Stelle v.*	§. 49—88.
§. 76 *kommt hinzu.*	
§. 77 *tritt veränd. an die Stelle v.*	§. 89—91.
§. 78—80 *kommt hinzu.*	
§. 81—82 *treten an die Stelle v.*	§. 92—94.
§. 83—95 *treten an die Stelle v.*	§. 95—107.
2. *Th.* §. 1—38 — — — —	§. 108—146.
§. 39—42 *tret. gänzlich verändert an die Stelle von*	§. 147—151.
§. 43—76 *tret. an die Stelle v.*	§. 152—183.
§. 77—86. *Der* 14. *Abschnitt kommt hinzu.*	

3. *Th.* §. 1 — 4 *treten an die Stelle v.* §. 185—189.
§. 5 *ist der erweiterte* §. 189.
§. 7—19 *treten an die Stelle v.* §. 190—203.
§. 20—24 *tret. gänzlich verändert an die Stelle von* §. 204—206.
§. 25—26 *treten an die Stelle von* §. 206—207.
§. 27—30 *tr. veränd. an d. Stelle v.* §. 208—210.
§. 31—47 *tret. an die Stelle v.* §. 211—228.

Der Zusatz kommt hinzu.

Theorie

der

analytischen Functionen.

Enthaltend:

die Hauptsätze der Differential-Rechnung, ohne die Vorstellung vom Unendlich-Kleinen, von verschwindenden Grössen, von Grenzen und Fluxionen, ganz nach Art der algebraischen Analysis endlicher Grössen vorgetragen.

Einleitung.

Von den Functionen überhaupt. Von Stamm- und abgeleiteten Functionen. Von den verschiedenen Ansichten der Differential-Rechnung. Gegenstand dieses Werks.

Man nennt Function einer oder mehrerer Grössen, jeden Rechnungs-Ausdruck, in welchem diese Grössen auf irgend eine Weise vorkommen, sey es abgesondert oder verbunden mit andern Grössen, die als gegeben und unveränderlich betrachtet werden, während die Functions-Grössen alle mögliche Werthe erhalten können. Man sieht also eigentlich bei den Functionen nur allein auf diejenigen Grössen, welche veränderlich angenommen werden, ohne Rücksicht auf die Constanten, die damit verbunden seyn können. [*Man könnte die unabhängig veränderlichen Grössen, aus welchen eine Function zusammengesetzt ist, Elemente der Function nennen, auch statt des willkürlichen Worts Function, des bezeichnenderen, abhängige Grösse sich bedienen.*]

Die ersten Analysten gebrauchten das Wort Function nur, um allgemein die Potenzen einer Grösse zu bezeichnen. Späterhin dehnte man die

Bedeutung des Worts auf jede, aus einer andern Grösse beliebig zusammengesetzte, Grösse aus. Leibnitz und die Bernouilli's bedienten sich desselben zuerst in der allgemeineren Bedeutung; jetzt ist dieser Gebrauch allgemein.

Wenn man die veränderliche Grösse, von welcher eine Function abhängt, zunehmen lässt, indem man derselben eine unbestimmte Grösse beifügt, so kann man die Function, wenn sie eine algebraische ist, durch die gewöhnlichen Regeln der Algebra, nach Potenzen der unbestimmten Grösse, entwickeln. Das erste Glied der Entwickelung ist nothwendig die Function selbst, welche wir primitive (*fonction primitive*, Stamm-Grösse) nennen wollen. Die folgenden Glieder werden verschiedene Functionen der veränderlichen Grösse enthalten, multiplicirt mit den verschiedenen Potenzen der unbestimmten Grösse. Diese neue Functionen werden einzig und allein von der Stamm-Function abhängen, aus welcher sie entstehen und können folglich abgeleitete Functionen oder Ableitungen (*fontions derivées*) heissen. Allgemein kann die Stammgrösse, sie sey von algebraischer Form oder nicht, auf eben die Weise, entweder wirklich entwickelt werden, oder, als sey sie entwickelt, betrachtet werden und folglich Ableitungen haben. Durch diese Behandlung der Functionen entsteht eine Analyse, die die gewöhnliche, an Allgemeinheit und an zahlreichen Anwendungen, weit übertrifft. Im Laufe dieses Werks wird sich zeigen, dass die Rechnung welche man gewöhnlich den Transcendental- oder Infinitesimal-Calcul nennt, im Grunde Nichts anders ist, als die Rech-

nung mit Stamm- und abgeleiteten Grössen, und der Differential- und Integral-Calcul nichts anders als die Rechnung mit dergleichen Functionen.

Die ersten Mathematiker, welche von dem Differential-Calcul Anwendungen machten, Leibnitz, Bernouilli, L'Hopital haben ihn auf die Eigenschaften unendlich kleiner Grössen verschiedener Ordnungen und auf den Umstand gegründet, dass man die Grössen, wenn ihr Unterschied gegen sie selbst unendlich klein ist, als gleich betrachten und behandeln kann. Zufrieden damit, dass sie durch ihre Rechnungs-Methode, auf einem leichten und sichern Wege, genaue Resultate fanden, bemühten sie sich nicht weiter, die Methode selbst fester zu begründen. Euler und d'Alembert, die ihnen nachfolgten, haben dem Mangel einer festeren Begründung dadurch abzuhelfen gesucht, dass sie an einzelnen Anwendungen zeigten, dass die Differenzen, welche man unendlich klein annimmt, unbedingt Null sind, und dass ihre Verhältnisse, die allein in Rechnung kommen, nichts anders sind als die Grenzen der Verhältnisse endlicher aber unbestimmter Differenzen.

Man sieht indessen leicht ein, dass diese Vorstellungen, obgleich an sich richtig, für Grundsätze einer Wissenschaft, die auf Evidenz gebauet seyn soll, nicht klar genug sind, wenigstens für Anfänger nicht. Ausserdem scheint mir der wahre Grund von der Möglichkeit richtiger Resultate in der Differential-Rechnung, in welcher man, so wie sie ist, wirklich mit unendlich kleinen, oder für unendlich klein angenommenen Grössen umgeht und dergleichen

Grössen berechnet, darin zu liegen, dass der, aus der falschen Voraussetzung des Unendlich Kleinen, entstehende Fehler durch einen andern Fehler der Methode selbst, vermöge dessen man bei der Differentiation immer nur unendlich Kleine einer und derselben Ordnung beibehält, verbessert oder aufgehoben wird. Wenn man z. B. eine krumme Linie als ein Vieleck von unendlich vielen kleinen Seiten betrachtet, deren Verlängerungen die Tangenten der krummen Linie sind, so setzt man offenbar etwas Falsches voraus; aber der Irrthum wird, wenn man weiter rechnet, durch Weglassung unendlich kleiner Grössen verbessert. Dieser Umstand lässt sich leicht an Beispielen zeigen, obgleich die allgemeinere Nachweisung schwer seyn möchte. [*Mit Recht nennt Lagrange die Grössen unendlich kleiner Voraussetzung eine falsche (fausse); denn eine unendlich kleine Grösse ist eine Grösse, deren Kleinheit, wie es ihr Name bezeichnet, alle Grenzen überschreitet, also Etwas das gar keine Grösse hat, mithin eine Grösse, die keine Grösse ist.*]

Newton, um das Unendlich-kleine zu vermeiden, liess die mathematischen [*Zahlen- und Raum-*] Grössen durch Bewegung entstehen und suchte eine Methode, um die Geschwindigkeiten, oder vielmehr die Verhältnisse der veränderlichen Geschwindigkeiten, mit welchen diese Grössen entstehen, zu bestimmen. Man nennt dieses Verfahren, nach ihm, die Methode der Fluxionen, oder den Fluxions-Calcul, weil Newton die Geschwindigkeiten, Fluxionen der Grössen nannte. Die Fluxions-Methode oder

Fluxions-Rechnung kommt sowohl im Wesentlichen, als in ihren Operationen mit der Differential-Rechnung überein. Sie weicht von dieser bloss in den Grundbegriffen ab, welche dabei in der That klarer zu seyn scheinen, indem Jedermann von Geschwindigkeit einen Begriff hat, oder wenigstens zu haben glaubt. Aber, eines Theils bringt man mit dem Begriff von Bewegung etwas Fremdartiges in eine Rechnung, die nur algebraische Grössen zum Gegenstande hat, und setzt sich in die Nothwendigkeit, die Grössen als Linien zu betrachten, welche von dem bewegten Punkt oder Körper durchlaufen werden; andern Theils muss man auch gestehen, dass sich von der Geschwindigkeit eines Punkts in jedem Augenblick, wenn die Geschwindigkeit veränderlich ist, doch eigentlich keine klare Vorstellung fassen lässt. Aus der gelehrten Abhandlung von Maclaurin über die Fluxionen kann man sehen, wie schwer es ist, die Methode der Fluxionen strenge zu begründen und wieviel eigenthümliche Kunstgriffe zu den Beweisen der einzelnen Theile derselben nothwendig sind.

Auch hat Newton selbst, in seinem Werke *de principiis*, der Methode der letzten Verhältnisse verschwindender Grössen, als der kürzern, den Vorzug gegeben, und die Principien der Fluxionen beziehen sich am Ende auf nichts anders als auf die Gründe dieser zweiten Methode. Dieselbe hat aber, eben wie diejenige der Grenzen, von welcher oben die Rede war, und welche von jener nur gleichsam eine algebraische Uebersetzung ist, die grosse Unvollkommenheit, dass sie die Grössen grade in dem Augenblick betrachtet, wo sie aufhören Grössen zu seyn

Obgleich man einen sehr klaren Begriff von dem Verhältniss zweier Grössen hat, so lange sie wirklich da sind, so hört doch in der That die Klarheit und Bestimmtheit des Begriffs auf, sobald die Grössen, beide zugleich, verschwinden.

Um diese Unvollkommenheit zu verbessern, schlug neuerlich ein geschickter englischer Geometer, dem man wichtige analytische Entdeckungen verdankt, statt der bis dahin von allen englischen Mathematikern ängstlich beigehaltenen Fluxions-Methode, eine andere, rein analytische Methode vor, die der Differential-Rechnung ähnlich ist, in welcher aber, statt unendlich-kleiner oder gänzlich verschwindender Differenzen der veränderlichen Grössen, die verschiedenen Werthe dieser Grössen selbst in Rechnung gebracht werden, die man hernach dadurch einander gleich macht, dass man, durch Division, die Factoren wegschafft, welche die Gleichheit hindern. Durch dieses Mittel vermeidet man in der That die unendlich kleinen und verschwindenden Grössen, aber die Methode und die Anwendung der Rechnung sind beschwerlich und wenig natürlich. Man nimmt dem Differential-Calcul, wenn man seine Principien auf diesem Wege begründen will, seine besten Vorzüge, nemlich die Einfachheit der Methode und die Leichtigkeit der Operationen. Man sehe das Werk: *the residual analysis, a new branch of the algebric art, by John Landen, London* 1764, desgleichen die Abhandlungen dieses nemlichen Schriftstellers vom Jahr 1758, über den nemlichen Gegenstand.

Dieser Wechsel der Begründungs-Art und des Vortrages der Grundsätze der Differential-Rechnung,

und selbst die Benennung des Calculs, scheinen anzudeuten, dass die richtige Theorie desselben noch nicht entdeckt ist, obgleich man die einfachsten und bequemsten Regeln für den Mechanismus der Operationen kennt.

Man wird noch mehrere Betrachtungen über diesen Gegenstand in der ersten Vorlesung über die Functions-Rechnung [*dem zweiten Bande dieser Uebersetzung*] finden.

In einer Abhandlung vom Jahr 1772, welche in den Berliner Memoiren gedruckt ist, und welche die Analogie der Differentiale und positiven Potenzen, so wie der Integrale und negativen Potenzen zum Gegenstande hat, behauptete ich, dass die Theorie der Entwickelung der Functionen in Reihen, die wahren, und von dem Begriffe des Unendlich-kleinen und der Grenzen gänzlich unabhängigen Principien der Differential-Rechnung enthalte; ich bewies nach dieser Theorie den taylorschen Satz, welcher der Grund-Pfeiler der Reihen-Methode ist, und welchen man bis dahin nur durch die Differential-Rechnung selbst, also nur durch unendlich-kleine Grössen bewiesen hatte.

Späterhin hat Arbogast der Academie der Wissenschaften eine Abhandlung vorgelegt, in welcher die nemlichen Ideen, mit Entwickelungen und Anwendungen die ihm zugehören, vorgetragen werden. Da aber der Verfasser über diesen Gegenstand noch Nichts weiter bekannt gemacht hatte, denn das Werk des seligen Arbogast vom Jahr 1800, unter dem Titel: Derivations-Rechnung, hat etwas Anders zum Gegenstande, wie es auch der Verfasser am

Schlusse der Vorrede selbst sagt, und ich durch Umstände veranlasst wurde, die allgemeinen Principien der Analysis zu entwickeln, so habe ich meine frühern Ideen über den Differential-Calcul wieder aufgenommen und die Untersuchungen darüber erneuert, um sie noch fester zu begründen und zu verallgemeinern. Daraus ist die gegenwärtige Schrift entstanden, welche ich nur allein in Erwägung des Nutzens für Diejenigen, welche diesen wichtigen Theil der Analysis ergründen wollen, bekannt mache. [*Dieser Nutzen ist offenbar sehr gross; denn wer die Mathematik studirt ohne ihren Principien mit klaren und natürlichen Ansichten auf den Grund zu kommen, geräth leicht in Gefahr, seine Begriffe, besonders durch die sogenannte höhere Mathematik, nicht aufzuklären, sondern noch mehr zu verwirren. Fängt der Lernende erst an, in Wortspielen, wie vom Unendlichen, in welchen kein Sinn ist, Sinn zu finden, und also Etwas, was Nichts ist, für Etwas zu halten, so ist er schon aus dem Gebiete der Mathematik schon gänzlich verirrt und in ein mystisches Dunkel gerathen, welches keinen Schutz mehr gegen Irrthum hat und aus welchem der Rückweg, wie aus jeder Finsterniss, schwer ist. Das Unendliche, als Grösse genommen, ist unmathematisch; die Mathematik hat es überall nur mit wirklichen Grössen zu thun, und eine Grösse die nicht Jedem begreiflich ist, und die nicht sinnlich im Umfange des Endlichen liegt, ist gar kein Vorwurf der Mathematik.*]

Es kann befremdend scheinen, dass eine richtigere Art die Differential-Rechnung zu behandeln

nicht früher von den Geometern bemerkt worden und besonders, dass sie Newton entgangen ist, der die Methode der Reihen und der Fluxionen erfand. Aber Newton bediente sich einer einfachen Betrachtung der Reihen, nur zur Auflösung der dritten Aufgabe im zweiten Buche seiner Principien, wo das Gesetz des Widerstandes gesucht wird, unter welchem ein bewegter schwerer Körper einen gegebenen Raum beschreibet, eine Aufgabe, die wesentlich vom Differential- oder Fluxions-Calcul abhängt. Bekanntlich fand Johann Bernoulli, dass diese Auflösung falsch ist, wenn man sie mit der des Differential-Calculs vergleicht und sein Neffe Nicolaus behauptete, der Fehler entstehe daher, dass Newton das dritte Glied der convergirenden Reihe, in welche er die Ordinate der gegebenen Curve aufgelöset hatte, für das zweite, das vierte Glied für das dritte Differential dieser Ordinate genommen habe, statt dass nach den Regeln der Differential-Rechnung das erste dieser Glieder nur die Hälfte, das andere nur der sechste Theil jener Differentiale hätte sein sollen. (Man sehe die Abhandlungen der Academie der Wissenschaften von 1711 und den ersten Band von Johann Bernoullis Werken.) Newton ging, ohne zu antworten, von seiner ersten Methode gänzlich ab und gab in der zweiten Auflage seiner Principien eine andere, auf die Differential-Rechnung gegründete, Auflösung der Aufgabe. Seitdem hat man nicht weiter an die Anwendung der Methode der Reihen auf solche Aufgaben gedacht, als nur um den Irrthum Newtons, und dass die Erinnerung Nicolaus Bernoullis berücksichtiget werden müsse, zu zeigen.

(Man sehe in der Encyclopädie, die Artikel: Differential, Kraft. Wir werden weiter unten zeigen, dass der Irrthum nicht in der Methode, sondern blos darin lag, dass Newton nicht alle Glieder, die in Betracht kommen, in Rechnung gebracht hatte. Hierdurch lässt sich seine erste Auflösung, deren kein Commentator seiner Principien weiter erwähnt, berichtigen.

Der Gegenstand dieses Werks ist: die Theorie der als Stammgrössen und Ableitungen betrachteten Functionen und die Auflösung der vorzüglichsten von der Differential-Rechnung abhängigen Aufgaben der Analysis, Geometrie und Mechanik zu begründen und dadurch der Auflösung dieser Aufgaben die Strenge der Beweise der Alten zu geben.

Erster Theil.

Uebersicht der Theorie mit ihren vorzüglichsten Anwendungen auf die Analysis.

Erster Abschnitt.

Entwickelung einer Function von einer veränderlichen Grösse in eine Reihe, wenn man der veränderlichen Grösse ein Wachsthum beilegt. Stufenweise Bildung der Glieder der Reihe. Wichtiger Lehrsatz über die Natur dieser Reihe.

1.

Wir wollen durch den Buchstaben f oder F, vor das Zeichen der veränderlichen Grösse gesetzt, eine beliebige Function dieser Grösse, d. h. jede von ihr abhängige Grösse, die sich, mit ihr zugleich, nach einem bestimmten Gesetz verändert, bezeichnen. Also bedeutet fx oder Fx eine Function der veränderlichen Grösse x. Will man die Function von einer, schon aus x zusammengesetzten Grösse, wie x^2, $a + bx$ *etc.* bezeichnen, so schliesse man die Grösse in zwei Klammern. So wie also fx eine Function von x

bedeutet, so sind $f(x^2)$, $f(a+bx)$ *etc.* Functionen von x^2, $a+bx$ *etc.*

Um Functionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen wie x, y zu bezeichnen, wollen wir $f(x, y)$ schreiben u. s. w.

Wenn wir durch andre Zeichen Functionen ausdrücken, werden wir es anzeigen.

Wir wollen nun eine Function fx einer beliebigen veränderlichen Grösse x betrachten. Setzt man $x+k$ statt x, wo k eine beliebige unbestimmte Grösse ist, so erhält man $f(x+k)$ und man kann diese Grösse nach der Theorie der Reihen in eine Reihe von der Form

$$f(x+k) = fx + pk + qk^2 + rk^3 \ldots\ldots$$

entwickeln, worin die Coefficienten p, q, $r \ldots$ der verschiedenen Potenzen von k, neue, von der Stammgrösse fx abgeleitete, und von k unabhängige Functionen von x sind. [*Lagrange bezeichnet die Veränderung von x durch i. Der Uebersetzer hat statt i, weil dieser Buchstabe theils unbequem ist, theils von einigen Schriftstellern, nach Gauss, zur Bezeichnung von $\sqrt{-1}$ ausschliesslich gebraucht wird, den Buchstaben k gesetzt.*]

2.

Um aber nichts Unbegründetes anzunehmen, wollen wir damit anfangen, die Gestalt der Reihe für die Entwickelung von fx zu untersuchen, die entsteht, wenn man in fx, $x+k$ statt x setzt und von welcher wir vorausgesetzt haben, dass sie k nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten enthalten könne.

Die Voraussetzung rechtfertigt sich zwar durch die Entwickelung der bekannten Functionen; aber so viel mir bekannt, ist sie noch nie *a priori* zu beweisen versucht worden, welches gleichwohl um so nothwendiger seyn möchte, da es wirklich Fälle giebt, in welchen die Entwickelung nicht Statt findet. Ausserdem beruht die ganze Differential-Rechnung auf dieser Entwickelung, und die Ausnahme Fälle sind es, in welchen man die Rechnung im Irrthum glaubte.

Ich will zuerst beweisen, dass in der, aus der Entwickelung der Function $f(x+k)$ entstehenden Reihe, keine Potenz von k mit gebrochenen Exponenten vorkommen kann, wenn man nicht etwa der Grösse k besondere bestimmte Werthe beilegt.

Es ist in der That klar dass die Wurzeln von k nur von Wurzelgrössen in der Stammgrösse fx herrühren können und dass die Substitution von $x+k$ statt x, die Zahl der Wurzelgrössen weder vermehren noch vermindern, noch ihre Natur ändern kann, in so fern x und k unbestimmte Grössen sind. Anderntheils weiss man aus der Natur der Gleichungen, dass eine Wurzelgrösse allemal so viele verschiedene Werthe hat, als ihr Exponent, Einheiten, und dass folglich jede irrationale Function so viele verschiedene Werthe hat, als man Combinationen aus den verschiedenen Werthen der Wurzelgrössen, die sie enthält, machen kann. Könnte also die Entwickelung der Function $f(x+k)$ ein Glied von der Form $uk^{\frac{m}{n}}$ haben, so müsste erstlich fx nothwendig eine irrationale Function seyn und folglich eine gewisse Zahl verschiedener Werthe haben; die nem-

liche Zahl von Werthen müsste dann $f(x+k)$ und dessen Entwickelung haben. Liesse sich nun diese Entwickelung durch die Reihe

$$fx + pk + qk^2 + \ldots\ldots + uk^{\frac{m}{n}}$$

ausdrücken, so würde sich jeder Werth von fx mit jedem der n Werthe der Wurzelgrösse $\sqrt[n]{k^m}$ verbinden, so dass die entwickelte Function $f(x+k)$ mehrere verschiedene Werthe haben würde als die unentwickelte, welches ungereimt ist.

Dieser Beweis ist allgemein und strenge, so lange x und k unbestimmte Grössen sind; aber er hört auf es zu seyn, wenn man x bestimmte Werthe beilegt; denn es ist möglich, dass diese Werthe Wurzelgrössen in fx aufheben, die in $f(x+k)$ bleiben. Wir werden weiter unten, im fünften Abschnitte, diese besondern Fälle, und was daraus folgt, untersuchen.

Es ist gezeigt worden, dass die Entwickelung von $f(x+k)$, im Allgemeinen, keine Potenzen von k mit gebrochenen Exponenten enthalten kann. Es ist leicht zu sehen, dass auch keine Potenzen mit negativen Exponenten vorkommen können.

Denn wäre unter den Gliedern der Entwickelung eines von der Form $\frac{r}{k^m}$, wo m eine ganze positive Zahl ist, so würde dieses Glied unendlich gross sein, sobald man $k = 0$ setzt. Also würde die Function $f(x+k)$ unendlich gross sein für $k = 0$, folglich müsste fx einen unendlichen Werth haben, welches gleichwohl nur für besondere Werthe von x möglich ist.

[Mei-

[*Meines Erachtens ist dieser Beweis, dass die Reihe für die Entwickelung einer beliebigen Function $f(x + k)$, die Grösse k nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten enthalten kann, erstens unzulänglich, wenigstens schwach und für Principien einer ganzen Wissenschaft viel zu verwickelt; dann aber ist auch, glaube ich, ein Beweis überhaupt* n i c h t n ö t h i g.

Unzulänglich ist der Beweis, weil nur allenfalls gezeigt wird, dass k nicht in Potenzen von gebrochenen und negativen Exponenten vorkommen kann. Es wird aber nicht bewiesen, dass es nicht noch andere Formen des Vorkommens von k giebt, selbst solche, die man noch nicht kennet, und für welche die obigen Momente des Beweises aufhören. Sodann ist die Strenge des Beweises, auch selbst für die Nicht-Existenz der gebrochnen und negativen Exponenten, noch zweifelhaft, denn es wäre z. B. vielleicht möglich, dass die Combination der n Werthe von $k^{\frac{m}{n}}$ mit den Werthen von fx, die Zahl der Werthe von $f(x + k)$ nicht über die Zahl der Werthe von fx hinaus vermehrte. Die Gleichungen des dritten und vierten Grades geben davon ein Beispiel. Der Ausdruck der Wurzeln des dritten Grades ist von der Form $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$. Nach L a g r a n g e's *Beweisart müsste diese Grösse nothwendig immer 6 Werthe haben, den $\sqrt[3]{A}$ hat deren 3 und $\sqrt[3]{B}$ auch 3, welche mit einander combinirt 6 Werthe geben. Gleichwohl hat wirklich die*

Gleichung des dritten Grades nur 3 Wurzeln, folglich die Grösse $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ nicht sechs, sondern nur drei Werthe. Nicht viel anders ist es mit den negativen Exponenten. Man kann im Voraus unmöglich wissen, ob sich nicht Glieder mit negativen Exponenten, die für $k = o$ unendlich gross sind, aufheben. Der Beweis ist also, wie es scheint, unzulänglich. Er handelt in der That von einem Gegenstande der noch nicht da ist, von der Form einer Grösse die erst gefunden werden soll und schliesst also von Eigenschaften, die erst gefunden werden sollen, auf diese Eigenschaften selbst, welches die Genauigkeit des Resultats zweifelhaft macht. Der Beweis kann also nicht wohl strenge seyn. Wäre er es aber auch, so wäre er doch wenigstens zur Begründung einer ganzen Wissenschaft gewiss zu verwickelt und viel zu wenig natürlich. Die Theorie der Gleichungen, auf welcher er beruht, hat viel zu grosse Schwierigkeiten, und ist noch viel zu unvollkommen, als dass sich auf sie ein Beweis für Elemente gründen liesse. Es ist richtig, dass eine Grösse wie $\sqrt[n]{k}$, n Wurzeln hat, aber es sind darunter unmögliche. Der Begriff unmöglicher Grössen ist aber kaum viel klarer, als der von unendlichen, oder verschwindenden Grössen. Man würde also durch den Tausch eigentlich nicht Viel gewinnen. Es wäre in der That sehr übel, wenn die sehr einfache Rechnung mit Functionen, oder mit veränderlichen Grössen, wirklich auf so dunkeln und verwickelten Begriffen, wie die von unmöglichen Grössen, beruhte.

Glücklicherweise ist es wohl nicht so. Es lässt sich zeigen, dass der Beweis für die Nicht-Existenz andrer, als ganzer positiver Exponenten von k, in der Entwicklung von f(x + k), unnöthig ist. Wie nemlich die Folge dieses Buchs zeigt lässt sich f(x + k) wirklich entwickeln und die Glieder der Reihe lassen sich sämmtlich finden, ohne die Bedingung, dass die Reihe für diese Entwickelung, k nur allein Potenzen von ganzen positiven Exponenten enthalte. Die Entwickelungs-Operation geschieht mit einer Strenge und Einfachheit, die nichts zu wünschen übrig lässt. Da nun grade dadurch, dass man die Glieder der Reihe wirklich findet, also durch die That, gezeigt wird, dass die Entwickelung mit ganzen positiven Exponenten von k möglich ist, so ist es ganz gleichgültig, ob etwa auch noch eine andere Entwickelung, oder ob nur diese allein Statt findet. Es kommt keinesweges darauf an, zu zeigen, dass nur allein die Entwickelung mit ganzen positiven Exponenten von k möglich ist, (und dies ist wirklich nicht der Fall, vielmehr sind unzählige Formen für die Entwickelung einer Grösse möglich), sondern es kommt darauf an, die Grösse f(x + k), und zwar grade nur mit Potenzen von k von ganzen positiven Exponenten, wirklich zu entwickeln, unbekümmert darum, ob noch eine andere Entwickelung möglich sey, oder nicht. Der Zweck der Rechnung verlangt grade die Entwickelung mit ganzen positiven Exponenten, und keine andere. Alle übrigen sind ihm gleichgültig, und dass die

Entwickelung existirt oder möglich sey, zeigt sich in jedem besondern Falle dadurch, dass man sie wirklich verrichtet. Es lässt sich in der That schwerlich allgemein zeigen, dass die Entwickelung mit ganzen positiven Exponenten **immer** *existire; denn sie existirt wirklich nicht immer; viel weniger also kann sich zeigen lassen, dass nicht etwa eine andere existire. Der obige Beweis hat unmöglich gelingen können und wird nie gelingen, weil man Etwas zu beweisen trachtet, was wirklich nicht immer der Fall ist. Glücklicherweise aber ist er auch, wie gesagt, nicht nöthig. Man* **setzt** *die Gestalt der Entwickelung von $f(x+k)$ mit ganzen positiven Exponenten von k* **willkührlich voraus;** *denn nur diese Entwickelung und keine andere ist nothwendig. Operirt man nun richtig und findet die Glieder der Reihe, so ist natürlich auch kein Zweifel, dass die Reihe existirt, denn man könnte sonst unmöglich richtig operirt haben. Man sehe ein Mehreres über diesen Gegenstand in einer kleinen Schrift des Uebersetzers über die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Grössen auf Geometrie und Mechanik, Berlin bei* **Maurer**, 1816, *und im ersten Bande seiner Sammlung mathematischer Aufsätze uud Abhandlungen, ebendaselbst,* 1821. *S.* 177. *etc.*]

3.

Nachdem wir uns auf diese Weise von der Allgemeinheit der Form der Entwickelung der Function $f(x+k)$ überzeugt haben, wollen wir näher sehen, worin die Entwickelung besteht und was ihre Glie-

der einzeln bedeuten. [*Die eigenthümlichere Bedeutung der Glieder findet sich erst bei den einzelnen Anwendungen auf diesen oder jenen Gegenstand.*]

Zuerst ist klar, dass man, um den von k unabhängigen Theil zu finden, nur $k = 0$ setzen darf, wodurch die Grösse $f(x + k)$ in fx übergeht. Der von $f(x + k)$ übrig bleibende Theil, wenn k gleich Null gesetzt wird, ist also fx, so dass $f(x + k)$ gleich ist: fx, zusammengenommen mit einer Grösse, die für $k = 0$ verschwindet, und die folglich mit einer Potenz von k multiplicirt ist, deren Exponent eine positive Zahl ist, oder dafür angesehen werden kann. Und da wir bewiesen haben, dass keine Potenzen von k mit gebrochenen Exponenten in der Entwickelung von $f(x + k)$ vorkommen können, so folgt, dass die Grösse nur mit einer Potenz von k von ganzen positiven Exponenten multiplicirt seyn, und folglich nur von der Form kP seyn kann, wo P eine Function von x und k ist, die für $k = 0$ nicht unendlich gross ist. [*Dass die Entwickelung von $f(x + k)$ von der Form $f(x + k) = fx + kP$ sey, ist, wie oben bemerkt, Voraussetzung. Es sind unendlich viele verschiedene Entwickelungen von $f(x + k)$ möglich. Für die welche man braucht ist die erste Bedingung die, dass sie in fx übergehe für $k = 0$; woraus folgt, dass der erste Theil, ohne k, nothwendig fx selbst seyn muss. Die andere Bedingung ist, dass in dem Theil mit k, die Grösse k nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten vorkomme, und zwar von allen ganzen Zahlen von 1 an.*]

Man erhält also

$$f(x+k) = fx + kP; \text{ folglich}$$
$$f(x+k) - fx = kP.$$

Das erste Glied muss durch k theilbar seyn, weil es gleich kP ist. Dividirt man mit k, so erhält man

$$P = \frac{f(x+k) - fx}{k}.$$

Dieses P ist, wie man sieht, ebenfalls eine Function von x und k. Man kann also davon das, was von k unabhängig ist, und folglich für $k = 0$ nicht verschwindet, absondern. Was aus P wird, wenn man $k = 0$ setzt, sey p, so ist p eine Function von x und k; und durch ein, dem obigen ähnliches Raisonnement, beweiset man, dass $P = p + kQ$, wo kQ denjenigen Theil von P bedeutet, welcher für $k = 0$ verschwindet, Q aber eine neue Function von x und k ist, die für $k = 0$ nicht unendlich gross ist.

Man erhält also $P - p = kQ$. $P - p$ muss durch k theilbar seyn weil es kQ ist, also erhält man

$$Q = \frac{P - p}{k}.$$

Der Werth von Q für $k = 0$ sey q, so ist q eine Function von x, ohne k, und der andere Theil von Q, welcher mit k zugleich verschwindet, ist, wie oben, von der Form kR, wo R wiederum eine Function von x und k ist, welche man findet wenn man $Q - q$ durch k dividirt u. s. w.

Man erhält also

$$f(x+k) = fx + kP, \quad P = p + kQ, \quad Q = q + kR,$$
$$R = r + kS \quad etc.$$

folglich, wenn man diese Ausdrücke nach und nach substituirt,

$$f(x+k) = fx + kP = fx + kp + k^2 Q = fx + kp + k^2 q + k^3 R = etc.$$

welches für die Entwickelung von $f(x+k)$ eine Reihe von der Form giebt, wie wir sie oben vorausgesetzt haben [*und zwar* v o r a u s g e s e t z t, *ohne dass im Voraus ein Beweis der Zulässlichkeit der Form nöthig wäre.*]

4.

Es sey zum Beispiel $fx = \frac{1}{x}$, so erhält man

$$f(x+k) = \frac{1}{x+k}, \text{ also}$$

$$kP = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x} = \frac{-k}{x(x+k)}, \; P = -\frac{1}{x(x+k)}, \; p = -\frac{1}{x^2}$$

$$kQ = -\frac{1}{x(x+k)} + \frac{1}{x^2} = \frac{k}{x^2(x+k)}, \; Q = \frac{1}{x^2(x+k)}, \; q = \frac{1}{x^3}$$

$$kR = \frac{1}{x^2(x+k)} - \frac{1}{x^3} = -\frac{k}{x^3(x+k)}, \; R = -\frac{1}{x^3(x+k)},$$

$$r = -\frac{1}{x^4} \; etc. \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{(x+k)} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x(x+k)} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^2(x+k)}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^3} - \frac{k^3}{x^3(x+k)} = etc.$$

wie es die wirkliche Division [*von* $x+k$ *in* 1] giebt.

Wir wollen zum zweiten Beispiel die irrationale Function $\sqrt{x}$ nehmen. Man erhält

$$fx = \sqrt{x}, \; f(x+k) = \sqrt{(x+k)} = \sqrt{x} + kP, \text{ also}$$

$$kP = \sqrt{(x+k)} - \sqrt{x} = \frac{k}{\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{(x+k)} + \sqrt{k}}, \; p = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$kQ = P - p = \frac{1}{\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{(x+k)}}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}]} = -\frac{k}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}]^2}$$

$$Q = -\frac{1}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}]^2}, \quad q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}}$$

$$kR = Q - q = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\frac{1}{4x} - \frac{1}{[\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}]^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{k - 2x + 2\sqrt{x} + \sqrt{(x+k)}}{4x[\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}]^2}$$

$$= \frac{k}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{(x+k)} + 3\sqrt{x}}{4x[\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}]^3}$$

$$R = \frac{\sqrt{(x+k)} + 3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}[\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}]^3}, \quad r = \frac{1}{16x^2\sqrt{x}} \text{ etc.}$$

so dass

$$\sqrt{(x+k)} = \sqrt{x} + \frac{k}{\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}]^2}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{(x+k)} + 3\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}[\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}]^3} k^3$$

$$= \sqrt{x} + \frac{k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{k^3}{16x^2\sqrt{x}} - \text{etc.}$$

Die letzte Reihe ist die nemliche, welche man durch die wirkliche Ausziehung der Quadrat-Wurzel, oder durch die Binomial-Formel findet.

5.

Die Operation ist bei mehr verwickelten, irrationalen Grössen schwierig, allein die Schwierigkeit verschwindet, wenn man die Wurzelzeichen in Beziehung auf k, wegschafft.

Wir wollen zum Beispiel von der Gleichung $\sqrt{(x+k)} = \sqrt{x} + kP$ ausgehen. Dieselbe giebt,

zum Quadrat erhoben, um k von dem Wurzelzeichen zu befreien, und nachdem man mit k dividirt hat,

$$1 = 2P\sqrt{x} + kP^2.$$

Für $k = 0$ ist $P = p$, also $1 = 2p\sqrt{x}$ und folglich $p = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Man mache also $P = p + kQ$, so erhält man, nach der Division mit k,

$$0 = \frac{1}{4x} + 2Q\sqrt{x} + \frac{kQ}{\sqrt{x}} + k^2Q^2.$$

Setzt man $k = 0$, so ist $Q = q$, also

$\frac{1}{4x} + 2q\sqrt{x} = 0$, woraus folgt: $q = -\frac{1}{8x\sqrt{x}}$.

Man kann also $Q = q + kR$ setzen u. s. w.

Man kann auch die Grössen p, q, r noch leichter finden, wenn man sogleich

$$\sqrt{(x+k)} = \sqrt{x} + pk + qk^2 + rk^3 \ldots\ldots$$

setzt, diese Gleichung auf beiden Seiten zum Quadrat erhebt, um k unter den Wurzelzeichen wegzuschaffen, und alsdann die Glieder mit gleichen Potenzen von k vergleicht, damit k unbestimmt bleibe, wie man es voraussetzet. Aber die vorige Methode hat den Vorzug, dass die Reihe nicht weiter entwickelt wird als man will, und dass sie den genauen Werth des Rests giebt. Man erhält z. B. wenn man beim zweiten Gliede pk stehen bleibt, Qk^2 für den Werth des Restes und kann Q durch die Auflösung der Gleichung in Q bestimmen. In dem obigen Beispiele ist diese Gleichung

$$k^2Q^2 + Q\left(2\sqrt{x} + \frac{k}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{4x} = 0.$$

Um diese Gleichung so aufzulösen, dass Q kein k

mehr enthält, darf man nur $Q = \frac{1}{V}$ setzen, welches die Gleichung auf die Form

$$V^2 + 4V(2x\sqrt{x} + k\sqrt{x}) + 4xk^2 = 0$$

bringt, woraus folgt

$$V = -4x\sqrt{x} - 2k\sqrt{x} \pm 4x\sqrt{(x+k)}.$$

Da Q für $k = 0$ nicht unendlich gross sein darf (3.) so darf V in diesem Fall nicht Null seyn. Man muss also das untere Zeichen der Wurzelgrösse nehmen und erhält folglich

$$V = -2\sqrt{x}(2x + k) - 4x\sqrt{(x+k)}$$

und daraus

$$Q = -\frac{1}{2\sqrt{x}(2x+k) + 4x\sqrt{(x+k)}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}]^2}$$

wie oben. Auf ähnliche Weise verfährt man in ähnlichen Fällen.

6.

Aber der Hauptvortheil unserer Methode besteht darin, dass sie zeigt wie die Functionen p, q, r.... von der Stamm-Function fx abhängen und besonders, dass sie die Gleichzeitigkeit des Verschwindens der Reste kP, kQ, kR *etc.* mit k beweiset, [*sie beweiset sie nicht, sondern das gleichzeitige Verschwinden wird mit der Form zugleich vorausgesetzt*] woraus der wichtige Satz folgt, dass man in der Reihe $fx + pk + qk^2 + rk^3 \ldots.$, die aus der Entwickelung von $f(x+k)$ entsteht, k immer so klein annehmen kann, dass ein beliebiges Glied der Reihe grösser ist, als die Summe aller fol-

genden, welches dann um so mehr für noch kleinere Werthe von k der Fall ist.

Denn weil die Reste kP, kQ, kR Functionen von k sind, die mit k zugleich verschwinden, vermöge der Form der Entwickelung, so folgt, wenn man sich eine krumme Linie vorstellt, deren Abscissen k und deren Ordinaten Functionen der Abscissen sind, dass diese Curve die Axe im Anfangs-Punkt der Abscisse schneiden wird. Die krumme Linie wird allemal, so lange der Anfangs-Punkt der Abscisse kein singulairer Punkt ist, was nur, wie man sich durch ein ähnliches Raisonnement wie in (2.) leicht überzeugen kann, für besondere Werthe von x der Fall ist, nothwendigerweise stetig seyn, bis zum Durchschnitts-Punkt. Sie wird sich also der Axe, ehe sie sie schneidet, immer mehr nähern und ihr folglich bis auf eine Entfernung nahe kommen, die kleiner ist, als jede gegebene Grösse, so dass sich immer eine Abscisse angeben lässt, deren Ordinate kleiner ist, als jede gegebene Grösse. Alle noch kleinere k entsprechen also Ordinaten, die noch kleiner sind als die gegebene Grösse.

Man kann also k, ohne es Null zu setzen, so klein annehmen dass kP kleiner ist als fx, kQ kleiner als p, kR kleiner als q, folglich $k^2 Q$ kleiner als kp, $k^3 R$ kleiner als $k^2 q$ u. s. w. Es folgt also, weil in (3.)

$$kP = kp + k^2 q + k^3 r \ldots\ldots, \quad k^2 Q = k^2 q + k^3 r \ldots\ldots,$$
$$k^3 Q = k^3 r \ldots\ldots \text{ etc.}$$

ist, dass man k immer einen Werth geben kann, der so klein ist, dass jedes Glied der Reihe $fx + kp$

$+ k^2 q + k^3 r \ldots\ldots$ grösser ist, als die Summe aller auf dasselbe folgenden Glieder. Jeder noch kleinere Werth von k erfüllt diesen Zweck um so mehr.

Man kann diesen Satz als einen Hauptlehrsatz der Theorie betrachten, die wir vortragen wollen. Man nimmt ihn in der Differential- und Fluxions-Rechnung stillschweigend an und man kann sagen, dass diese Rechnungen, besonders in diesem Punkt, und vorzüglich bei ihrer Anwendung auf Geometrie und Mechanik, eine Blösse geben. [*In der Infinitesimal-Rechnung nimmt man wohl noch mehr als Dieses stillschweigend an: Man nimmt an, dass man von dem Unendlichen und dessen Verhältnissen Begriffe habe, was nicht der Fall ist.*] Die Zweifel über diesen Lehrsatz, die entstehen könnten, weil das Verfahren, um die Reste kP, kQ, $kR \ldots\ldots$ zu finden, nur auf algebraische Functionen passet, werden im 5ten Abschnitt gehoben werden, wo wir allgemeine Ausdrücke für die Reste finden werden, nebst den Mitteln, ihre Grenzen anzugeben. [*Auch ohne den Beweis im 5ten Abschnitt, der mindestens verwickelt seyn möchte, ist wohl schwerlich über diesen wichtigen Satz ein Zweifel möglich.*

Man setzt die Reihe

$$f(x+k) = fx + kp + k^2 q + k^3 r \ldots\ldots$$

voraus, und wenn man ihr die Gestalt $fx + k(p + kq + k^2 r \ldots .)$ *giebt, so ist auch, ohne das Bild einer Curve, klar, dass* k *so klein genommen werden kann, dass* $kq + k^2 r \ldots\ldots$ *kleiner ist als* p*; denn die Grössen* $kq + k^2 r$ *etc. werden alle von* k *multiplicirt,* p *allein nicht; also kann man* $kq + k^2 r \ldots$ *so weit vermindern als man will, während* p *bleibt.*

Man kann also die Summe der Grössen $kq + k^2 r \ldots$, *allemal kleiner machen als* p, *so lange nicht* p, q, $r \ldots$, *für* $k = 0$, *unendlich gross sind, welches, nach der Voraussetzung, nicht der Fall sein soll. Mithin kann man auch* k *so klein annehmen, dass die Summe der Glieder* $k^2 q$, $k^3 r \ldots\ldots$ *kleiner ist, als das Glied* kp. *Eben so verhält es sich mit der Summe der Glieder* $k^3 r$, $k^4 s \ldots\ldots$ *gegen das Glied* $k^2 q$ *u. s. w.*]

7.

Uebrigens ist zu bemerken, dass die obige Methode einer schrittweisen Entwickelung der Glieder der Reihe für $f(x + k)$, nach Potenzen von k, allgemein, nur dann auf die Entwickelung einer Function von x und k passet, wenn sich diese Function in eine Reihe auflösen lässt, die nach Potenzen von k von ganzen positiven Exponenten fortschreitet. Denn der Beweis in (2.), dass jede Function von $(x + k)$, allgemein gesprochen, dieser Form fähig ist, kann nicht auf alle Functionen von x und k angewandt werden. *(Car le raisonnement de l'article 2, par lequel nous avons prouvé que toute fonction de* $x + i$ *est, généralement parlant, susceptible de cette forme, ne pourroit pas s'appliquer á une fonction quelconque de* x *et* i*)*. [*Dieser scheinbare Widerspruch liegt wohl nur in einiger Ungenauigkeit des Ausdrucks. Es soll heissen: der Beweis könne nicht auf alle Fälle, für besondere einzelne Werthe von* x, *angewendet werden, anstatt: er passe nicht auf alle Functionen.*] Aber so bald die Reduction möglich ist, kann man immer

auf die, aus der Entwickelung nach steigenden Potenzen von k entstehenden Reihen, die Schlüsse des vorigen Artikels ausdehnen, nemlich, dass die Grösse k immer so klein angenommen werden kann, dass jedes Glied der Reihe grösser ist, als die Summe aller folgenden. [*Mit Ausnahme des so eben ausgesprochenen wichtigen Satzes enthält dieser erste Abschnitt noch keine weitere Schritte zum Ziele. Lagrange hat hier, gegen seine sonstige Gewohnheit, sogar seinen Vortrag mit Beispielen und ausführlichen Rechnungen, die den freien Lauf der Darstellung nur hemmen, weil nie das Besondere den Beweis des Allgemeinen befördert, gleichsam belastet. Beispiele nach einem allgemeinen Vortrage erläutern, vor demselben, können sie ihn sogar verdunkeln.*]

Zweiter Abschnitt.

Abgeleitete Functionen. Ihre Bezeichnung und ihr Algorithmus.

8.

Wir haben gesehen, dass durch die Entwickelung von $f(x+k)$ verschiedene, aber sämmtlich von der Stamm-Function fx abgeleitete, Functionen p, q, r..... entstehen und wir haben die Mittel angegeben, diese Functionen in einzelnen Fällen zu finden. Um aber die Theorie dieser Functionen zu

begründen, kommt es auf das allgemeine Gesetz der Ableitung an.

Zu dem Ende wollen wir den allgemeinen Ausdruck

$$f(x+k) = fx + pk + qk^2 + rk^3 \ldots\ldots$$

wieder vornehmen und setzen, x gehe in $x+e$ über, wo e irgend eine unbestimmte, von k unabhängige Grösse ist. [*Lagrange schreibt* $x+o$. *Wegen der Aehnlichkeit des Buchstaben* o *mit Null, habe ich statt dessen einen andern Buchstaben gesetzt.*] Es ist klar, dass dadurch aus $f(x+k)$, $f(x+k+e)$ wird. Zugleich aber sieht man, dass man das nemliche Resultat erhält, wenn man in $f(x+k)$, bloss $k+e$ statt k setzt. Also muss auch das Resultat das nemliche seyn, man mag in die Reihe $fx + pk + qk^2 + rk^3 \ldots$, $k+e$ statt k, oder $x+e$ statt x setzen.

Das Erste giebt

$$fx + p(k+e) + q(k+e)^2 + r(k+e)^3 \ldots\ldots$$

Entwickelt man die einzelnen Glieder, schreibt aber, der Kürze wegen, nur die beiden ersten Glieder jeder Potenz aus, welche zu den Vergleichungen, deren wir zu den beabsichtigten Bestimmungen bedürfen, hinreichend sind, [*dass dieses der Fall ist, kann auch besonders bewiesen werden*] so erhält man

$$\begin{aligned} fx &+ pk + qk^2 + rk^3 + sk^4 \ldots. \\ &+ pe + 2qke + 3rk^2e + 4sk^3e \ldots. \end{aligned}$$

Um die zweite Substitution auszuführen, mögen, $fx + f'x.\ e \ldots.$, $p + p'e \ldots.$, $q + q'e \ldots.$, $r + r'e \ldots.$ bedeuten, was aus fx, p, q, $r \ldots.$ wird, wenn man darin $x+e$ statt x setzt. Man erhält dann, wenn man von der Entwickelung nur diejenigen Glie-

der nimmt, welche die ersten Potenzen von e enthalten:

$$fx + pk + qk^2 + rk^3 + sk^4 \ldots\ldots$$
$$+ f'xe + p'ke + q'k^2e + r'k^3e \ldots\ldots$$

Da diese beiden Resultate identisch seyn müssen, was auch k und e seyn mögen, so erhält man, wenn man die Glieder, welche e, ke, k^2e *etc.* enthalten, einzeln mit einander vergleicht,

$$p = f'x,\quad 2q = p',\quad 3r = q',\quad 4s = r' \text{ etc.}$$

[*Der Beweis, dass die Glieder einzeln mit einander verglichen werden dürfen, ist der nemliche, der für die Identität der Coefficienten zu gleichen Functionen unbestimmter Grössen in einer beliebigen Reihe Statt findet.*]

Nun ist offenbar, eben wie $f'x$ die erste abgeleitete Function von fx ist, auch p' die erste abgeleitete Function von p, q' diejenige von q, r' diejenige von r u. s. w. Bezeichnet man also, der Gleichförmigkeit und Kürze wegen, durch $f'x$ die erste abgeleitete Function von fx, durch $f''x$ diejenige von $f'x$, durch $f'''x$ diejenige von $f''x$ u. s. w. so erhält man

$$p = f'x \qquad \text{und daraus} \qquad p' = f''x$$
$$q = \frac{p'}{2} = \frac{f''x}{2} \qquad - \quad - \qquad q' = \frac{f'''x}{2}$$
$$r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''x}{2.3} \qquad - \quad - \qquad r' = \frac{f^{IV}x}{2.3.}$$
$$s = \frac{r'}{4} = \frac{f^{IV}x}{2.3.4.} \qquad - \quad - \qquad s' = \frac{f^{V}x}{2.3.4.}$$

u. s. w.

Substituirt man diese Ausdrücke in die Entwickelung von $f(x + k)$, so erhält man

$f(x + k)$

$$f(x+k)=fx+kf'x+\frac{k^2}{2}f''x+\frac{k^3}{2.3}f'''x+\frac{k^4}{2.3.4}f^{IV}x\ldots$$

Dieser neue Ausdruck hat den Vorzug, dass er zeigt, wie die Glieder der Reihe eines von dem andern abhängen, besonders aber, dass sich, wenn man die erste abgeleitete Function einer Stammgrösse angeben kann, auch alle abgeleitete Functionen der ganzen übrigen Reihe darstellen lassen. [*Wenn man auf das Bisherige zurück sieht, so bemerkt man nun ganz deutlich, dass es für die Entwickelung dieses Resultats völlig gleichgültig ist, ob die Zulässlichkeit der Form desselben, nemlich des Vorkommens von k in Potenzen von ganzen positiven Exponenten, vorher bewiesen worden ist, oder nicht. Das Resultat ist noch keine wirkliche Entwickelung von $f(x+k)$ und kann es nicht seyn. Es ist blos ein, etwas näher bestimmter, allgemeiner Ausdruck der Form der entwickelten Reihe, für den willkürlich vorausgesetzten Fall, dass k nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten vorkommt, und es findet nur Statt, wenn die Coefficienten $f'x$, $\frac{f''x}{2}$, $\frac{f'''x}{2.3}$.... möglich sind. Ob sie allgemein möglich sind, braucht vorher weder allgemein bewiesen zu werden, noch lässt es sich beweisen, weil diese Coefficienten zuweilen wirklich nicht Statt finden, namentlich für einzelne besondere Werthe von x, für welche sie unendlich gross oder unmöglich sind. Die bisherige Entwickelung zeigt bloss, dass die Coefficienten von k, k^2, k^3.... wenn sie Statt finden, alle der Reihe nach einer aus dem andern durch die*

nemliche Operation abgeleitet werden können, durch welche man den ersten unter ihnen aus der Stamm-Grösse fx findet, und dies ist die Hauptsache. Ob die Coefficienten Statt finden, und welche sie sind, hängt von der Form der Stammgrösse selbst ab und lässt sich, eben deshalb, nicht allgemein sagen, folglich auch die Existenz der Coefficienten nicht allgemein beweisen, weil die Zusammensetzung der Stammgrössen nicht allgemein ausgedrückt werden kann. Der obige Beweis für die Zulässlichkeit der Entwickelungs-Form $f(x+k) = fx + pk + qk^2 + rk^3 \ldots.$ fällt also wie es scheint ganz weg. Diese Form muss nicht deshalb gesetzt werden, weil keine andere möglich wäre (in der That sind andere Formen möglich) sondern sie muss gesetzt werden, weil man sie grade so braucht, und sie kann gesetzt werden, in so fern die Coefficienten zu k, $k^2 \ldots.$ existiren und angegeben werden können, welches von der Art der Zusammensetzung von fx und von den besondern Werthen von x abhängt. Existiren aber die Coefficienten, so hängen sie, wie bewieseu, auf die durch den Ausdruck

$$fx + kf'x + \frac{k^2}{2}f''x + \frac{k^3}{2.3}f'''x \ldots.$$

bezeichnete Weise, nothwendig der Reihe nach von einander ab, welche auch immer ihre und der Stammgrösse Form seyn mag.]

9.

Wir wollen die Function fx, in Beziehung auf die davon abgeleiteten Functionen $f'x$, $f''x \ldots.$,

Stammgrösse *(fonction primitive)* nennen, jene, abgeleitete Functionen oder Ableitungen *(fonctions derivées)* in Beziehung auf die Stammgrösse. Ferner soll $f'x$ erste Ableitung, $f''x$ zweite Ableitung, $f'''x$ dritte Ableitung u. s. w. heissen.

Eben so wollen wir, wenn y eine Function von x ist, ihre Ableitungen durch y', y'', y'''.... bezeichnen, so, dass wenn y die Stammgrösse ist, y', y'', y'''.... die erste, zweite, dritte Ableitungen dieser Stammgrösse u. s. w. bedeuten. Geht also x in $x + k$ über, so wird aus y,

$$y + ky' + \frac{k^2}{2} y'' + \frac{k^3}{2 . 3} y''' \ldots.$$

Hat man nun ein Mittel, die erste Ableitung einer gegebenen Stammgrösse zu finden, so erhält man, durch blosse Wiederholung der nemlichen Operation, alle übrigen Ableitungen, und folglich alle Glieder der Reihe, die aus der Entwickelung der Stammgrösse entstehen, [*in so fern nemlich die Ableitungen der Stammgrösse an Form ähnlich sind, welches nicht immer der Fall ist; z. B. die erste Ableitung von* $\log x$ *ist* $\frac{1}{x}$, *und kein Logarithme.*]

Wer mit der Differential-Rechnung bekannt ist, wird leicht sehen, dass die Ableitungen y', y'', y'''...., in Beziehung auf x genommen, mit den Werthen der Ausdrücke $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ *etc.* übereinkommen. [*Aus den in der Vorrede angezeigten Gründen glaubt der Uebersetzer gezwungen zu*

seyn, von hier ab die alte, obgleich unvollkommne und fehlerhafte Bezeichnung der Differentiale beizubehalten und an die Stelle der Lagrangischen Bezeichnung zu setzen. Jedoch wolle man, wie nochmals im Voraus erinnert wird, die Vorstellungen der Differential-Rechnung gänzlich entfernen und die Zeichen bloss als etwas Willkürliches ansehen, was hier eine völlig andere Bedeutung erhält. Unter dieser Bedingung kann das obige Resultat, welches nichts anders ist als der Ausdruck des, unter dem Namen seines Erfinders Taylor, bekannten Lehrsatzes, durch

$$f(x+k)=fx+k.\frac{dfx}{dx}+\frac{k^2}{2}.\frac{d^2fx}{dx^2}+\frac{k^3}{2.3}.\frac{d^3fx}{dx^3}\ldots.$$

oder wenn $fx=y$ *ist, durch*

$$f(x+k)=y+k\frac{dy}{dx}+\frac{k^2}{2}.\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{k^3}{2.3}.\frac{d^3y}{dx^3}\ldots,$$

bezeichnet werden, wo aber dy, dx, d^2y, d^3y, dfx *u. s. w. durchaus keine unendlich kleine Grössen, sondern vielmehr die Ausdrücke* $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}\ldots$ *nichts anders bedeuten als die Coefficienten zu* k, k^2 *etc. in der Entwickelung der Grösse* $f(x+k)$ *in eine nach Potenzen von* k *fortschreitende Reihe. Die Zeichen* dfx, d^2fx, dy, $d^2y\ldots$ *einzeln, an und für sich allein, bedeuten gar nichts. Sie sind von den darunter gesetzten* dx, dx^2 *u. s. w. völlig unzertrennlich, welches sehr wohl zu merken ist, und nur* $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$,

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx}$ *haben eine Bedeutung, nemlich die vorhin angezeigte.*

Man sieht übrigens schon hier, weil immer fort Grössen unter *einander geschrieben werden müssen, wie sehr unbequem die alten Zeichen für die neue Vorstellung sind, allein sie waren leider nicht zu vermeiden. Hätte Jemand anders die bequemern Zeichen vorgeschlagen, die in meinem „Versuch über die Rechnung mit veränderlichen Grössen* 1. *Band* 1813" *angenommen sind, so würde ich mich derselben ohne Bedenken statt der alten Zeichen bedienen, denn ihre Vorzüge lassen sich* beweisen, *wie ich es dort, und in einer andern kleinen Schrift, über die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Grössen auf Geometrie und Mechanik, gethan habe; ich habe diese Zeichen durch vieljährigen Gebrauch geprüft und bewährt gefunden, weshalb ich auch in meinen eigenen Schriften im Wesentlichen nicht wieder davon abgehen werde. Als eigene Idee aber mochte ich sie nicht in dieser Uebersetzung an die Stelle einer Idee* Lagrange's *setzen. Um indessen den Nutzen besserer Zeichen bemerklich zu machen, werde ich in dem gegenwärtigen Werke, in den einzelnen Fällen, von den vorgeschlagenen Zeichen Nachricht geben. Hier, in der Entwickelung von* $f(x+k)$, *schreibt man richtiger: statt* $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, $\frac{d^3fx}{dx^3}$ u. s. w. $\frac{d}{x}fx$, $\frac{d^2}{x^2}fx$, $\frac{d^3}{x^3}fx$ etc.

statt $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ $\frac{d}{x}y$, $\frac{d^2}{x^2}y$, $\frac{d^3}{x^3}y$....

Der Grund des Bessern ist folgender: Willkürlich ist nichts als das d, um, im Fall man in fx, $x+k$ statt x und für $f(x+k)$ die Reihe $fx + kp + k^2q + k^3r$.... setzt, die Abhängigkeit des Coefficienten p von der Stammgrösse fx, oder, wenn man will, die Operation zu bezeichnen, durch welche p aus x gefunden wird. Nachdem einmal dieses Zeichen d willkürlich angenommen worden, darf Nichts weiter willkürlich gesetzt werden, weil, wie bewiesen, alle übrige Coefficienten, q, r.... auf die nemliche Weise, oder durch gleiche Operationen, der Reihe nach von einander abhängen, wie p von fx, so dass man für q nothwendig schreiben muss: $\frac{d(dfx)}{2}$, *oder* $\frac{d^2fx}{2}$, *für r,* $\frac{d\left(\frac{d^2fx}{2}\right)}{3}$ *oder* $\frac{d^3fx}{2.3}$ *u. s. w. Nun aber ist, für den weiter unten vorkommenden Fall mehrerer veränderlichen Grössen x, y, z...., aus welchen eine Grösse zusammengesetzt seyn kann, wie es hier fx aus der einen Grösse x ist (und aus keinem andern Grunde) eine Anzeige der Grössen nöthig, welche so eben als unabhängig veränderlich betrachtet werden. Diese Grössen zeigen die alten Zeichen dadurch an, dass sie (z. B. hier wo x die veränderliche Grösse ist) dx unter dfx setzen, welches aber fehlerhaft ist, und zwar aus dem Grunde, weil das Untersetzen auf eine Division*

deutet, die nicht Statt findet. Es möchte hingehen, weil man sich allenfalls gewöhnen könnte, hier einmal bei einem Divisions-Zeichen, an keine Division zu denken, allein leider hat man bei den Vorstellungen vom Unendlichen wirklich eine Division im Sinne. Da auf solche Weise das alte Zeichen die Unrichtigkeit der alten Vorstellungen befördert, so ist es fehlerhaft und verwerflich. Um nun den schlechten Dienst, den das alte Zeichen auf diese Art leistet, zu hindern, setzt man besser die Grösse selbst, welche veränderlich ist, ebenfalls als blosses Zeichen, wie es der Sinn der Operation verlangt, unter das d; wo dann an keine Division mehr zu denken ist. Denn man ist völlig gewöhnt das d an sich selbst für keine Grösse, sondern blos für ein Operations-Zeichen zu halten; also ist es unmöglich, dass man nun eine Division verstehen könne; denn $\frac{d}{x}$ *ist jetzt ein zusammenhängendes Zeichen und durchaus keine Grösse, und so wie d das allgemeine Zeichen der Ableitungs-Operation ist, so ist* $\frac{d}{x}$ *das besondere Zeichen für die näher bestimmte, nemlich für die Ableitung nach x. Die vorgeschlagenen, dem Sinne der Rechnung getreuen Zeichen sind übrigens eigentlich nur, und zwar fast unverändert, die alten. Das d bedeutet noch das Nemliche wie immer, nur wird es so gebraucht, dass nicht zugleich die unrichtigen Begriffe von der Operation selbst, mit bezeichnet werden.*]

Dritter Abschnitt.

Ableitungen von Potenzen, Exponential-Grössen, Logarithmen, Sinus und Cosinus, und von Ausdrücken die aus diesen einfachen Functionen zusammengesetzt sind. Ableitungs-Gleichungen.

10.

Weil alles darauf ankommt, die erste Ableitung einer gegebenen Function zu finden, so wollen wir die allgemeinen Regeln für die Zusammensetzung der Ableitungen der vorzüglichsten, in der Analysis vorkommenden, Grössen abhandeln.

Aus dem Obigen sieht man, dass die Ableitung $\frac{dfx}{dx}$ einer gegebenen Function fx der veränderlichen Grösse x nichts anders ist als der Coefficient des ersten Gliedes der Entwickelung dieser Function, wenn man darin $x + k$ statt x setzt. Es kommt also nur darauf an, diesen Coefficienten zu finden.

Es sey $fx = x^m$, so ist

$$f(x + k) = (x + k)^m.$$

Nun ist entweder durch die Arithmetik, oder durch einfache algebraische Operationen leicht zu beweisen, dass die beiden ersten Glieder der Potenz m des Binoniums $x + k$, $x^m + mx^{m-1}k$ sind, m mag eine ganze Zahl oder ein Bruch, positiv oder negativ seyn. Es ist also

$$\frac{dfx}{dx} = mx^{m-1}.$$

[*Anstatt diesen Beweis aus der Algebra zu nehmen, kann man ihn aus der obigen Grundformel für die Entwickelung von $f(x+k)$ selbst, allgemeiner, leichter und strenger geben. Im zweiten Bande kommt dieser Gegenstand ausführlicher vor.*]

Man erhält also auf dieselbe Weise

$$\frac{d^2fx}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}, \frac{d^3fx}{dx^3} = m.m-1.m-2x^{m-3}$$

u. s. w.

[*Nemlich da* $\frac{dfx}{dx} = mx^{m-1}$ *aus* $fx = x^m$ *gefunden wird, wenn man den Exponenten* m *um Eins vermindert und mit dem unverminderten Exponenten multiplicirt, die allgemeine Grundformel aber lehrt, dass* $\frac{d^2fx}{dx^2}$ *von* $\frac{dfx}{dx}$ *eben so abhängt, wie* $\frac{dfx}{dx}$ *von* fx, *so muss man, um* $\frac{d^2fx}{dx^2}$ *zu finden, in* mx^{m-1} *wieder den Exponenten* $m-1$ *um 1 vermindern, und mit dem unverminderten Exponenten multipliciren, welches* $\frac{d^2fx}{dx^2} = m.m-1\,x^{m-2}$ *giebt u. s. w.*]

Man erhält folglich, vermöge der allgemeinen Formel (8.)

$$(x+k)^m = x^m + mx^{m-1}k + \frac{m.m-1}{2}x^{m-2}.k^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3}x^{m-3}k^3 \ldots.$$

welches die bekannte Binomial-Formel ist, die also auf diese Weise für alle Werthe von m bewiesen

wird. [*Für alle mögliche Werthe von m kann die Formel wohl noch nicht ohne Weiteres angenommen werden, weil in der Algebra nur für ganze oder gebrochene, positive und negative Exponenten bewiesen wird, dass das zweite Glied der Entwickelung von* $(x+k)^m$, $mx^{m-1}k$ *ist. Nur für solche Exponenten ist man überzeugt, dass* $\frac{dfx}{dx} = mx^{m-1}$ *ist, worauf das Uebrige beruht. Man sehe wegen dieses Alles den zweiten Theil.*]

11.

Es sey zweitens $fx = a^x$ so ist

$$f(x+k) = a^{x+k} = a^x a^k.$$

Es kommt wieder nur auf die beiden ersten Glieder von a^k an, wenn man diese Grösse nach Potenzen von k entwickelt.

Es sey zu dem Ende $a = 1+b$, so ist, vermöge des Ausdrucks (10.)

$$a^k = (1+b)^k = 1 + kb + \frac{k.k-1}{2}b^2 + \frac{k.k-1.k-2}{2.3}b^3 \ldots$$

Entwickelt man die Producte von k, $k-1$, $k-2$, und ordnet die Entwickelung nach den Potenzen von k, so findet man, dass die in k multiplicirten Glieder die Reihe

$$b - \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{3}b^3 \ldots$$

bilden. Setzt man der Kürze wegen

$$b - \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{3}b^3 \ldots \text{ oder } a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}\ldots = A$$

so sind die beiden ersten Glieder des in eine Reihe entwickelten Werths von a^k, $1 + Ak$ folglich ist

$$\frac{dfx}{dx} = A a^x.$$

Durch Wiederholung der Operation findet man

$$\frac{d^2 fx}{dx^2} = A \times A a^x = A^2 a^x$$

$$\frac{d^3 fx}{dx^3} = A \times A^2 a^x = A^3 a^x \text{ u. s. w.}$$

Also ist

$$f(x+k) = a^{x+k} = a^x\left(1 + Ak + \frac{A^2k^2}{2} + \frac{A^3k^3}{2.3} \dots\right)$$

Dividirt man mit a^x und setzt $k = x$, so erhält man die bekannte Reihe:

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2 x^2}{2} + \frac{A^3 x^3}{2.3} \dots.$$

12.

Setzt man in diese Reihe $x = 1$ so erhält man

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{2.3} \dots$$

und setzt man $x = \frac{1}{A}$, so erhält man

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} \dots.$$

Die Grösse $a^{\frac{1}{A}}$ ist also eine unveränderliche Zahl, die, für den Fall $A = 1$, der Werth von a selbst ist. Die Reihe giebt

$$a^{\frac{1}{A}} = 2{,}71828\ 18284\ 59045 \dots.$$

Man bezeichnet diese Zahl gewöhnlich durch e, so dass sich also das Verhältniss zwischen a und A durch die Gleichung $a^{\frac{1}{A}} = e$ ausdrücken lässt, woraus $a = e^A$ folgt.

Wäre $fx = e^{mx}$, so wäre $a = e^m$, also $A = m$ und folglich

$$\frac{dfx}{dx} = me^{mx}, \frac{d^2fx}{dx^2} = m^2 e^{mx}, \frac{d^3fx}{dx^4} = m^3 e^{mx} \ldots etc$$

woraus, wie oben,

$$e^{mx} = 1 + mx + \frac{m^2x^2}{2} + \frac{m^3x^3}{2.3} \ldots,$$

folgt.

In der Gleichung $y = a^x$ ist aber x nichts anders als der Logarithme von y, wenn a die Basis des logarithmischen Systems, das heisst, die Zahl bezeichnet, deren Logarithme 1 ist. Es ist also $x = log\,y$, für die Basis a. [*Ich werde der Kürze wegen das Zeichen der Basis über das Wort log setzen, also z. B. schreiben* $x = \overset{a}{log}\,y$.] Aus demselben Grunde giebt die Gleichung

$$a^{\frac{1}{A}} = e, \frac{1}{A} = \overset{a}{log}\,e \text{ und } A = \overset{e}{log}\,a,$$

[*nemlich* $\overset{a}{log}\left(a^{\frac{1}{A}}\right)$ *ist bekanntlich* $= \frac{1}{A}\,\overset{a}{log}(a)$. *Aber* $\overset{a}{log}\,a$ *ist* $= 1$ *weil der Logarithme der Grundzahl jedes Systems immer* 1 *ist; also ist* $\frac{1}{A}\,\overset{a}{log}\,(a) = \frac{1}{A}$ *und folglich, weil* $a^{\frac{1}{A}} = e$ *war*, $\overset{a}{log}\,a^{\frac{1}{A}} = \frac{1}{A} = \overset{a}{log}\,e$. *Auf dieselbe Weise folgt aus* $e^A = a$, $\overset{e}{log}\,(e^A) = A\,\overset{e}{log}\,(e) = A.1 = \overset{e}{log}\,a$ *also* $\overset{e}{log}\,a = A$]. In dem gewöhnlichen Logarithmen-System ist die Basis $a = 10$, weil mit dieser Basis die Rechnung leichter ist. In der Analysis zieht man das System, dessen Basis die obige

Zahl *e* ist, als das einfachere vor. Dieses System ist das N e p e r s c h e. Man nennt diese Nepersche Logarithmen auch hyperbolische, weil sie durch die Fläche einer gleichseitigen Hyperbel zwischen den Asymptoten vorgestellt werden. Man bezeichnet sie durch den Buchstaben *l.* [*Die Basis über das Wort log zu setzen, ist wohl allgemeiner und bestimmter. Es ist hier wieder ein Fall, wo der Nutzen der Consequenz, auch bei der Bezeichnung, nicht zu verkennen ist. Bezeichnet man nemlich den Logarithmen für die Basis a durch log, und den Logarithmen für die Basis e durch l, so kann man zwar auch noch so fortfahren, und allenfalls noch einige willkürliche Zeichen für einige andere Bases erfinden; aber nothwendig muss man damit zu Ende kommen, und Verwirrung durch die vielen Zeichen ist zuletzt unvermeidlich. Setzt man dagegen die Basis über das Wort log, so kann man damit nie zu Ende kommen, sondern alle mögliche logarithmische Systeme mit gleicher Leichtigkeit bezeichnen. Die Bezeichnungen in der Analysis sind keinesweges unbeschränkt willkürlich. Nur die Zeichen für die ersten Begriffe und Sätze, von welchen man ausgeht, sind es, obgleich auch diese wenigstens angemessen seyn müssen. Sind aber die ersten Zeichen festgesetzt, so muss sich nothwendig, auch das System der Zeichen, eben so wohl mit aller Consequenz nur aus sich weiter entwickeln, wie die Rechnung selbst. Die Bezeichnung in der Analysis hat unstreitig eben so wohl ihre Regeln als die Rechnung selbst, und der Gegenstand verdient eine grössere Aufmerk-*

samkeit, als ihm gewöhnlich zu Theil wird; denn in keiner Wissenschaft sind die Bezeichnungen so wesentlich und wichtig als in der Analysis. Sie sind für die Rechnung fast was die Worte für die Sprache sind.] Es ist also $A = \overset{e}{log}\, a$, folglich wird die Function a^x durch $a^x \overset{e}{log}\, a$ ausgedrückt (11.)

Da übrigens $a = e^A$ so ist $a = e^{\overset{e}{log}\, a}$, wodurch sich alle Exponential-Grössen auf die nemliche Basis e reduciren lassen. [*Das Vorstehende enthält vollständig die Grundlage der Theorie der Logarithmen und Exponential-Grössen, klar und einfach, wie es* L a g r a n g e *würdig ist. Es wäre zu wünschen, dass nach grade die schwerfällige und undeutliche Erklärung der Logarithmen durch zwei Reihen, eine sogenannte geometrische, und eine sogenannte arithmetische, aus den Lehrbüchern verschwände, und die so einfache, natürliche und leichte Erklärung der Logarithmen durch Exponenten, an ihre Stelle träte.*]

13.

Es sey, drittens, $fx = \overset{a}{log}\, x$, so hat man, nach der Natur der Logarithmen, $x = a^{fx}$. Wenn nun x in $x + k$ übergeht, so wird aus fx

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\;\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots\ldots$$

Setzt man der Kürze wegen

$$k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\;\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots\ldots = \varkappa.$$

[*Im Original steht wieder der mit* o *so leicht zu*

verwechselnde Buchstabe o. Der Uebersetzer erlaubt sich, ihn zur Förderung der Deutlichkeit mit dem Buchstaben $\varkappa$ zu vertauschen,] so geht die Gleichung $x = a^{fx}$, wenn man $x + k$ statt x, und folglich $f(x + \varkappa)$ statt fx setzt, in

$$x + k = a^{fx + \varkappa} = a^{fx} a^{\varkappa}$$

über. Dividirt man diesen Ausdruck durch den vorigen $x = a^{fx}$, so erhält man

$$1 + \frac{k}{x} = a^{\varkappa} = 1 + A\varkappa + \frac{A^2 \varkappa^2}{2} \dots (12.)$$

Lässt man auf beiden Seiten die Einheit weg und dividirt durch k, nachdem der Werth von $\varkappa$ substituirt worden, so erhält man, nachdem der entstehende Ausdruck nach den Potenzen von k geordnet worden,

$$\frac{1}{x} = A\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\left[A\frac{d^2fx}{dx^2} + A^2\left(\frac{dfx}{dx}\right)^2\right] \dots$$

Da die Grösse k unbestimmt bleiben muss, so muss die Gleichung, unabhängig von k, Statt finden. Also müssen sich alle Glieder, die in eine und dieselbe Potenz von k multiplicirt sind, aufheben und es müssen so viel einzelne Gleichungen Statt finden, als Glieder da sind. Man erhält also

$$\frac{1}{x} = A\frac{dfx}{dx}, \quad A\frac{d^2fx}{dx^2} + A^2\left(\frac{dfx}{dx}\right)^2 = 0$$

u. s. w. Da nun $fx = \overset{a}{log}\, x$ war, so erhält man allgemein

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{1}{Ax} = \frac{1}{x \overset{e}{log}\, a}$$

mithin, zufolge der Formel (10.)

$$\frac{d^2 fx}{dx^2} = -\frac{1}{x^2 \overset{e}{log}\, a}, \quad \frac{d^3 fx}{dx^3} = \frac{2}{x^3 \overset{e}{log}\, a}, \quad \frac{d^4 fx}{dx^4} = -\frac{2.3}{x^4 \overset{e}{log}\, a} \text{ etc.}$$

welche Werthe, wie man sieht, den verschiedenen Gleichungen genug thun. Man erhält also, durch die Substitution dieser Werthe in die Reihe $fx + k\frac{dfx}{dx} \ldots$,

$$\overset{a}{log}(x+k) = \overset{a}{log}\, x + \frac{k}{x \overset{e}{log}\, a} - \frac{k^2}{2x^2 \overset{e}{log}\, a} + \frac{k^3}{3x^3 \overset{e}{log}\, a}.$$

Setzt man $x = 1$ und $k = x$, so erhält man den bekannten Ausdruck

$$\overset{a}{log}(1 + x) = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \ldots\ldots}{\overset{e}{log}\, a}.$$

Für die hyperbolischen Logarithmen, für welche $\overset{e}{log}\, e = 1$, ist bloss

$$fx = \overset{e}{log}\, x, \quad \frac{dfx}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2 fx}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \ldots\ldots$$

[*Diese Ausdrücke für die Logarithmen können noch leichter gefunden werden. Man sehe den zweiten Band.*]

14.

Die Sinus und Cosinus von Winkeln, analytisch betrachtet, sind nichts anders als Ausdrücke mit unmöglichen Exponential-Grössen. Man kann also ihre Ableitungen aus denen der Exponential-Grössen finden. [*Es ist nicht nöthig unmögliche Grössen zu Hülfe zu nehmen. Die Ableitungen können unmittelbar aus den Eigenschaften der trigonometrischen Linien gefunden werden. Man sehe den zweiten Band.*]

Es

Es sey, also viertens, $fx = \sin x$. Da

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \text{ und } \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

so setze man $fx = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Dies giebt (nach 12.) wenn man in e^{mx}, $\pm\sqrt{-1}$, statt m schreibt

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x.$$

Eben so sey $fx = \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$, so findet man

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \cdot \sqrt{-1} = -\sin x.$$

Da man nun die ersten Ableitungen von $\sin x$ und $\cos x$ hat, so lassen sich leicht die übrigen Ableitungen finden.

Da nemlich

$$fx = \sin x, \frac{dfx}{dx} = \cos x, \text{ und } fx = \cos x, \frac{dfx}{dx} = -\sin x$$

giebt, so ist für $fx = \sin x$:

$$\frac{dfx}{dx} = \cos x, \frac{d^2fx}{dx^2} = -\sin x, \frac{d^3fx}{dx^3} = -\cos x,$$

$$\frac{d^4fx}{dx^4} = \sin x \ldots.$$

und für $fx = \cos x$:

$$\frac{dfx}{dx} = -\sin x, \frac{d^2fx}{dx^2} = -\cos x, \frac{d^3fx}{dx^3} = \sin x,$$

$$\frac{d^4fx}{dx^4} = \cos x \text{ etc.}$$

Diese Ausdrücke geben die Reihen

$$\sin(x+k) = \sin x + k\cos x - \frac{k^2}{2}\sin x - \frac{k^3}{2.3}\cos x$$

$$+ \frac{k^4}{2.3.4}\sin x + \ldots.$$

$$\cos(x+k) = \cos x - k \sin x - \frac{k^2}{2}\cos x + \frac{k^3}{2.3}\sin x$$
$$+ \frac{k^4}{2.3.4}\cos x + \ldots.$$

Setzt man $x = 0$ und $k = x$, so erhält man die bekannten Ausdrücke

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} \ldots.$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} \ldots.$$

15.

Die hier in Betrachtung gezogenen Functionen x^m, a^x, $\overset{e}{\log} x$, $\sin x$, $\cos x$ sind die einfachsten analytischen Ausdrücke. Alle Grössen die von einer veränderlichen Grösse abhängen sind daraus entweder durch Addition, Subtraction, Multiplication oder Division zusammengesetzt, oder es sind Gleichungen gegeben, in welchen die Functionen von jenen Formen vorkommen. [*Es sind wohl nur alle gewöhnlich vorkommende Grössen gemeint, in so fern man nicht unter den benannten Zusammensetzungs-Arten auch unendliche Reihen mit versteht. Denn es giebt bekanntlich Grössen, die sich ohne unendliche Reihen nicht aus* x^m, a^x, $\overset{e}{\log} x$, $\sin x$, $\cos x$ *zusammensetzen lassen.*] Kennt man also die ersten Ableitungen der obigen einfachen Functionen, so findet man leicht die ersten Ableitungen der zusammengesetzten Ausdrücke, und durch Wiederholung der Operationen, der Reihe nach, die zweiten, dritten Ableitungen u. s. w.

p, q, r.... sollen einfache Functionen von x be-

deuten, deren erste Ableitungen $\frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}, \frac{dr}{dx} \dots$ sind und welche nach den obigen Ausdrücken gefunden werden können. Man verlangt die erste Ableitung $\frac{dy}{dx}$ einer aus $p, q, r \dots$ zusammengesetzten Function von y. Man erwäge, dass wenn aus x, $x+k$ wird, y im allgemeinen in $y+k\frac{dy}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \dots$ übergeht (9.) Nun gehen aber zu gleicher Zeit p, q, $r \dots$ in $p+k\frac{dp}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2} \dots$, $q+k\frac{dq}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2q}{dx} \dots$, $r+k\frac{dr}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2r}{dx} \dots$ u. s. w. über. Man darf also nur diese letzten Ausdrücke in den Ausdruck von y setzen und die Glieder nach den Potenzen von k entwickeln, so ist der Coefficient zu k der gesuchte Werth von $\frac{dy}{dx}$.

Wäre also z. B. $y = ap + bq \dots$ wo a, $b \dots$ beliebige Coefficienten sind, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = a.\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} \dots$$

Wäre $y = apq$ so ginge y in

$$\left(p+k\frac{dp}{dx} \dots\right), \left(q+k\frac{dq}{dx} \dots\right) = pq + k\left(q\frac{dp}{dx}+p\frac{dq}{dx}\right) \dots$$

über, also wäre

$$\frac{dy}{dx} = aq\frac{dp}{dx} + ap\frac{dq}{dx}.$$

Wäre $y = apqr$ so fände man auf dieselbe Weise

$$\frac{dy}{dx} = aqr\frac{dp}{dx} + apr\frac{dq}{dx} + apq\frac{dr}{dx}$$

u. s. w.

Wäre $y = \frac{ap}{q}$, so würde aus der Grösse $\frac{p}{q}$:

$$\frac{p + k\frac{dp}{dx}\ldots}{q + k\frac{dq}{dx}}.$$

Entwickelt man den Bruch nach bekannten Regeln in eine Reihe, so erhält man

$$\left(p + k\frac{dp}{dx}\ldots\right)\left(\frac{1}{q} - \frac{k\frac{dq}{dx}}{q^2}\ldots\right) = \frac{p}{q} + k\left(\frac{\frac{dp}{dx}}{q} - \frac{p\frac{dq}{dx}}{q^2}\right)\ldots$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\frac{dp}{dx}}{q} - \frac{ap\frac{dq}{dx}}{q^2}$$

[*Diese Beispiele dienen wohl wenig zur allgemeinen Erläuterung.*]

16.

Es sey allgemein $y = fp$ [*und dies Allgemeine umfasst die obigen Beispiele alle*]. Betrachtet man fp als eine primitive Function von p so ist ihre erste Ableitung $\frac{dfp}{dp}$, wobei p in $p + \varkappa$ übergeht. [*Ich bezeichne hier die Veränderung von p durch* $\varkappa$, *statt durch k, welches letztere immer die unbestimmte Veränderung von x bedeuten soll.*] Die Grösse fp geht also in

$$fp + \varkappa\frac{dfp}{dp} + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{d^2fp}{dp^2}\ldots$$

über. (8.) Da aber p eine Function von x ist, so geht solche, wenn man $x + k$ statt x setzt, in

$$p + k\frac{dp}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2}\ldots$$

über. (8.) Schreibt man also

$$k\frac{dp}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2}\ldots$$

statt x, so geht fp, durch die Substitution von $x+k$ statt x, in

$$fp+\left(k\frac{dp}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2}\ldots\right)\frac{dfp}{dp}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(k\frac{dp}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2p}{dx^2}\ldots\right)^2\frac{d^2fp}{dp^2}\ldots$$

über, folglich erhält man, [*nemlich weil* $\frac{dy}{dx}$, *wie immer, der Coefficient zur ersten Potenz von k ist*]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dfp}{dp}$$

woraus folget, dass die erste Ableitung einer Function von einer Grösse die selbst wieder eine Function einer veränderlichen Grösse ist, dem Product der ersten Ableitungen der beiden Functionen gleich ist.

[*Bei dieser Gelegenheit zeigt sich zum erstenmal die Unzulänglichkeit der neuen Lagrangischen Zeichen. Der Verfasser bezeichnet nemlich z. B.* $\frac{dy}{dx}$ *durch* y', $\frac{dp}{dx}$ *durch* p', $\frac{dfp}{dp}$ *durch* fp' *und schreibt also* $y'=p'f'p$. *Hierbei aber zeigt Nichts, dass* $f'p$ *nach* p *und* p' *nach* x *abgeleitet werden, oder dass in* fp, p *und in* p, x *die einfache veränderliche Grösse seyn soll. Der Strich neben dem Buchstaben zeigt das nicht an, und ist auch dazu nicht geeignet. Die Zeichen deuten also einen* w e s e n t l i c h e n *Umstand nicht an. Der Uebersetzer bezeichnet die obige Gleichung* $\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dfp}{dp}$ *wie folgt:*

$$\frac{d}{x}y = \frac{d}{x}p \cdot \frac{d}{p}fp.]$$

Wir wollen ferner y gleich einer Function von p und q setzen, die durch $f(pq)$ bezeichnet werden mag, so kommt es darauf an, $x + k$ statt x in beide Functionen p und q zu setzen. Aber es ist klar, dass das Resultat das nemliche seyn wird, man mag die Substitutionen auf einmal, oder nach einander vornehmen, weil die Grössen als unabhängig von einander betrachtet werden. Setzt man also $x + k$ statt x in p, indem man fpq als Function von p allein betrachtet, so geht fpq in $fpq + k\frac{dp}{dx} \cdot \frac{dfpq}{dp} \ldots\ldots$ über. [*Lagrange schreibt, um* $\frac{dfpq}{dp}$ *zu bezeichnen,* $f'(p)$ *und bemerkt, er setze deshalb blos* $f'(p)$, *um anzuzeigen, dass bei der ersten Ableitung von* fpq *blos* p *als veränderlich und* q *als constant betrachten werden soll. Die alten Zeichen deuten diesen Umstand durch das darunter gesetzte* dp *an; der Uebersetzer schreibt* $\frac{d}{p}fpq$]. Nun setze man $x + k$ statt x in q, so geht eben so fpq, in $fpq + k\frac{dq}{dx}\frac{dfpq}{dq} \ldots\ldots$ über. Was das Glied $k\frac{dp}{dx} \cdot \frac{dfpq}{dp}$ betrifft, so ist klar, dass es durch die neue Substitution von $x + k$ statt x, Glieder mit k^2, $k^3 \ldots$ erhält [*die also nicht in Betracht kommen.*] Also werden die beiden ersten Glieder der, aus der Entwickelung von fpq, nach der Substitution von $x + k$ statt x, entstehenden Reihe blos

$$fpq + k\left(\frac{dp}{dx}\frac{dfpq}{dp} + \frac{dq}{dx}\frac{dfpq}{dq}\right)$$

seyn, woraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx}\frac{dfpq}{dp} + \frac{dq}{dx}\frac{dfpq}{dq}.$$

Wäre y eine Function von p, q, r, wie $fpqr$, so würde man auf dieselbe Weise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx}.\frac{dfpqr}{dp} + \frac{dq}{dx}.\frac{dfpqr}{dq} + \frac{dr}{dx}.\frac{dfpqr}{dr}$$

finden u. s. w. woraus, wie leicht zu sehen, im Allgemeinen folgt, dass die erste Ableitung einer aus mehreren einzelnen Functionen zusammengesetzten Function, der Summe der ersten Ableitungen der gegebenen Functionen, nach jeder darin enthaltenen Function einzeln und so genommen, als wenn die übrigen constant wären, gleich ist.

Dieser Satz, verbunden mit dem vorigen, ist zureichend, um die ersten Ableitungen aller Functionen, so wie auch die Ableitungen der höhern Ordnung zu finden.

Setzt man nemlich eine beliebige Function von x gleich X, so sind die ersten Ableitungen von X^m, $\overset{e}{log}\, X$, a^X, $sin\, X$, $cos\, X$ etc.

$$mX^{m-1}\frac{dX}{dx},\ \frac{dX}{dx} : X,\ a^X\frac{dX}{dx}\overset{e}{log}\, a,\ \frac{dX}{dx}\cos X,$$

$$-\frac{dX}{dx}\sin X$$

und ihre zweiten Ableitungen

$$mX^{m-1}\frac{d^2X}{dx} + m(m-1)X^{m-2}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}:X-\left(\frac{dX}{dx}\right)^2:X^2,\ a^X\frac{d^2X}{dx}\overset{e}{log}\,a$$
$$+a^X\left(\frac{dX}{dx}\right)^2(\overset{e}{log}\,a)^2,\ \frac{d^2X}{dx^2}cosX-\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 sinX,$$
$$-\frac{d^2X}{dx}sin\,X-\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 cos\,X\ \text{etc.}$$

17.

Aber die Function y kann durch irgend eine Gleichung zwischen x und y gegeben seyn.

Die Gleichung werde allgemein durch $Fxy=0$ ausgedrückt, so erhält man durch die Auflösung derselben nach y, y gleich einer gewissen Function von x, die sich durch fx bezeichnen lässt, so, dass wenn man fx in Fxy statt y setzt, die Grösse $F(xfx)$ entsteht, welche eine Function von x allein ist und welche wir durch φx bezeichnen wollen. Diese Function von x soll also für jeden Werth von x Null seyn. Sie ist also auch Null, wenn man $x+k$ statt x setzt, was auch k seyn mag. Dadurch aber geht φx in

$$\varphi x + k\frac{d\varphi x}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2\varphi x}{dx^2}\dots$$

über. Damit also k eine beliebige Grösse seyn kann, müssen einzeln die Gleichungen

$$\varphi x=0,\ \frac{d\varphi x}{dx}=0,\ \frac{d^2\varphi x}{dx^2}=0\dots$$

Statt finden. Die erste davon ist die gegebene Gleichung selbst, die zweite ist ihre erste, die dritte ihre zweite Ableitung u. s. w.

Weil aber $\varphi x=F(xfx)=Fxy$, so ist $\frac{d\varphi x}{dx}$

die erste Ableitung von Fxy in so fern man y als eine Function von x betrachtet. Diese erste Ableitung lässt sich nach dem vorigen Artikel durch

$$\frac{dFxy}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dFxy}{dy} \text{ ausdrücken.}$$

[*Lagrange schreibt $F'(x) + y'F'(y)$ und ist durch die Unzulänglichkeit seiner Zeichen genöthiget, mit Worten hinzuzufügen, dass $F'x$ und $F'y$ die ersten Ableitungen von Fxy, nach x und y allein genommen, bezeichnen sollen.*]

Die Gleichung $F(xy) = 0$ giebt also

$$\frac{dFxy}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dFxy}{dy},$$

woraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dFxy}{dx} : \frac{dFxy}{dy}.$$

[*Es sey z. B. die gegebene Gleichung $F(xy) = 0$ folgende:*

$$y^3 + 4axy + bx^2 = 0, \text{ so ist}$$

$$\frac{dFxy}{dx} = 4ay + 2bx \text{ und } \frac{dFxy}{dy} = 3y^2 + 4ax;$$

denn beim Ersten ist y, beim Andern x eine Constante. Also ist die erste Ableitungs-Gleichung zu der gegebenen Gleichung

$$4ay + 3bx + (3y^2 + 4ax)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Es sey $Fxy = ay^x + bx^y = 0$, so ist

$$\frac{dFxy}{dx} = ay^x \overset{e}{\log} a + ybx^{y-1}$$

$$\frac{dFxy}{dy} = axy^{x-1} + bx^y \overset{e}{\log} a,$$

also ist die erste Ableitungs-Gleichung

$$ay^x \log a + ybx^{y-1} + axy^{x-1} + bx^y \log a = 0.$$

Es sey $Fxy = a \cos x \sin y + b \cdot \frac{y^2}{x^2} = 0$, *so ist*

$$\frac{dFxy}{dx} = -a \sin x \sin y - \frac{2by^2}{x^3}$$

$$\frac{dFxy}{dy} = a \cos x \cos y + \frac{2by}{x^2}$$

also ist die erste Ableitungs-Gleichung

$$a(\cos x \cos y - \sin x \sin y) + \frac{2by}{x^2}\left(1 - \frac{y}{x}\right) = 0$$

oder

$$ax^3 \cos(x+y) + 2by(x-y) = 0$$

u. s. w.]

Nachdem man auf diese Weise die erste Ableitung von y in x und y gefunden, erhält man die zweite $\frac{d^2y}{dx}$ wenn man die erste Ableitung von $\frac{dy}{dx}$ nimmt u. s. w.

[*Der Vortrag dieses Artikels hat einige Schwierigkeit. Entwickelt man nemlich aus der gegebenen Gleichung* $Fxy = 0$, y *in* x *und setzt den gefundenen Werth von* y *wieder in die Gleichung zurück, so entsteht nothwendig eine* *identische* *Gleichung, das heisst, eine Gleichung in welcher sich alles* x *aufhebt, so, dass* $F(xfx)$, *wie es* *Lagrange* *bezeichnet, eigentlich gar nicht mehr eine von* x *abhängende Grösse ist. Es sey z. B. die gegebene Gleichung* $Fxy = 0$ *folgende*

$y^2 - 2mxy + x^2 = 0$, *so folgt daraus*

$$y = mx \pm \sqrt{(m^2x^2 - x^2)} = x[m \pm \sqrt{(m^2 - 1)}]$$

und man erhält, wenn man diesen Werth von y *in die gegebene Gleichung* $y^2 - 2mxy + x^2 = 0$ *zurück substituirt, weil* $y^2 = x^2[m^2 \pm 2m\sqrt{(m^2-1)} + m^2 - 1] = x^2[2m^2 - 1 \pm 2m\sqrt{(m^2-1)}]$ *ist,*

$$x^2[2m^2 - 1 \pm 2m\sqrt{(m^2-1)}] - 2mx^2[m \pm \sqrt{(m^2-1)}] + x^2 = 0, \text{ oder}$$

$$x^2[2m^2 - 1 - 2m^2 + 1 \pm 2m\sqrt{(m^2-1)} \mp 2m\sqrt{(m^2-1)}] = 0$$

wo sich alles x *von selbst aufhebt und welche Gleichung also gar kein* x *mehr enthält. Man sieht also nicht deutlich, wie eine Grösse, die gar kein* x *mehr enthält, als eine Grösse mit* x *behandelt werden könne. Soll das Verfahren etwas deutlicher seyn, so muss noch erinnert werden, dass man, nachdem der aus* $Fxy = 0$ *gefundene Werth von* y *in* x *in* Fxy *zurück substituirt worden, die Aufhebung nicht verrichten, sondern den Werth von* y, *abgesondert von dem übrigen* x, *beibehalten müsse. Doch ist der Umweg, mit der dazu nöthigen eigenthümlichen Operation, nicht nöthig. Die Auflösung der Aufgabe ist vielmehr schon unmittelbar in derjenigen des vorigen Artikels, und zwar ohne weitere Vorbereitung, enthalten. In diesem vorigen Artikel ist nemlich gezeigt worden, dass wenn z. B.* $y = fpq$ *oder* $z = fpq$ *ist, wo die Grössen* p *und* q *beide von* x *abhängen, die erste Ableitung von* z *nach* x,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dFpq}{dp} + \frac{dq}{dx} \cdot \frac{dFpq}{dq}$$

ist. Dieser allgemeine Ausdruck passt auch auf

den gegenwärtigen besondern Fall. Hier nemlich ist die Grösse Fxy *gegeben und in dieser ist, wenn man sie mit der Grösse* fpq *vergleicht, und also* $p = x$, $q = y$ *setzt, die eine Grösse* p *offenbar eine Function von* x, *denn sie ist* x *selbst, die andre Grösse* $y = q$ *aber ist eine Function von* x, *vermöge der gegebeneu* G l e i c h u n g $Fxy = 0$, *weil daraus* y *in* x *entwickelt werden kann, also ist, ohne Weiteres, nach dem allgemeinen Satze des vorigen Artikels,*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dx}{dx} \cdot \frac{dFxy}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dFxy}{dy}$$

oder weil $\frac{dx}{dx} = 1$ *ist, indem die erste Ableitung von* x *nach* x, *das heisst, der Coefficient zur ersten Potenz von* k, *wenn man in* x, $x + k$ *statt* x *setzt,* $= 1$ *ist,*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dFxy}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{dFxy}{dy}.$$

Nun aber ist hier noch die besondere Bedingung vorhanden, dass z *oder* $Fxy = 0$ *seyn soll. Da dieses für* j e d e n *Werth von* x *statt findet, so ist es auch der Fall, wenn man* $x + k$ *statt* x *setzt. Dann aber geht* z *in*

$$z + k\frac{dz}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} \ldots\ldots$$

über, und da also dieser Ausdruck $= 0$ *seyn muss, eben wie* z, *und zwar unabhängig von* k, *so folgt* $\frac{dz}{dx} = 0$ *oder*

$$\frac{dFxy}{dx} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dFxy}{dy} = 0$$

ganz wie oben gefunden wurde.

Der eigenthümliche Kunstgriff, sich y *aus der gegebenen Gleichung* $Fxy = 0$ *entwickelt und in* $Fxy = 0$ *substituirt vorzustellen, ist also nicht nöthig und befördert auch die Deutlichkeit nicht. Es ist gewöhnlich besser, einzelne analytische Kunstgriffe, die sich nicht von selbst finden, sondern Resultate besonderer Erfindung sind, so viel als möglich zu vermeiden. Dergleichen Kunstgriffe kann der Lernende, weil nicht zu verlangen, dass er sie eben so schnell erfinde wie der Urheber der Wissenschaft, nur im Gedächtniss behalten. Nichts aber erschwert wohl das mathematische Studium so sehr, als die Nothwendigkeit, das Gedächtniss zu Hülfe zu nehmen. Versagt solches den Dienst, so bekommt das Wissen eine, nicht sogleich wieder auszufüllende Lücke. In einer reinen Vernunftwissenschaft, wie die Mathematik, sollte das Gedächtniss so wenig wie möglich thätig seyn. Der vollkommenste Vortrag würde seyn, wenn sich die Wissenschaft blos durch Schlüsse, die in nothwendiger Verbindung unter einander stehen und aus einander folgen, von Anfang bis zu Ende aus sich selbst entwickelte, so dass sie jeden Augenblick, bloss mit dem Verstande, gleichsam von Neuem wieder hervorgebracht werden könnte.*

Diese letzte Bemerkung bezieht sich nicht etwa auf den obigen Satz insbesondere. Sie wird zufällig von der durch denselben veranlassten Erinnerung an die gewöhnlichen mathematischen Lehrbücher erregt, die häufig viel zu l e r n e n geben und eben vorzüglich dadurch die Mathematik in den Verdacht der Schwierigkeit und Un-

begreiflichkeit bringen, während doch nichts leichter ist als die Mathematik, wenn man sie consequent und wissenschaftlich behandelt, indem es eigentlich in derselben wenig zu lernen, sondern nur zu denken giebt, wozu Jeder nach seinen Kräften, ehe in ihm das Denken durch das Lernen ertödtet worden, fähig ist.]

Aus der obigen Analyse folgt der Satz, dass, wenn man eine beliebige Gleichung zwischen den veränderlichen Grössen x und y hat, dann auch Gleichungen zwischen den ersten, zweiten, dritten u. s. w. Ableitungen aller Glieder Statt finden. Wir wollen diese Gleichungen abgeleitete Gleichungen, und zwar erste, zweite, dritte u. s. w. abgeleitete Gleichung, nennen, je nachdem man die erste, zweite, dritte u. s. w. Ableitung nimmt.

Enthält die Gleichung nur eine veränderliche Grösse, die unbestimmt bleiben soll, was bei den identischen Gleichungen der Fall ist, so findet das Nemliche Statt, und man hat erste, zweite, dritte u. s. w. abgeleitete Gleichungen, die ebenfalls identisch sind.

Die dritte, vierte, fünfte, sechste und siebente Vorlesung über die Theorie der Functionen enthalten einen Commentar über die vorzüglichsten, in diesem Abschnitt abgehandelten Gegenstände. Man wird daselbst nützliche und wichtige Entwickelungen und neue Anwendungen finden. [*Worauf also zu verweisen.*]

Vierter Abschnitt.

Digression. Ueber die Mittel, die Reihen für Exponential-Grössen, Logarithmen, Sinus, Cosinus und Kreisbogen bloss algebraisch zu entwickeln.

18.

Die Reihen für die Exponential-Grössen und Logarithmen, so wie für die Sinus und Cosinus, sind zuerst durch die Differential-Rechnung gefunden worden. Halley ist, glaube ich, der erste, welcher die Reihen für Exponential-Grössen und Logarithmen aus der Newtonschen Binomial-Formel finden lehrte, und zwar mit Hülfe des Unendlichen, oder Unendlich-Kleinen. *(Philosophical transactions No. 216)* Dieser Methode ist Euler gefolgt und hat sie im 7. und 8ten Abschnitt des ersten Bandes seiner Introductio in Analysis etc. auf Sinus und Cosinus ausgedehnt. Aber, obgleich sie in der Analysis zulässig ist, [*dies ist, wenn vom Unendlichen gesprochen wird, zu bezweifeln*] so kann doch nicht geleugnet werden, dass sie nicht evident und strenge genug ist. Wir glauben also, dass man uns Dank wissen werde, wenn wir uns einen Augenblick von unsern Wege entfernen, um einen, von dem Begriff des Unendlichen befreiten, und ebenfalls blos auf die Binomial-Formel gegründeten Beweis dieser Formeln zu geben. Wir werden zugleich den Formeln eine grössere Allgemeinheit geben, durch welche man die Reihen in jedem besondern Fall so convergent

machen kann, als man will. [*Man sieht aus dieser Aeusserung Lagrange's: die beabsichtigten Entwickelungen scheinen ihm eine Abschweifung von seinem Wege, dass die neue Theorie, welche er vorträgt, noch im Entstehen ist, und dass er, wie auch Delambre oben in der Lebensbeschreibung erzählt, sie gleichsam aus dem Stegreif erst erschafft. Die Absicht dieser Theorie ist, das Unendliche zu entfernen, oder, mit andern Worten, die Differential- und Integral-Rechnung auf blos algebraische Begriffe zu bringen und sie gleichsam der Algebra einzuverleiben. Nichts liegt also wohl mehr auf den Wege einer solchen Bemühung als die eben bevorstehenden Entwickelungen. In den Leçons ist es schon anders.*]

Man nehme die Gleichung $y = a^x$, in welcher x der Logarithme von y für die Basis a ist. Man setze $1 + a - 1$, dessen Werth dem Werthe von a gleich ist, an die Stelle von a und dann $[(1 + a - 1)^n]^{\frac{x}{n}}$, welches wiederum nichts anders ist als a^x, an die Stelle von a^x, so erhält man

$$y = [(1 + a - 1)^n]^{\frac{x}{n}}$$

wo n eine beliebige Grösse ist, die in dem Ausdruck von y verschwindet [*oder vielmehr, sich mit sich selbst aufheben muss.*]

Nun entwickle man das Binonium $(1 + a - 1)^n$ in die Reihe

$$1 + n(a-1) + \frac{n.n-1}{2}(a-1)^2 + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}(a-1)^3 \ldots$$

und

und ordne die Glieder nach Potenzen von n, so erhält man

$$(1 + a - 1)^n = 1 + An + Bn^2 \ldots .$$

wo die Coefficienten durch A gegeben sind. Es ist leicht zu sehen dass zunächst

$$A = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots .$$

ist, welche Grösse die nemliche ist, wie in (11.) Die andern Coefficienten braucht man nicht zu entwickeln, weil sie aus der Rechnung, wie sich zeigen wird, wieder verschwinden.

Substituirt man, so kommt

$$y = (1 + An + Bn^2 \ldots .)^{\frac{x}{n}}.$$

Führt man nach der Binomial-Formel die Entwickelung aus, so erhält man

$$y = 1 + \frac{x}{n}(An + Bn^2 \ldots .) + \frac{x.x-n}{2n^2}(An + Bn^2 \ldots .)^2$$
$$+ \frac{x.x-n.x-2n}{2.3\,n^3}(An + Bn^2 \ldots .)^3 \ldots .$$

oder, wenn man die gleichen Potenzen von n in den Zählern und Nennern der Glieder aufhebt,

$$y = 1 + x(A + Bn \ldots .) + \tfrac{1}{2}x(x-n)(A + Bn \ldots .)^2$$
$$+ \frac{1}{2.3}x(x-n)(x-2n)(A + Bn \ldots .)^3 \ldots .$$

Nun muss sich nothwendig Alles was n enthält in dem Ausdruck von y aufheben, weil in y kein n vorkommt. Lässt man dies also, weil es von selbst verschwindet, was auch n sein mag, weg, so erhält man bloss

$$y = a^x = 1 + xA + \tfrac{1}{2}x^2A^2 + \frac{1}{2.3}x^3A^3 \ldots .$$

wie oben (11.) [*So sinnreich diese Entwickelung*

ist, so hat doch der letzte Uebergang zum Resultat einige Schwierigkeit, weil die Identität der Glieder die n enthalten, oder ihr Aufheben, in dem Ausdrucke nicht sichtbar ist, sondern nur geschlossen wird. Die Schwierigkeit liegt aber nicht in der Sache selbst; denn es giebt andere, noch einfachere Mittel zur algebraischen Entwickelung von a^x. *Man sehe den zweiten Theil.*]

19.

Wir wollen auf eine ähnliche Weise den Werth von x in y suchen. Wir geben zu dem Ende der Gleichung $a^x = y$ die Form

$$(1 + a - 1)^{nx} = (1 + y - 1)^n$$

welche mit $a^x = y$ identisch ist, und wo n eine beliebige Grösse bedeutet, die auf die Werthe von x und y keinen Einfluss hat.

Entwickelt man die beiden Glieder wie Binomien, so erhält man

$$1 + nx(a-1) + \frac{nx(nx-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{2.3}(a-1)^3 \dots$$

$$= 1 + n(y-1) + \frac{n.n-1}{2}(y-1)^2 + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}(y-1)^3 \dots$$

oder, wenn man auf beiden Seiten die Einheit weglässt und mit n dividirt,

$$x(a-1) + \frac{x(nx-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{x(nx-1)(nx-2)}{2.3}(a-1)^3 \dots$$

$$= y - 1 + \frac{n-1}{2}(y-1)^2 + \frac{n-1.n-2}{2.3}(y-1)^3 \dots$$

Da nun, wie gesagt, n eine gänzlich willkürliche Grösse ist, die auf den Ausdruck von x und y keinen Einfluss hat, so müssen sich die verschiedenen in

n multiplicirten Glieder, unter einander aufheben, so dass nur diejenigen übrig bleiben, welche kein n enthalten. Man erhält also, wenn man nur auf die Glieder ohne n Rücksicht nimmt, nachstehende Gleichung, in welcher ich die oben vorgekommene, Grösse A gebrauche:

$$xA = y - 1 - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 \ldots$$

woraus folgt

$$x = \overset{a}{log}\, y = \frac{y - 1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 \ldots}{A},$$

eine bekannte Formel, die mit derjenigen in (13.) übereinkommt, weil dort $A = \overset{e}{log}\, a$ ist. [*Hierbei ist Aehnliches wie oben bei der Entwickelung der Exponential-Grössen zu bemerken.*]

20.

Diese Reihe convergirt aber nur, wenn die Zahl y, deren Logarithmen sie giebt, wenig von der Einheit abweicht. Deshalb hat sie bei der Berechnung der Logarithmen wenig Nutzen. Auf folgende Weise lässt sich aber dieselbe für alle Zahlen convergent machen.

Die Fundamental-Gleichung $y = a^x$ lässt sich nemlich in folgende $y^m = a^{mx}$ verwandeln, wo m eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl ist. Setzt man diese Gleichung statt der gegebenen, so darf man in der letzten nur y^m statt y, und mx statt x schreiben. Man erhält also allgemein

$$\overset{a}{log}\, y = \frac{y^m - 1 - \frac{1}{2}(y^m - 1)^2 + \frac{1}{3}(y^m - 1)^3 \ldots}{mA}$$

wo man für m einen Bruch $\frac{1}{r}$ nehmen kann, der $\sqrt[r]{y}$ immer der Einheit so nahe bringt, als man will.

Wir wollen annehmen, die rte Wurzel von y habe nur die Einheit vor dem Comma, und hinter dem Comma 5 Nullen. Bleibt man dann bei der 5ten Decimalstelle stehen, so giebt offenbar schon das Glied $(y^m - 1)^2$ Nichts mehr. Um so mehr also verschwindet der Werth der folgenden Glieder. Man erhält folglich blos

$$\overset{a}{log}\, y = \frac{y^m - 1}{mA} = r\,\frac{\sqrt[r]{y} - 1}{A}.$$

Eben so erhält man

$$A = \overset{e}{log}\, a = r(\sqrt[r]{a} - 1),$$

also vollständig

$$\overset{a}{log}\, y = \frac{\sqrt[r]{y} - 1}{\sqrt[r]{a} - 1}.$$

Nach dieser Formel hat Briggs die ersten Logarithmen berechnet. Er hatte bemerkt, dass der Decimal-Theil der Wurzel einer beliebigen Grösse, wenn man wiederholt aus derselben die Quadrat-Wurzel zieht, und nach einer dieser Wurzel-Ausziehungen, sobald vor dem Comma nur noch die Einheit ist, bei zweimal so viel Decimal-Stellen stehen bleibt, als Nullen auf die Einheit folgen, immer grade die Hälfte des Decimal-Theils der vorhergehenden Wurzel ist, so dass die Decimal-Theile unter einander die nemlichen Verhältnisse haben, wie die Logarithmen der Wurzeln selbst. Dieser Umstand folgt aus der obigen Formel deutlich.

Macht man also z. B. $r = 2^{60}$, so ist, für $a = 10$,

$\sqrt[r]{a} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527$,

$$\frac{1}{r} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37988\ 40354,$$

also

$$\frac{1}{r} \times \frac{1}{\sqrt[r]{a}-1} = \frac{86736173798840354}{199717420812550527} = 0{,}434294481903251$$

$$= \frac{1}{A} = \frac{1}{\overset{e}{\log}\, a} = \overset{a}{\log}\, e.$$

Will man z. B. den Logarithmen von 3 haben, so setze man $y = 3$. Zieht man wieder 60 mal die Quadrat-Wurzel aus, so findet man

$$\sqrt[r]{y} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00095\ 28942\ 64074\ 58932$$

und hieraus

$$\log y = \frac{\sqrt[r]{y}-1}{\sqrt[r]{a}-1} = \frac{95289426407458932}{199717420812550527}$$

$$= 0{,}47712\ 12547\ 19662\ldots$$

Dieses Verfahren ist, wegen der grossen Menge der Wurzel-Ausziehungen, die zu einem bis auf mehrere Decimalstellen genauen Resultat nöthig sind, zu mühsam; aber die obige allgemeine Formel des Ausdrucks von x durch y dient zur Vereinfachung und Vervollständigung desselben; denn was auch y sein mag, so ist die Ausziehung einiger Wurzeln schon zureichend, um nur auf eine Zahl y^m oder $\sqrt[r]{y}$ zu kommen, die weiter Nichts als die Einheit vor dem Comma hat. Schon dann sind die Potenzen von $y^m - 1$ Brüche, die um so mehr abnehmen, je höher die Potenzen steigen; folglich convergirt dann die Reihe schon so sehr, dass eine kleine Anzahl von Gliedern zureicht. [*Es giebt inzwischen, wie bekannt*

noch bequemere Ausdrücke zur Berechnung der Logarithmen.]

21.

Man kann diese Methode auch auf die Entwickelung der Reihen anwenden, die den Sinus durch den Bogen ausdrücken, oder den Bogen durch den Sinus, und bei welchen man sonst (wie es auch Euler in dem nemlichen Werke thut) das Unendlich-Kleine anwendet.

Geht man nemlich von der bekannten Formel für die Vervielfältigung der Winkel

$$\cos nx + \sin nx \sqrt{-1} = (\cos x + \sin x \sqrt{-1})^n$$

aus, so erhält man umgekehrt

$$\cos x + \sin x \sqrt{-1} = (\cos nx + \sin nx \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$$

wo n eine beliebige Zahl ist.

Nun kann die Reihe für $\sin x$, welche sie auch sein mag, nur von der Form $Ax + Bx^2 \ldots.$ sein, weil Sinus und Bogen zugleich verschwinden, und also die Reihe für $\sin x$ kein Glied ohne x enthalten darf. Da aber $\cos x = \sqrt{(1 - \sin x^2)}$, so ist

$$\cos x = \sqrt{(1 - A^2x^2 - 2ABx^3 \ldots.)} = 1 - \frac{A^2}{2} x^2 + \ldots.$$

Die Coefficienten A, $B \ldots.$ werden als unabhängig von dem Bogen x betrachtet. Also sind sie die nemlichen für jeden Bogen. Setzt man also nx statt x, so erhält man

$$\sin nx = nAx + n^2Bx^2 \ldots. \text{ und } \cos nx = 1 - \frac{n^2A^2x^2}{2} \ldots.$$

Die obige Gleichung also geht in

$$\cos x + \sin x \sqrt{-1} = \left[1 + nAx\sqrt{-1} + n^2\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 \ldots\right]^{\frac{1}{n}}$$

über. Setzt man der Kürze wegen

$$Ax\sqrt{-1} + n\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + \ldots = X$$

und entwickelt das zweite Glied nach der Binomial-Formel, so erhält man

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = 1 + \frac{1}{n}(nX) + \frac{1-n}{n^2}(nX)^2 + \frac{1-n.\,1-2n}{2.3.n^3}(nX)^3 \ldots$$

$$= 1 + X + \frac{1-n}{2}X^2 + \frac{1-n.\,1-2n}{2.3}X^3 \ldots$$

Da die Werthe von $\sin x$ und $\cos x$ von der willkürlichen Grösse n unabhängig sind, so müssen sich alle Glieder des zweiten Theils der Gleichung, die in irgend eine Potenz von n multiplicirt sind, aufheben. Nimmt man daher nur auf diejenigen Glieder Rücksicht, in welchen n nach der Entwickelung nicht mehr vorkommt, so reducirt sich erstlich die Grösse X auf ihr erstes Glied $Ax\sqrt{-1}$, die Coefficienten der Potenzen von x aber reduciren sich auf

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2.3} \ldots$, so dass

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = 1 + Ax\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{2.3}(Ax\sqrt{-1})^3 \ldots$$

Entwickelt man die Potenzen von $\sqrt{-1}$ und vergleicht die reellen und unmöglichen Theile der Gleichung, [*dass dieses zulässlich sey, bedarf auch des Beweises*] so erhält man

$$\sin x = Ax - \frac{A^3 x^3}{2.3} + \frac{A^5 x^5}{2.3.4.5} \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{A^2 x^2}{2} + \frac{A^4 x^4}{2.3.4} \ldots\ldots$$

[*Diese beiden Reihen können kürzer, ohne Hülfe der unmöglichen Grössen gefunden werden. Man sehe den zweiten Theil.*]

22.

Um den Werth von x in $\sin x$ und $\cos x$ zu finden, setze man in die Grund-Formel

$$\cos nx + \sin nx \sqrt{-1} = (\cos x + \sin x \sqrt{-1})^n$$

statt $\sin nx$ und $\cos nx$ ihre Werthe in Reihen,

$$nAx + n^2 Bx^2 \ldots\ldots \text{ und } 1 - \frac{n^2 A^2 x^2}{2} \ldots\ldots$$

und entwickele die nte Potenz des zweiten Gliedes. Dieses giebt

$$1 + nAx\sqrt{-1} + n^2 \left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right) x^2 \ldots\ldots$$

$$= (\cos x)^n \left[1 + n\frac{\sin x}{\cos x}\sqrt{-1} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\sqrt{-1}\right)^2 \ldots\right]^n$$

Nun ist

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tang} x \text{ und } \cos x = \sqrt{(1 - \sin x^2)}, \text{ also}$$

$$(\cos x)^n = (1 - \sin x^2)^{\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2}\sin x^2 + \frac{n.\overline{n-2}}{2.4}\sin x^4 \ldots\ldots$$

Substituirt man diese Ausdrücke, so erscheint die Grösse n nur noch in den Coefficienten, und ordnet man die Glieder nach den Potenzen dieser Grösse, so bekommt das zweite Glied die Form

$$1 + nP + n^2 Q \ldots\ldots$$

wenn der Kürze wegen

$$P = tang\, x\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}(tang\, x\sqrt{-1})^2 + \tfrac{1}{3}(tang\, x\sqrt{-1})^3 - \ldots$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin x^2 - \tfrac{1}{4}\sin x^4 - \tfrac{1}{6}\sin x^6 \ldots,$$
$$Q = \tfrac{1}{2}(tang\, x\sqrt{-1})^2 \ldots$$

Lässt man auf beiden Seiten die Einheit weg, und dividirt die Gleichung durch n, so erhält man

$$Ax\sqrt{-1} + n\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 \ldots = P + nQ \ldots$$

Da diese Gleichung unabhängig von der Grösse n Statt findet, welche unbestimmt bleiben soll, so müssen sich die Glieder mit gleichen Potenzen von n gegenseitig aufheben. Dadurch reducirt sich P auf $Ax\sqrt{-1}$, also, wenn man die Potenzen von $tang\, x\sqrt{-1}$ entwickelt,

$$Ax\sqrt{-1} = (tang\, x - \tfrac{1}{3}tang\, x^3 + \tfrac{1}{5}tang\, x^5 - \ldots)\sqrt{-1}$$
$$+ \tfrac{1}{2}tang\, x^2 - \tfrac{1}{4}tang\, x^4 + \tfrac{1}{6}tang\, x^6 - \ldots,$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin x^2 - \tfrac{1}{4}\sin x^4 - \tfrac{1}{6}\sin x^6 \ldots$$

Da die Wurzelgrösse $\sqrt{-1}$ positiv und negativ genommen werden kann, so erhält man, wenn man Beides nach einander thut, die beiden Gleichungen von einander abzieht, und dann durch $2A\sqrt{-1}$ dividirt,

$$x = \frac{tang\, x - \tfrac{1}{3}tang\, x^3 + \tfrac{1}{5}tang\, x^5 - \ldots}{A}.$$

Auch reducirt sich die in (21.) gefundene Gleichung

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = 1 + Ax\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot 3}(Ax\sqrt{-1})^3 \ldots,$$

auf

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = a^{x\sqrt{-1}}$$

vermöge der Formel in (11.), wenn man für a die von A abhangende Grösse setzt, wie wir sie dort

bestimmt haben, nemlich $a = e^A$, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Aus dieser Formel findet man, wenn man die Wurzelgrössen positiv und negativ nimmt, leicht die bekannten Ausdrücke für $\sin x$ und $\cos x$ in unmöglichen Exponential-Grössen

$$\sin x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \text{ und } \cos x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} + a^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

und wenn man von den Exponential-Grössen zu den Logarithmen übergeht:

$$\overset{e}{\log}\, a . x\sqrt{-1} = \overset{e}{\log}(\cos x + \sin x\sqrt{-1}) = \overset{e}{\log}\cos x$$
$$+ \overset{e}{\log}(1 + \operatorname{tang} x\sqrt{-1}),$$

oder wenn man die Wurzelgrössen positiv und negativ nimmt, und eine Gleichung von der andern abzieht,

$$x = \frac{1}{\overset{e}{\log}\, a} \times \frac{1}{2\sqrt{-1}} \overset{e}{\log} \frac{1 + \operatorname{tang} x\sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang} x\sqrt{-1}}$$

woraus die oben gefundene Reihen entwickelt werden können, wenn man sich der Entwickelungen der Exponential-Grössen und Logarithmen von (18 und 19.) bedient.

Hierbei ist Folgendes zu bemerken. In den eben gefundenen Formeln nemlich, ist die Grösse A, wie die Grösse a, willkürlich, folglich können die logarithmischen Systeme nach Belieben angenommen werden, statt dass in den Formeln für Kreisbogen der Modul $\frac{1}{A}$ der Einheit gleich sein muss, welches zur Basis die Zahl e voraussetzt, deren hyperbolischer Logarithme 1 ist. Diese Formeln sind also

nur einzelne Fälle der gefundenen, aber die Besonderheit ist nothwendig, damit sie auf den Kreis passen, wie wir näher zeigen wollen.

23.

Alles kommt darauf an, zu beweisen, dass das erste Glied der Reihe für $\sin x$ blos x sein muss, statt dass es, in (21.), allgemein Ax gesetzt worden. Mit Hülfe des Unendlichen ist dieses leicht, weil sich im Kreise der Sinus, je kleiner er ist, desto mehr dem Bogen nähert, bis er mit demselben im Unendlich-Kleinen zusammen fällt. Setzt man also den Bogen x unendlich klein, so ist $\sin x = x$, folglich $A = 1$.

Da wir aber unsere Theorie von dem Unendlich-Kleinen, unabhängig machen wollen, so müssen wir auch hier das Unendliche bei Seite setzen.

Zu dem Ende setzen wir nichts weiter Voraus, als das archimedische Princip, dass der Sinus, welcher die Hälfte der Sehne des doppelten Bogens ist, allemal kleiner ist, als der ihm entsprechende Bogen, und die Tangente grösser. [*Dieser archimedische Satz kann auch bewiesen werden. Man sehe den* 2. *Band meiner Sammlung mathematischer Abhandlungen, S.* 24 *seq.*] Wir haben also $\sin x < x$ und $\tan g\, x > x$. Da aber

$$\tan g\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{(1 - \sin x^2)}}, \text{ so ist}$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{(1 - \sin x^2)}} > x \text{ und daraus}$$

$$\sin x > \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}}. \quad \Big[\textit{Nemlich } \frac{\sin x^2}{1 - \sin x^2} > x^2,$$

also $\sin x^2 > x^2 (1 - \sin x^2)$, *oder* $(1 + x^2) \sin x^2 > x^2$,

$$\text{oder } \sin x > \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}}\Big].$$

Bedienen wir uns also der Reihe für den Sinus (21.) so ist, wie klein auch der Bogen x sey,

$$Ax - \frac{A^3 x^3}{2 \cdot 3} + \frac{A^5 x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots < x \text{ und } > \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}}.$$

Dividirt man durch x, so erhält man

$$A - \frac{A^3 x^2}{2 \cdot 3} + \frac{A^5 x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots < 1 \text{ und } > \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)}}.$$

Da

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{1 + x^2} \text{ und } \sqrt{(1+x^2)} > 1, \text{ so ist}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} > \frac{1}{1 + x^2}.$$

Eben so sieht man dass $\frac{1}{1 + x^2} > 1 - x^2$, denn die Differenz ist $\frac{x^4}{1 + x^2}$, also ist die Grösse welche $\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ übertrifft, um so mehr grösser, als $1 - x^2$. Man kann also die obige Vergleichung auf folgende Form bringen

$$A - \frac{A^3 x^2}{2 \cdot 3} + \frac{A^5 x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots < 1 \text{ und } > 1 - x^2.$$

Nimmt man aber x so an, dass $\frac{A^3 x^2}{2 \cdot 3} < 1$ so ist offenbar die Reihe $A - \frac{A^3 x^2}{2 \cdot 3} \ldots$ convergent und ihre Summe kleiner als A, aber grösser als $A - \frac{A^3 x^3}{2 \cdot 3}$ weil man, wenn man das 2te und 3te, 4te und 5te Glied u. s. w. zusammenzieht, lauter negative, hinge-

gen wenn man das 3te und 4te, 5te und 6te Glied u. s. w. zusammen nimmt, lauter positive Grössen erhält. Setzt man also $x < \frac{\sqrt{6}}{A}$, so ist um so mehr

$$A - \frac{A^3 x^2}{2 \cdot 3} < 1 \text{ und } A > 1 - x^2, \text{ folglich}$$

$$A > (1 - x^2) \text{ und } < 1 + \frac{A^3 x^2}{2 \cdot 3}$$

welches immer bleibt, wie klein auch x sein mag. Daraus folgt, dass nothwendig $A = 1$ ist. Denn es sey $A = 1 + \lambda$, wo λ irgend eine sehr kleine Grösse ist, so darf man nur x so annehmen, dass $\frac{A^3 x^2}{2 \cdot 3} < \lambda$, so findet die Bedingung $A < 1 + \frac{A^3 x^2}{2 \cdot 3}$ nicht mehr Statt. Eben so, wenn $A = 1 - \lambda$ wäre, so darf man nur $x^2 < \lambda$ machen, um der andern Bedingung $A > 1 - x^2$ zu widersprechen. Im Kreise ist also nothwendig $A = 1$, folglich ist $a = e$, oder gleich der Zahl, deren hyperbolischer Logarithme $= 1$ (12.) wodurch unsere Formeln in die bekannten Ausdrücke der Kreis-Functionen übergehen. [*Dieser Beweis ist strenge, nur kann man das Ganze auch kürzer haben. Man sehe den zweiten Theil.*]

Fünfter Abschnitt.

Von der Entwickelung der Functionen, wenn man der veränderlichen Grösse einen bestimmten Werth beilegt. Fall, in welchem die allgemeine Regel nicht zutrifft. Von den Werthen der Brüche, deren Zähler und Nenner zugleich verschwinden. Von den besonderen Fällen, in welchen die Entwickelung einer Function nicht nach Potenzen mit ganzen positiven Exponenten des Wachsthums der veränderlichen Grössen fortschreitet.

24.

Die obigen Methoden für die Entwickelung der Function $f(x+k)$ setzen voraus, dass diese Entwickelung die Form

$$fx + k.\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}.\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots.$$

habe. Ehe wir weiter gehen, ist also nöthig zu untersuchen, in welchen Fällen diese Form nicht Statt findet.

Wir haben schon oben (2.) gezeigt, dass der Fall nur dann vorkommt, wenn x irgend einen bestimmten Werth erhält, welcher in fx und allen ihren Ableitungen, Wurzelgrössen verschwinden macht. Eine Wurzelgrösse aber kann in einem Ausdruck auf zweierlei Art verschwinden, entweder dadurch, dass die Grösse, mit welcher sie multiplicirt ist, oder dass die Wurzelgrösse selbst zu Null wird.

Im ersten Fall ist klar, dass möglicherweise die Wurzelgrösse, welche in fx verschwindet, in $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$ *etc.* nicht verschwinden kann, oder in fx und $\frac{dfx}{dx}$ und in $\frac{d^2fx}{dx^2}$, $\frac{d^3fx}{dx^3}$ *etc.* nicht u. s. w. weil die Wurzelgrösse in den Ableitungen verschiedene Coefficienten erhält, und diese Coefficienten möglicherweise nicht alle für einerlei Werthe von x Null sein können.

Im zweiten Fall ist gegentheils klar, dass die Wurzelgrösse nothwendigerweise in allen den Functionen fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$ bis ins Unendliche verschwinden muss, weil man jetzt annimmt, dass es die Wurzelgrösse selbst ist, die für einen bestimmten Werth von x zu Null wird. Nun kann aber, möglicherweise, das Verschwinden der Wurzelgrösse nicht mehr in der Function $f(x+k)$ Statt finden, weil k eine unbestimmte, von x unabhängige Grösse ist. Es folgt also, dass die Reihe

$$fx + k.\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}.\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots.$$

für die Entwickelung der Function $f(x+k)$, sobald Wurzelgrössen, die sie enthalten sollte, wegfallen, fehlerhaft ist. [*In jedem Fall ist der Ausdruck* fehlerhaft *nicht ganz genau, denn eine richtige Rechnung kann nie etwas* Fehlerhaftes *geben. Die Reihe* divergirt *in solchen Fällen und lässt, was sie ausdrückt,* unbestimmt.] Die Reihe ist also im ersten Fall legitim, im anderen nicht.

25.

Es sey $y = fx$ und folglich, wenn man die erste, zweite u. s. w. Ableitung nimmt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dfx}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2fx}{dx^2} \text{ etc.}$$

Angenommen nun, es verschwinde für irgend einen Werth von x in fx eine Wurzelgrösse, die in $\frac{dfx}{dx}$ bleibt, so ist klar, dass dann die Function $\frac{dfx}{dx}$ eine grössere Zahl verschiedener Werthe haben würde, als fx, wegen der Wurzelgrösse, die in $\frac{dfx}{dx}$ vorkommt, in fx aber verschwindet, woraus folgt, dass der Werth von $\frac{dy}{dx}$ nicht durch eine Function von x und y ausgedrückt werden kann, welche die Wurzelgrösse nicht enthält. Nun erhält man, wenn man die Wurzelgrösse durch die Erhebung zu Potenzen in fx wegschafft und die entstehende Gleichung durch $Fxy = 0$, bezeichnet, aus der ersten abgeleiteten Gleichung derselben, wie in (17.) gezeigt,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dFxy}{dx} : \frac{dFxy}{dy}.$$

Dieser Ausdruck ist also fehlerhaft, wenn man x den besondern Werth giebt, was aber nicht geschehen kann, ohne dass die Grössen $\frac{dFxy}{dx}$ und $\frac{dFxy}{dy}$ zugleich verschwinden. In einem solchen Fall also ist der Ausdruck von $\frac{dy}{dx}$ gleich $\frac{0}{0}$; und umgekehrt, wenn Dieses geschieht, so ist es ein Zeichen, dass der zuge-

zugehörige Werth von x eine Wurzelgrösse in fx, nicht aber in $\frac{dfx}{dx}$ verschwinden gemacht hat. [*Hieraus folgt nun deutlich, dass nicht eine Fehlerhaftigkeit, sondern Unbestimmtheit der Formel in solchen Fällen Statt findet, denn der Ausdruck* $\frac{0}{0}$ *ist unbestimmt.*]

Um in solchem Falle den Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu finden, muss man nicht bei der ersten von $Fxy = 0$ abgeleiteten Gleichung, welche

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dFxy}{dy} + \frac{dFxy}{dx} = 0$$

ist und jetzt identisch, unabhängig von dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ Statt findet, stehen bleiben, sondern zu der zweiten abgeleiteten Gleichung übergehen, welche man nach den nemlichen Regeln findet und welche von der Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} \frac{dFxy}{dy} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{d^2Fxy}{dy^2} + 2\frac{dy}{dx} \frac{d^2Fxy}{dx\,dy} + \frac{d^2Fx}{dx^2} = 0 \text{ ist.}$$

[*Nemlich die erste Ableitung von* $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dFxy}{dy} + \frac{dFxy}{dx}$, *nach* x, *ist* $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{dFxy}{dy} + \frac{dy}{dx} \frac{d^2Fxy}{dy\,dx} + \frac{d^2Fxy}{dx^2}$ *und nach* y, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{d^2Fxy}{dy^2} + \frac{dy}{dx} \frac{d^2Fxy}{dx\,dy}$, *welches zusammen das Vorige ausmacht. Dass* $\frac{d^2Fxy}{dy\,dx} \cdot \frac{dy}{dx}$ *und* $\frac{d^2Fxy}{dx\,dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ *Eins und dasselbe ist, und folglich statt dieser beiden Grössen*

$2\frac{dy}{dx}.\frac{d^2Fxy}{dy\,dx}$ *geschrieben werden kann, wird weiter unten bewiesen, wie auch Lagrange an dieser Stelle, indem er seine Zeichen erklärt, bemerkt.*]

Diese Gleichung giebt allgemein den Werth von $\frac{dy}{dx}$, aber in dem gegebenen Falle verschwindet das Glied, welches $\frac{d^2y}{dx^2}$ enthält, weil die Grösse $\frac{dFxy}{dy}$ gleich Null wird. Die übrig bleibende Gleichung ist eine Gleichung des zweiten Grades in Rücksicht auf $\frac{dy}{dx}$, aus welcher man den Werth von $\frac{dy}{dx}$ finden kann, der also zweifach ist.

26.

Es sey z. B. $fx = (x-a)\sqrt{(x-b)}$, so dass

$$y = (x-a)\sqrt{(x-b)}, \text{ so ist}$$

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{dy}{dx} = \sqrt{(x-b)} + \frac{x-a}{2\sqrt{(x-b)}}.$$

Setzt man hier $x = a$, so ist

$$y = 0, \frac{dy}{dx} = \sqrt{(x-b)} = \sqrt{(a-b)}.$$

Man sieht also, dass die Wurzelgrösse in dem Werthe von y verschwindet, nicht aber in dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$, so, dass also y nur einen Werth hat, hingegen $\frac{dy}{dx}$ deren zwei. Bringt man nun die gegebene Gleichung auf die rationale Form $y^2 = (x-a)^2(x-b)$ und nimmt dann die erste Ableitung, so erhält man

$$2y\,\frac{dy}{dx} = 2(x-a)(x-b) + (x-a)^2$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-a)(x-b) + (x-a)^2}{2y}$$

folgt. Macht man hier $x = a$, so erhält man $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Geht man also zur zweiten Ableitung über, so erhält man

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\,\frac{d^2y}{dx^2} = 4(x-a) + 2(x-b)$$

Hier giebt $x = a$, wegen $y = 0$;

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2(x-b) = 2(a-b) \text{ also } \frac{dy}{dx} = \sqrt{(a-b)},$$

wie oben.

Uebrigens könnte der nemliche Werth von x, für welchen in der ersten Ableitung Glieder verschwinden, auch noch in der zweiten Ableitung Glieder aufheben. In diesem Fall muss man die dritte Ableitung nehmen, welche, wegen Aufhebung der Glieder mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^3y}{dx^3}$, blos zu einer Gleichung mit $\frac{dy}{dx}$ werden würde, und zwar vom dritten Grade u. s. w. Alles dieses hängt von der Natur der Wurzelgrösse ab, die in fx aufgehoben wird, und die durch den Grad der Gleichung, in welcher $\frac{dy}{dx}$ vorkommt, ersetzt werden muss. Wir wollen indessen diesen Gegenstand, der uns zu weit von unserem Ziel abführen würde, nicht weiter verfolgen.

27.

Man setze zweitens, der nemliche Werth von x, welcher in fx eine Wurzelgrösse verschwinden macht, hebe dieselbe auch in $\frac{dfx}{dx}$ auf, ohne sie in $\frac{d^2fx}{dx^2}$ zu Null zu machen. Alsdann haben fx und $\frac{dfx}{dx}$ gleich viele Werthe, aber $\frac{d^2fx}{dx^2}$ hat mehr Werthe. Hebt man also die Wurzelgrösse in der Gleichung $y = fx$ auf, so ist der Werth von $\frac{dy}{dx}$, den man daraus ableitet, $= \frac{0}{0}$ und man muss, um den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu finden, zu höheren abgeleiteten Gleichungen übergehen.

Es sey $y = (x-a)^2 \sqrt{(x-b)}$, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-a)\sqrt{(x-b)} + \frac{(x-a)^2}{2\sqrt{(x-b)}} \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sqrt{(x-b)} + \frac{2(x-a)}{\sqrt{(x-b)}} - \frac{(x-a)^2}{4(x-b)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man hier $x = a$, so erhält man

$$y = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = 2\sqrt{(x-b)} = 2\sqrt{(a-b)}$$

Bringt man aber die gegebene Gleichung auf die rationale Form

$$y^2 = (x-a)^4 (x-b),$$

so erhält man daraus die erste abgeleitete Gleichung

$$2y\frac{dy}{dx} = 4(x-a)^3(x-b) + (x-a)^4$$

welche, für $x = a$, $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ giebt, weil $y = 0$ ist, wenigstens, wenn man nicht, nachdem y substituirt worden,

das Ganze erst durch $(x-a)^2$ dividirt und erst hernach $x=a$ setzt, welches $\frac{dy}{dx}=0$ geben würde.

Geht man zur zweiten Gleichung über, so erhält man

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}=6(x-a)^2(x-b)+4(x-a)^3$$

und für $x=a$, $\frac{dy}{dx}=0$, wie oben. Aber, um den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu finden, muss man zur dritten, und selbst zur vierten Gleichung fortgehen. Jene ist

$$3\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+y\frac{d^3y}{dx^3}=18(x-a)^2+12(x-a)(x-b)$$

in welcher alle Glieder für $x=a$ verschwinden.

Die vierte Gleichung ist

$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+4\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+y\frac{d^4y}{dx^4}=48(x-a)$$
$$+12(x-b).$$

Setzt man $x=a$, also $y=0$ und $\frac{dy}{dx}=0$, so erhält man

$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=12(x-b),\ \frac{d^2y}{dx}=2\sqrt{(x-b)}$$
$$=2\sqrt{(a-b)},$$

wie oben.

Wir wollen diese Untersuchung, die übrigens nach den obigen Principien keine Schwierigkeit hat, nicht weiter fortsetzen. Wir wollen nur bemerken, dass die Curve, deren Abscissen x und deren Ordinaten $y=fx$ sind, für dasjenige x welches in fx und nicht zugleich in $\frac{dfx}{dx}$ eine Wurzelgrösse verschwin-

den macht, einen sogenannten vielfachen Punkt *(point multiple)*, für dasjenige x, welches in fx und $\frac{dfx}{dx}$ eine Wurzelgrösse verschwinden macht, einen Berührungs - Punkt *(point d'attouchement)*, für dasjenige x, welches in fx, $\frac{dfx}{dx}$ und $\frac{d^2fx}{dx^2}$ zugleich, eine Wurzelgrösse aufhebt, einen Krümmungs-Punkt *(point d'osculation)* hat u. s. w. Man wird den Grund davon bei der Anwendung der Theorie der Functionen auf die Theorie der Curven sehen.

28.

Bei Gelegenheit dieser Schwierigkeit wollen wir der Methode erwähnen, den Werth eines Bruches zu finden, dessen Zähler und Nenner zugleich verschwinden.

Es sey $\frac{fx}{Fx}$ ein solcher Bruch, wo fx und Fx Functionen von x sind, die für $x = a$ beide zugleich verschwinden. Man verlangt den Werth des Bruches für $x = a$.

Man setze $\frac{fx}{Fx} = y$ und folglich $yFx = fx$. Diese Gleichung ist identisch für $x = a$ und folglich in diesem Fall von y unabhängig, welches also unbestimmt bleibt. Sie dient folglich in diesem Zustande zur Bestimmung von y für den Fall $x = a$ nicht. Nimmt man aber die erste abgeleitete Gleichung, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} \cdot Fx + y \cdot \frac{dFx}{dx} = \frac{dfx}{dx} \cdot$$

Hier verschmindet das Glied $y\frac{dFx}{dx^2}$ für $x = \alpha$ und der Rest der Gleichung ist

$$y = \frac{dfx}{dx} : \frac{dFx}{dx}.$$

Verschwänden auch die beiden Ableitungen $\frac{dfx}{dx}$ und $\frac{dFx}{dx}$ zugleich, so fände man auf dieselbe Weise, wenn man in die obige Gleichung $\frac{dfx}{dx}$ und $\frac{dFx}{dx}$ statt fx und Fx setzte, für y den neuen Ausdruck $\frac{d^2fx}{dx} : \frac{d^2Fx}{dx^2}$ u. s. w. Man kann Solches auch unmittelbar aus der ersten Ableitungs-Gleichung finden, wenn man erwägt, dass sie, weil sie identisch ist, nicht mehr zur Bestimmung von y dienen kann, dass man also nothwendig zur zweiten abgeleiteten Gleichung übergehen muss, welche

$$\frac{d^2y}{dx^2} . Fx + 2\frac{dy}{dx} . \frac{dFx}{dx} + y\frac{d^2Fx}{dx^2} = \frac{d^2fx}{dx^2}$$

ist. Da die Functionen Fx und $\frac{dFx}{dx}$ für $x = \alpha$ verschwinden, so fallen die Glieder $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ weg, und der Rest giebt

$$y = \frac{d^2fx}{dx^2} : \frac{d^2Fx}{dx^2}$$

wie oben.

Es ist nicht zu fürchten, dass die Functionen fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$ Fx, $\frac{dFx}{dx}$, $\frac{d^2Fx}{dx^2}$.... für $x = a$ alle zugleich bis ins Unendliche verschwinden können, wie Einige anzunehmen scheinen; denn weil

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\dots\dots$$

ist, so würde in diesem Fall, wenn man $x = a$ setzte, $f(a+k)$ für jeden Werth von k gleich Null sein müssen, welches unmöglich ist. Eben so $F(x+k)$. Aber es könnte sein dass diese Functionen für $x = a$, unendlich gross werden, welches die Brüche $\frac{fx}{Fx}$, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{dFx}{dx}$ *etc.* unbestimmt machen würde. Die Auflösung dieser Schwierigkeit hängt von der Untersuchung des zweiten Falles in (24.) ab, welcher folgender ist.

29.

Der Fall findet Statt, wenn $x = a$ eine Wurzelgrösse in fx selbst verschwinden macht, in welchem Fall dieselbe in den abgeleiteten Functionen ebenfalls verschwindet. Da nun die Wurzelgrösse in $f(x+k)$ bleibt, so muss sie auch in der Entwickelung von $f(x+k)$ bleiben. Da sie aber von x nicht herkommen kann, so muss sie von k herkommen, woraus folgt, dass die Entwickelung in diesem Fall nothwendig Potenzen von k mit gebrochenen Exponenten enthalten muss. In der That ist klar, dass wenn z. B. fx die Grösse $\sqrt[m]{X}$ enthielte, wo X eine Function von x ist, welche für $x = a$ verschwindet, und man setzte $x + k$ statt x, dass dann die Grösse X in

$$X + k\frac{dX}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2X}{dx^2}\dots\dots$$

übergehen würde, welches für $x = a$ blos

$$k\frac{dX}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2X}{dx^2}\dots\dots$$

für X giebt, so dass

$$\sqrt[m]{X} = \sqrt[m]{\left[k\left(\frac{dX}{dx} + \frac{k}{2}\frac{d^2X}{dx^2}\dots\right)\right]}$$ ist.

In dem Falle $x = a$ enthielte also die Function $f(x+k)$ die Wurzelgrösse $\sqrt[m]{k}$, die folglich auch in der Entwickelung von $f(x+k)$ nach Potenzen von k, vorkommen muss. Wir wollen sehen was in diesem Falle die unrichtige Entwickelung $fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx}\dots$ giebt.

Man erwäge, dass $\frac{df(x+k)}{dx}, \frac{d^2f(x+k)}{dx}\dots$, immer die erste, zweite abgeleiteten Functionen sind, man mag sie nach x oder k nehmen; denn man erhält das nemliche Wachsthum der Grösse $x+k$, man mag x oder k um irgend eine beliebige Grösse [*z. B. wie oben um* e] zunehmen lassen. Daraus folgt, dass man auch die Werthe von $\frac{dfx}{dx}, \frac{d^2fx}{dx^2}\dots$ für jedes beliebige x erhält, wenn man die erste, zweite etc. Ableitung von $f(x+k)$ nach k nimmt und hernach $k = 0$ setzt.

Setzt man aber nun, dass die Entwickelung von $f(x+k)$, für $x = a$, ein Glied mit k^m, wie Ak^m enthalten soll, wo A eine Function von a, m aber keine positive ganze Zahl ist, so muss nothwendig die Entwickelung von $\frac{df(x+k)}{dk}, \frac{d^2f(x+k)}{dk^2}\dots$ Glieder wie mAk^{m-1}, $m.m-1.Ak^{m-2}$ enthalten (10). setzt man also $k = 0$, so folgt, dass die Functionen

fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$, für $x = 0$, die Glieder $A\,0^m$, $mA\,0^{m-1}$, $m.\,m-1\,A\,0^{m-2}$ enthalten müssen.

Ist m negativ, so sind alle diese Glieder unendlich gross.

Ist m positiv, aber keine ganze Zahl, so sey n die nächst grössere ganze Zahl. Dann ist das Glied $m(m-1)\ldots.(m-n+1)\,A\,0^{m-n}$ mit allen folgenden unendlich gross, alle vorhergehenden aber sind Null.

Also ist überhaupt die Function $\frac{d^n fx}{dx}$, mit allen folgenden bis ins Unendliche, unendlich gross, wenn n die unmittelbar auf m folgende ganze Zahl ist.

30.

Daraus folgt, dass die Entwickelung

$$fx + k.\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}.\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots.$$

nur dann für irgend einen bestimmten Werth von x unrichtig ist, wenn eine der Grössen fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$.... und alle folgende höhere Ableitungen unendlich gross sind. Ist in diesem Fall n der Zeiger der ersten Function die unendlich gross ist, so muss die Entwickelung ein Glied von der Form k^m enthalten, wo m eine zwischen n und $n-1$ liegende Zahl ist.

Sind alle Functionen fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$.... für den nemlichen Werth von x unendlich gross,

so, enthält die Entwickelung von $f(x+k)$ in diesem Falle negative Potenzen von k.

Um alsdann die richtige Entwickelung nach steigenden Potenzen von k zu finden, muss man sogleich in $f(x+k)$, x seinen bestimmten Werth geben, und nach den bekannten Regeln den Ausdruck nach steigenden Potenzen von k entwickeln, während man auf die Potenzen von k mit gebrochenen oder negativen Exponenten Acht hat.

Uebrigens ist zu bemerken, dass wenn man $y = fx$ setzt, und x und y die Coordinaten einer Curve sind, diese Curve in dem Punkte, für welchen eine der Functionen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.... mit allen folgenden unendlich gross ist, einen Wiederkehr-Punkt *(rebroussement)* hat, dessen Art von dem Zeiger n abhängt, in so fern der Nenner des gebrochenen Exponenten eine gerade Zahl ist. Die Art der Widerkehr bestimmt man in diesem Fall aus der Entwickelung von $f(x+k)$.

31.

In dem Beispiele (27.) wo $y = (x-a)\sqrt{(x-b)}$ war, hebt der Werth $x = b$ die Wurzelgrösse in y auf, und muss solche also auch in den Ableitungen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ aufheben. Also ist die Entwickelung $fx + k.\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}.\frac{d^2fx}{dx^2}$.... von $f(x+k)$, wenn man $y = fx = (x-a)\sqrt{(x-b)}$

setzt, in dem Fall $x = b$, unrichtig. In der That erhält man in diesem Fall, für $x = b$,

$$y = 0,\ \frac{dy}{dx} = \sqrt{(x-b)} + \frac{x-a}{2\sqrt{(x-b)}} = \infty,$$

und eben so

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty,\ \frac{d^3y}{dx^3} = \infty \ etc.$$

Die Entwickelung muss also in diesem Fall ein Glied von der Form k^m haben, wo m zwischen 0 und 1 liegt.

Es sey $x = b + k$, so geht in der That fx in $(b - a + k)\sqrt{k}$ über, so dass die richtige Entwickelung dieser Function, $(b - a)\sqrt{k} + k^{\frac{3}{2}}$ ist.

32.

Auf dieselbe Weise lässt sich auch die Schwierigkeit am Schlusse von (28.) bei Brüchen heben, die immer fort unbestimmt bleiben, wenn man annimmt, dass die abgeleiteten Functionen des Zählers und des Nenners unendlich gross werden. Wir haben dort gesehen, dass solches nur in dem Fall geschehen kann, wenn irgend ein bestimmter Werth von x die Functionen der Reihe nach unendlich gross macht. Man muss also alsdann (wenn a derjenige Werth von x ist, der die Functionen unendlich gross macht) in den allgemeinen Ausdruck der Functionen, $x = a + k$ setzen und den Ausdruck in eine Reihe nach steigenden Potenzen von k entwickeln. Das erste Glied dieser Reihe giebt dann für $k = 0$ den gesuchten Werth des Bruches für $x = a$.

Hätte man also z. B. den Bruch

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}},$$

welcher $\frac{0}{0}$ ist, für $x = a$, und für welchen die Ableitungen aller Ordnungen von Zähler und Nenner, für $x = a$ unendlich gross sind, so erhielte man, wenn man $a+k$ statt x setzte, und Zähler und Nenner in Reihen auflösete,

$$\frac{\sqrt{k}+\frac{k}{2\sqrt{a}}\cdots\cdot}{\sqrt{2ak}+\frac{k\sqrt{k}}{2\sqrt{2a}}\cdots\cdot} = \frac{1}{\sqrt{2a}}+\frac{\sqrt{k}}{2a\sqrt{2}}\cdots\cdot$$

Für $k = 0$ findet man $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, welches der gesuchte Werth des Bruchs für $x = a$ ist.

Nimmt man nach der Methode von (28.) die ersten Ableitungen des Zählers und Nenners, so erhält man

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{(x-a)}} \text{ und } \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}},$$

welche Grössen für $x = a$ unendlich gross sind. Aber, multiplicirt man sie mit $2\sqrt{(x-a)}$, so ist der neue Bruch

$$\frac{\frac{\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{x}}+1}{\frac{2x}{\sqrt{(x+a)}}},$$

welches für $x = a$, $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ giebt, wie oben.

Auf diese Weise lassen sich die Schwierigkeiten heben, die bei der Entwickelung von $f(x+k)$ vorkommen können. Obgleich wir nur algebraische Functionen in Betrachtung gezogen haben, so können doch auch die obigen Auflösungen leicht auf transcendente

Grössen ausgedehnt werden. Da indessen diese Schwierigkeiten nur allein für bestimmte einzelne Werthe von x Statt haben, so sind sie von keinem Einfluss auf die Theorie der abgeleiteten Functionen $\frac{dfx}{dx}, \frac{d^2fx}{dx^2} \ldots$ selbst. Es war indessen nöthig, diesen Gegenstand näher zu beleuchten und die Mittel zur Vermeidung der Schwierigkeit zu zeigen, um nirgend eine Dunkelheit in dieser Theorie zurückzulassen. Man sehe auch die achte der Vorlesungen über die Theorie der Functionen.

[*Man kann alles dieses leichter finden. Lagrange kommt auf den Gegenstand in der erwähnten achten Vorlesung zurück, wo derselbe schon klarer wird. Die verwickelten und weitläuftigen Rechnungen dieses Abschnitts, die dennoch nur bei einem besonderen, nemlich blos bei dem einzelnen Fall algebraischer Functionen stehen bleiben, und andere Grössen, z. B. transcendente, nicht berühren und noch weniger den Gegenstand allgemein erläutern, sind abermals ein Beweis von der Neuheit der Theorie, die hier erst wie aus dem Nichts entsteht. Die Sache an sich hat keine Schwierigkeit, wie sich unten in der 8ten Vorlesung näher zeigt und die Werthe der Brüche* $\frac{0}{0}$ *und* $\frac{\infty}{\infty}$ *kann man allgemein und sehr leicht finden. Hier werde blos bemerkt, dass die öfter wiederkehrende Behauptung: die allgemeine Entwickelung sey in Fällen wo die Ableitungen verschwinden oder unendlich gross werden falsch,*

(fautif, en defaut), wohl nicht genau, wenigstens ihren Zweck verfehlend und mindestens nicht gut ausgedrückt ist. Ein richtiges Verfahren kann nie etwas falsches geben, und ein divergirender Ausdruck ist nicht unrichtig, sondern blos unbestimmt. Dergleichen Fälle für einzelne, besondere Werthe veränderlicher Grössen machen nie eine Ausnahme von der Regel und die Theorie hat, wie man nach Lagrange's Ausdruck glauben sollte, hier nicht etwa eine Schwäche. Alles was sie giebt ist für alle Fälle ohne Ausnahme richtig; blos kann für einzelne Werthe der veränderlichen Grösse die entstehende Reihe divergiren, und folglich in diesen Fällen ihre Form zum Ausdruck des Resultats nicht geschickt sein. Durch eine leichte Verwandlung aber lässt sich die Reihe jedesmal zu ihrem Zweck geschickt machen.]

Sechster Abschnitt.

Allgemeine Auflösung der Functionen in Reihen. Entwickelung der Functionen in endliche Reihen von einer beliebigen Gliederzahl. Mittel, die Reste nach einem beliebigen Gliede auszudrücken. Neuer Lehrsatz von solchen Reihen.

33.

Wir haben bis jetzt gesehen, wie man unmittelbar alle Glieder der Entwickelung von $f(x+k)$ nach Potenzen von k finden kann. Auf dieselbe Weise kann man eine beliebige Function nach steigenden Potenzen einer in ihr enthaltenen veränderlichen Grösse entwickeln.

Wir wollen den Ausdruck

$$f(x+k)=fx+k\frac{dfx}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}\ldots$$

betrachten. Da x und k beide unbestimmte Grössen sind, so kann man $x-k$ statt x setzen, welches [*wenn man der Kürze wegen* ε *statt* $x-k$ *schreibt*]

$$fx=f(x-k)+k\frac{df(x-k)}{d\varepsilon}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2f(x-k)}{d\varepsilon^2}\ldots$$

giebt. Ferner kann man xz statt k setzen [*so dass also dann* $x-xz=\varepsilon$ *ist*] welches

$$fx=f(x-xz)+xz\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}+\frac{x^2z^2}{2}\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2}\ldots$$

giebt, wo z eine beliebige Grösse ist.

Hier bedeutet fx, wie man sieht, eine beliebige Function von x und $\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$, $\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2}$ *etc.*

bedeu-

bedeuten die erste, zweite u. s. w. Ableitung von fx [*nach* x], wenn man darin $x(1-z)$ statt x setzt. Da aber fx nur in Beziehung auf ihre Ableitungen eine Function von x ist, so kann fx jede beliebige Function von x und auch von andern Grössen bezeichnen, in so fern letztere nur in den Ableitungen $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$ constant sind.

Setzt man in den obigen Ausdruck $z=0$, so erhält man die identische Gleichung $fx=fx$. Macht man $z=1$, so verschwindet die Grösse $x-xz$. Bezeichnet man also durch fox, $\frac{dfox}{dx}$, $\frac{d^2fox}{dx^2}$ die Werthe von fx, $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$ für $x=o$, [*Lagrange bezeichnet solche durch* f, f', f''....] so erhält man

$$fx=fox+x\frac{dfox}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2fox}{dx^2}\ldots.$$

Bedeutet also fx eine gegebene Function von mehreren veränderlichen Grössen x, y *etc.* so darf man nur, nach den allgemeinen Regeln, die Ableitungen davon nach x allein suchen und dann $x=0$ setzen, so erhält man alle Glieder der Entwickelung der Function nach steigenden Potenzen von x und es ist klar, dass die Werthe der Grössen fox, $\frac{dfox}{dx}$ *etc.* Functionen von y *etc.* ohne x sind, die alle von der Stammgrösse nach einem, durch die Art des Vorkommens von x in fx, bestimmten Gesetze abhängen.

[*Diesen Ausdruck für* fx *kann man leichter*

finden, wenn man in die allgemeine Entwickelungs-Reihe

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \dots$$

sogleich $x=0$ *und* $k=x$ *setzt. Dieses giebt das Resultat unmittelbar. Man kann auch blos* $k=-x$ *setzen, so ist* $f(x+k)=fox$ *und folglich*

$$fx = fox + x\frac{dfx}{dx} - \frac{x^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} - \dots$$

welche Reihe ebenfalls zur Entwickelung von fx *gebraucht werden kann. Es giebt noch andere Mittel, die allgemeine Entwickelungs-Reihe zur Auflösung von* fx *in eine Reihe geschickt zu machen. Man findet eine Zusammenstellung derselben in der Sammlung mathematischer Abhandlungen des Uebersetzers, 1. Bd., 8te Abhandlung, S. 220 etc.*]

34.

Man könnte diese Entwickelung auch noch leichter finden, wenn man sogleich

$$fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \dots$$

setzte, wo A, B, $C \dots$ von x unabhängige Grössen sind. Um diese Grössen zu finden erwäge man, dass die Gleichung, weil sie identisch sein soll, für jeden Werth von x Statt finden muss. Macht man also erstlich $x=0$, so erhält man $fox=A$. Nimmt man, zweitens, die erste Ableitung aller Glieder nach (10 und 17.), so erhält man die identische Gleichung

$$\frac{dfx}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 \dots$$

Macht man jetzt wiederum $x=0$, so findet man

$$\frac{dfox}{dx} = B.$$

Nimmt man, drittens, von Neuem die erste Ableitung, so erhält man

$$\frac{d^2 fx}{dx^2} = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 \ldots.$$

welches, wiederum für $x = 0$, $\frac{d^2 f0x}{dx^2} = 2C$ giebt. Fährt man so fort, so findet man

$$\frac{d^3 f0x}{dx^3} = 2.3D, \ \frac{d^4 f0x}{dx^4} = 2.3.4E \ etc.$$

also

$$A = f0x, \ B = \frac{df0x}{dx}, \ C = \frac{1}{2}\frac{d^2 f0x}{dx^2},$$

$$D = \frac{1}{2.3}\frac{d^3 f0x}{dx^3} \ etc.$$

welches, wenn man substituirt, für fx die obige Reihe giebt. Die Methode ist aber weniger direct als die vorige und setzt schon die Theorie der Ableitungen voraus; auch ist sie weniger strenge, weil sie voraussetzt, dass alle Glieder für $x = 0$ verschwinden, obgleich die Coefficienten dieser Glieder, in den Ableitungen bis ins Unendliche zunehmen; aber der Vorzug der Methode besteht darin, dass sie ein Mittel an die Hand giebt, in der Entwickelung der Reihe bei einem beliebigen Gliede stehen zu bleiben und den Werth des Restes der Reihe zu schätzen. [*Die Schwierigkeit, welche Lagrange von dieser Methode anführt, lässt sich vermindern. Setzt man nemlich, wie oben,*

$$fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots.$$

und hierin $x + k$ statt x, so erhält man

$$f(x+k) = A + B(x+k) + C(x+k)^2 + D(x+k)^3 \ldots,$$

oder

$$f(x+k) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots$$
$$+ k(B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 \ldots$$
$$+ \frac{k^2}{2}(2C + 3.2Dx + 4.3Ex^2 \ldots)$$
$$+ \frac{k^3}{2.3}(3.2D + 4.3.2Ex \ldots)$$
$$+ \frac{k^4}{2.3.4}(E \ldots)$$

zu welcher Entwickelung nichts weiter als der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten nöthig ist.

Die zweite Reihe rechterhand wird, wie leicht zu sehen, aus der ersten eben so gefunden, wie die dritte aus der zweiten, die vierte aus der dritten u. s. w. nemlich so, dass man den Exponenten von x, in jedem Gliede, allemal um Eins vermindert und damit multiplicirt. Bezeichnet man also diese Operation, z. B. um von der ersten auf die zweite Reihe zu kommen, durch $\frac{dfx}{dx}$, *so muss man die Operation, um von der zweiten auf die dritte zu kommen, durch* $\frac{d^2fx}{dx^2}$ *u. s. w. bezeichnen und es ist*

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} \ldots$$

Hierin kann man nun $x = o$ *und* $k = x$ *setzen, so findet man die obige Entwickelung von* fx *nach steigenden Potenzen von* x.]

Diese Aufgabe, eine der interessantesten in der Theorie der Reihen, ist noch nicht allgemein aufgelöset worden. Man könnte sie für jede einzelne gegebene Function nach der Methode des ersten Abschnitts behandeln, würde aber dann nicht zu einer

allgemeinen Auflösung für jede beliebige Function gelangen.

35.

Wir wollen die allgemeine Formel

$$fx = f(x - xz) + xz\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} + \frac{x^2z^2}{2}\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2} \ldots$$

(33.) wieder vornehmen und setzen, man wolle bei dem ersten Gliede $f(x-xz)$ stehen bleiben. Da alle folgende Glieder mit x multiplicirt sind, so kann man setzen

$$fx = f(x - xz) + xP,$$

wo P als eine Function von z zu betrachten, die für $z = o$ verschwindet, weil in diesem Fall $f(x - xz)$ in fx übergeht.

Da diese Gleichung für jeden Werth von z Statt finden soll, weil der Werth von z willkürlich ist, so findet auch, nach (17.), ihre erste abgeleitete Gleichung Statt. Man nehme also die erste Ableitung nach z. Dieselbe ist von dem Gliede $f(x-xz)$, wie leicht zu sehen, $-x\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$ [wo $x - xz = \varepsilon$] denn, wie in (16.) bewiesen, ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx}\frac{dfp}{dp}$, wo p eine Function von x, und $y = fp$ ist. Wendet man dieses auf $p = x - xz$ an, so erhält man $\frac{dp}{dz} = -x$ und $\frac{dy}{dz} = -x.\frac{dfp}{dp} = -x\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$.

Da also ferner fx kein z enthält, so ist die erste, nach z abgeleitete, Gleichung der obigen Gleichung $[fx = f(x-xz) + xP]$,

$$o = -x\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} + x\frac{dP}{dz}$$

wo $\frac{dP}{dz}$ die erste Ableitung von P noch z bedeutet und woraus folgt [*wenn man mit x dividirt*]

$$\frac{dP}{dz} = \frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}.$$

Man erhält also den Werth von P, wenn man eine Function von z sucht, deren erste Ableitung gleich $\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$, und die zugleich von der Art ist, dass sie für $z=0$ verschwindet. Setzt man alsdann in diesen Werth von P, $z=1$, so erhält man

$$fx = f0x + xP.$$

Wir wollen zweitens

$$fx = f(x-xz) + xz\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} + x^2 Q$$

setzen, wo Q eine Function von z ist, die für $z=0$ verschwindet.

Nimmt man, wie oben, die erste Ableitung nach z, so erhält man die erste abgeleitete Gleichung

$$0 = -x\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} + x\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} - x^2 z\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2} + x^2\frac{dQ}{dz},$$

wo $\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$ und $\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2}$ nichts anders als die erste und zweite Ableitung von fx nach x bedeuten, in welche nachher $x-xz$ statt x gesetzt worden. [*Nemlich, die erste Ableitung des ersten Gliedes der Gleichung rechterhand* $f(x-xz)$ *nach* z *ist, wie vorhin gefunden,* $-x\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$, *diejenige des zweiten Gliedes* $xz\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$

ist $x . \frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} - x^2 z \frac{d^2 f(x-xz)}{d\varepsilon^2}$. *z nemlich kommt in diesem letzten Gliede zweimal vor, einmal vor dem Zeichen f, das anderemal unter demselben. Von dem Ersten rührt der Theil* $x \frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$, *von dem Andern der Theil* $-x^2 z \frac{d^2 f(x-xz)}{d\varepsilon^2}$ *her. Diesen letzten findet man leicht, wenn man, weil* $\frac{df(x-xz)}{dz} = -x \frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$ *ist, hierin* $\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$ *statt* $f(x-xz)$ *setzt. Dieses giebt* $\frac{d[df(x-xz)]}{dz\, d\varepsilon} = -x \frac{d^2 f(x-xz)}{d\varepsilon^2}$, *also, weil* $\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$ *noch mit xz multiplicirt ist,* $-x^2 z \frac{d^2 f(x-xz)}{d\varepsilon^2}$. *Die erste Ableitung des dritten Gliedes* $x^2 Q$ *endlich, ist offenbar* $x^2 \frac{dQ}{dz}$]. Daraus folgt [*nemlich, weil sich die beiden ersten Glieder aufheben und man den Rest mit* x^2 *dividiren kann*]

$$\frac{dQ}{dz} = z \frac{d^2 f(x-xz)}{d\varepsilon^2},$$

so dass man also den Werth von Q findet, wenn man eine Function von z sucht, deren erste Ableitung den angegebenen Werth von $\frac{dQ}{dz}$ hat und die zugleich für $z = 0$ verschwindet. Setzt man alsdann $z = 1.$, so erhält man

$$fx = fox + x \frac{dfox}{dx} + x^2 Q.$$

Es sey drittens

$$fx = f(x-xz) + xz\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} + \frac{x^2z^2}{2}\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2} + x^3R$$

wo R eine Function von z ist, die für $z = 0$ verschwindet. Man findet, wenn man die erste Ableitung nach z nimmt, und die Glieder weglässt die sich aufheben,

$$\frac{dR}{dz} = \frac{z^2}{2}\frac{d^3f(x-xz)}{d\varepsilon^3},$$

wo $\frac{d^3f(x-xz)}{d\varepsilon^3}$ die dritte Ableitung von fx nach x bedeutet, wenn man darin nachher $x-xz$ statt x setzt.

[*Nemlich die erste Ableitung der beiden ersten Glieder rechterhand ist, wie oben,* $-x\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$ $+x\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} - x^2z\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2}$, *die Ableitung des dritten Gliedes ist, erstlich in Rücksicht auf z ausser dem Zeichen f,* $x^2z\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2}$ *und in Rücksicht auf z unter dem Zeichen f, wie leicht zu sehen,* $\frac{x^2z^2}{2} \times -x\frac{d^3f(x-xz)}{d\varepsilon^3}$ $= -\frac{x^3z^2}{2}\frac{d^3f(x-xz)}{d\varepsilon^3}$; *also ist die erste Ableitung der ganzen Gleichung, weil noch* $\frac{dfx}{dz} = 0$, $\frac{d(x^3R)}{z} = x^3\frac{dR}{dz}$,

$$0 = -x\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} + x\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} - x^2z\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2}$$

$$+x^2 z\frac{d^2 f(x-xz)}{d\varepsilon^2}-\frac{x^3z^2}{2}\frac{d^3 f(x-xz)}{d\varepsilon^3}+x^3\frac{dR}{dz},$$

folglich, wenn man weglässt was sich aufhebt und den Rest mit x^3 dividirt,

$$\frac{dR}{dz}=z^2\frac{d^3 f(x-xz)}{d\varepsilon^3},$$

wie oben.]

Man muss also, um R zu finden, eine Stammgrösse mit z suchen, deren erste Ableitung den angegebenen Werth von $\frac{dR}{dz}$ hat, und die zugleich für $z=0$ verschwindet. Setzt man in diese Grösse hernach $z=1$, so erhält man

$$fx=fox+x\frac{dfox}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2fox}{dx^2}+x^3R$$

u. s. w.

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man die Formel von (33.) nemlich:

$$fx=fox+x\frac{dfox}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2fox}{dx^2}+\frac{x^3}{2.3}\frac{d^3fox}{dx^3}\ldots$$

Die gegenwärtige Rechnung hat den Vorzug, dass sie das Mittel zeigt, die Reste der Reihe xP, x^2Q, x^3R u. s. w. zu finden, wenn man bei dem ersten, zweiten etc. Gliede stehen bleiben will.

[*Hier zuerst, so wie überall in der Folge, zeigt sich vollends die Unbestimmtheit und Unzulänglichkeit der neuen Lagrangischen Zeichen. Ich setze zum Beweise den* 33. *und* 35. *Paragraph, wörtlich nach der Urschrift, her:*

33. *Nous avons vu jusqu'ici comment on peut trouver directement tous les termes du développe-*

ment de la fonction $f(x+i)$, *suivant les puissances de* i; *on peut, de la même manière, développer une fonction quelconque, suivant les puissances ascendantes d'une des variables contenues dans la fonction.*

En effet, si on reprend la formule

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \frac{i^3}{2.3}f'''x + etc.,$$

puisque x *et* i *sont deux quantités indéterminées, on y peut substituer* $x-i$ *à la place de* x, *ce qui donnera*

$$fx = f(x-i) + if'(x-i) + \frac{i^2}{2}f''(x-i) + etc.$$

De plus, on pourra mettre xz *à la place de* i, *et l'on aura*

$$fx = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2}f''(x-xz) + etc.,$$

où z *est une quantité arbitraire quelconque.*

Ici fx *représente, comme l'on voit, une fonction quelconque de* x, *et* $f'(x-xz)$, $f''(x-xz)$, *etc. représentent les fonctions primes, secondes, etc. de* fx, *en y substituant* $x(1-z)$ *à la place de* x. *Mais quoique* fx *ne représente qu'une fonction de* x *relativement à ses fonctions dérivées, il est clair qu'elle peut représenter en général une fonction quelconque de* x *et d'autres quantités quelconques, pourvu que ces quantités y soient regardées comme constantes dans la formation des fonctions dérivées* $f'x$, $f''x$, *etc.*

Si dans la formule précédente on fait $z=0$, *l'équation devient identique* $fx=fx$, *et si on*

fait $z = 1$, *la quantité* $x - xz$ *s'évanouit; de sorte que si on dénote simplement par* f, f', f'', *etc. les valeurs des fonctions* fx, $f'x$, $f''x$, *etc., lorsque* $x = 0$, *on aura*

$$fx = f + xf' + \frac{x^2}{2}f'' + \text{etc.}$$

Ainsi, lorsque fx *sera une fonction donnée de plusieurs variables* x, y, *etc., il n'y aura qu'à chercher par les règles générales, les fonctions dérivées par rapport à* x *seul, et y faire ensuite* $x = 0$, *on aura tous les termes du développement de la fonction suivant les puissances ascendantes de* x; *et il est clair que les valeurs des quantités* f', f'', *etc., seront des fonctions de* y, *etc. sans* x, *toutes dérivées de la fonction primitive, suivant une loi dépendante de la manière dont la quantité* x *entrera dans cette fonction.*

35. *Reprenons donc la formule générale trouvée ci-dessus (art. 33.),*

$$fx = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2}f''(x-xz) + \text{etc.},$$

et supposons qu'on veuille s'arrêter au premier terme $f(x-xz)$. *Comme tous les termes suivans sont multipliés par* x, *nous supposerons*

$$fx = f(x-xz) + xP,$$

P *étant regardé comme une fonction de* z, *qui devra être nulle lorsque* $z = 0$, *puisqu'alors* $f(x-xz)$ *devient* fx.

Comme cette équation doit avoir lieu, quelle que soit la valeur de z, *qui est arbitraire, son équation prime, relativement à* z, *aura donc lieu*

aussi (art. 17.). On prendra donc les fonctions primes relativement à cette variable, et il est facile de voir que la fonction prime du terme $f(x-xz)$ *sera* $-xf'(x-xz)$; *car on a démontré (art. 16.) que si* $y=fp$, p *étant une fonction de* x, *on a*

$$y'=p'f'p;$$

ainsi en rapportant les fonctions dérivées à la variable z *et faisant* $p=x-xz$, *on aura*

$$p'=-x \text{ et } y'=-xf'p=-xf'(x-xz).$$

Donc, à cause que fx *ne renferme point* z, *l'équation prime relative à* z *de l'équation ci-dessus, sera*

$$0=-xf'(x-xz)+xP',$$

P' *étant la fonction prime de* P *relativement à* z; *d'où l'on tire*

$$P'=f'(x-xz).$$

On aura donc la valeur de P, *en cherchant une fonction de* z *dont la fonction prime soit égale à* $f'(x-xz)$, *et qui de plus soit telle, qu'elle devienne nulle lorsque* $z=0$. *Cette valeur de* P *ainsi trouvée, si on y fait* $z=1$, *on aura*

$$fx=f.+xP.$$

Supposons, en second lieu,

$$fx=f(x-xz)+xzf'(x-xz)+x^2Q,$$

Q *étant une fonction de* z, *qui devra être nulle, comme l'on voit, lorsque* $z=0$.

En prenant, comme ci-dessus, les fonctions primes relativement à z, *on aura cette équation prime*

$$0=-xf'(x-xz)+xf'(x-xz)-x^2zf''(x-xz)+x^2Q',$$

où les fonctions désignées par f', f'' sont les fonctions primes et secondes de fx relativement à x, et dans lesquelles on a mis ensuite $x - xz$ pour x. On tire de là, en effaçant ce qui se détruit,

$$Q' = zf''(x - xz);$$

de sorte qu'on aura la valeur de Q en cherchant une fonction de z, dont la fonction prime ait la valeur qu'on vient de trouver pour Q', et qui ait la condition de devenir nulle lorsque $z = 0$. Si ensuite on fait $z = 1$, on aura

$$fx = f. + xf'. + x^2 Q.$$

Soit en troisième lieu,

$$fx = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + \frac{x^2z^2}{2}f''(x - xz) + x^3 R,$$

R étant une fonction de z, qui s'évanouisse lorsque $z = 0$. On trouvera, en prenant les fonctions primes relativement à z, et effaçant les termes qui se détruisent mutuellement,

$$R' = \frac{z^2}{2}f'''(x - xz),$$

la fonction représentée par f''' étant la fonction tierce de fx relativement à x, transformée par la substitution de $x - xz$ à la place de x.

Il faudra donc, pour avoir la valeur de R, trouver une fonction primitive de z, dont la fonction prime soit la valeur précédente de R', et qui soit telle, qu'elle s'évanouisse lorsque $z = 0$. Cette fonction étant trouvée, on aura, en faisant $z = 1$,

$$fx = f. + xf'. + \frac{x^2}{2}f''. + x^3 R,$$

et ainsi de suite.

En continuant ainsi, on aura la formule de l'art. 33,

$$fx = f. + xf'. + \frac{x^2}{2}f''. + \frac{x^3}{2}f'''. + \text{etc.}$$

Mais l'analyse précédente a l'avantage de donner la manière d'avoir les restes xP, $x^2 Q$, $x^3 R$, etc. de la série, lorsqu'on veut l'interrompre à son premier, second, troisième, etc. terme.

Vergleicht man diesen Text mit der obigen Uebersetzung in etwas bestimmtere Zeichen, so wird man gestehen müssen, dass der Vortrag des Verfassers, für Denjenigen der den Gegenstand nicht etwa schon kennt, beinahe unverständlich ist, und dies blos durch die Schuld der unbestimmten Zeichen. Die Grössen, auf welche sich die Ableitungen beziehen, werden beim Verfasser durch die Zeichen auf keine Weise angedeutet. Es sind überall Erläuterungen durch Worte nöthig, die aber nicht zureichen. Man kann dergleichen zwar zu verstehen glauben: denn es geschieht zuweilen, dass man, je allgemeiner ein Wort, oder je umfassender die Ansicht des Gegenstandes ist, um so leichter befriedigt sein zu können glaubt; allein geht man auf den Grund und bis zum klaren Verständniss, so fehlt dieses, und mit der Befriedigung ist es grade umgekehrt. Je allgemeiner der Gegenstand ist, je schwieriger sollte man in der Anerkenntniss des Vorgetragenen sein. Mathematiker wie Lagrange kommen zwar allenfalls auch mit den unvollkommensten Zeichen durch, denn sie kennen ihren Gegenstand vollkommen. Wer ihn

aber weniger kennt, ist jeden Augenblick in Gefahr zu irren, wenn die Vorstellungen, um welche es sich handelt, schwankend sind; und durch Nichts wird dieses Uebel in der Analysis mehr befördert, als durch ungenaue oder unvollkommene Zeichen. Der obige Fall ist einer von denjenigen, in welchem deutlich bemerklich ist, dass Zeichen keinesweges etwas Unwesentliches, sondern vielmehr etwas ungemein Wichtiges sind, ungefähr wie die Worte in der Sprache für den Ausdruck der Gedanken. Die Zeichen sind die Sprache der Analysis und, strenge genommen, der ganzen Mathematik. Die neuen Lagrangischen Zeichen trifft der Vorwurf der Unbestimmtheit und der Unzulänglichkeit, obgleich sie allerdings den richtigen Begriff von dem Gegenstande selbst, überall wo sie ihn bestimmt ausdrücken, festhalten und nirgend eine u n r i c h t i g e *Idee erregen. Der Vorwurf welcher die alten Zeichen trifft, die nicht allein weiterhin ebenfalls unzulänglich und unbestimmt sind, sondern auch noch obendrein, vom ersten Anfang an,* u n r i c h t i g e *Ideen erzeugen, ist stärker. Diese alten Zeichen hindern obendrein jede klare und elementare Ansicht ihres Gegenstandes.*]

36.

Hierdurch also wäre die Aufgabe analytisch aufgelöset. Da man aber die Grössen P, Q, R, .. nur durch die Zurückleitung zu Stammgrössen erhält, so bleibt noch eine solche Zurückleitung [*Integration*

nach dem gewöhnlichen Ausdruck] übrig, die zuweilen sehr schwierig, selbst unmöglich sein kann.

Man kann indessen, wenn man nur die Grösse P kennt, daraus alle übrigen durch blosse Ableitung finden. Denn vergleicht man die verschiedenen Ausdrücke von fx, so findet man

$$P = z\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} + xQ.$$

[*Nemlich einmal ist*

$$fx = f(x-xz) + xP, \text{ das anderemal}$$

$$fx = f(x-xz) + xz\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} + x^2Q,$$

welches, Eins vom Andern abgezogen und mit x dividirt,

$$P = z\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} + xQ$$

giebt.] Nun war $\frac{dP}{dz} = \frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$. Man erhält also, wenn man substituirt,

$$P = z\frac{dP}{dz} + xQ, \text{ und hieraus}$$

$$Q = \frac{P - z\frac{dP}{dz}}{x}.$$

Es ist ferner $Q = \frac{z^2}{2}\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2} + xR$

[*nemlich aus*

$$fx = f(x-xz) + xz\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} + x^2Q \text{ und}$$

$$fx = f(x-xz) + xz\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon} + \frac{x^2z^2}{2}\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2} + x^3R$$

folgt, wenn man Eins vom Andern abzieht, und durch x^2 dividirt,

$Q =$

$$Q = \frac{z^2}{2} \frac{d^2 f(x - xz)}{d\varepsilon^2} + xR$$

und oben war $\frac{dQ}{dz} = z \frac{d^2 f(x - xz)}{d\varepsilon^2}$, also ist

$Q = \frac{z}{2} \frac{dQ}{dz} + xR$, woraus folgt

$$R = \frac{Q - \frac{1}{2} z \frac{dQ}{dz}}{x}.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$S = \frac{R - \frac{1}{3} z \frac{dR}{dz}}{x}$$

u. s. w.

Setzt man $P = zp$, $Q = z^2 q$, $R = z^3 r$ u. s. w. so erhält man

$q = -\frac{dp}{dz} : x$, $r = -\frac{dq}{dz} : 2x$, $s = -\frac{dr}{dz} : 3x$ *etc.*

[*nemlich* $Qx = P - \frac{dP}{dz}$ *giebt, wenn man die angenommenen Werthe von* P, Q *substituirt,* $z^2 qx = zp - z \cdot p - z \cdot z \frac{dp}{dz} = - z^2 \frac{dp}{dz}$, *also*

$$q = - \frac{dp}{dz} : x,$$

wie oben. Ferner, $Rx = Q - \frac{1}{2} z \frac{dQ}{dz}$ *giebt* $z^3 r = z^2 q - \frac{1}{2} z \frac{d(z^2 q)}{dz} = z^2 q - \frac{1}{2} z \cdot 2zq - \frac{1}{2} z \cdot z^2 \frac{dq}{dz} = - \frac{1}{2} z^3 \frac{dq}{dz}$, *also*

$$r = - \frac{dq}{dz} : 2x,$$

wie oben; u. s. w.]

Man erhält also für fx, wenn man wieder k an die Stelle von xz setzt,

$$fx = f(x-k) + kp$$

$$= f(x-k) + k\frac{df(x-k)}{d\varepsilon} + k^2 q$$

$$= f(x-k) + k\frac{df(x-k)}{d\varepsilon} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2f(x-k)}{d\varepsilon^2} + k^3 r.$$

Kennt man hier den Rest kp, so findet man alle die übrigen Reste $k^2 q$, $k^3 r$ *etc.* durch die blosse Ableitungs-Operation nach $z = \frac{k}{x}$; [*nemlich, weil* $q = -\frac{dp}{dz} : x$, $r = -\frac{dq}{dz} : 2x$ *etc. war*] und nimmt man blos die Ableitungen nach k, so ist

$$q = -\frac{dp}{dk}, \; r = -\tfrac{1}{2}\frac{dq}{dk}, \; s = -\tfrac{1}{3}\frac{dr}{dk} \text{ etc.}$$

[*und zwar deshalb, weil z. B.* $\frac{dp}{dz} = \frac{dp}{dk} \cdot \frac{dk}{dz}$ *ist. Dieses giebt, weil* $\frac{dk}{dz} = \frac{d(xz)}{dz} = x$ *ist,* $\frac{dp}{dz} = \frac{dp}{dk} \cdot x$, *also* $\frac{dp}{dk} = \frac{dp}{dz} : x$. *Nun war* $q = -\frac{dp}{dz} : x$, *also ist*

$$q = -\frac{dp}{dk}.$$

Eben so r, s u. s. w.]

Es sey z. B. $fx = \frac{1}{x}$, wie in (4.), so ist $f(x-k) = \frac{1}{x-k}$. Nimmt man die Ableitungen nach x, [*kann auch heissen nach* $x - k = \varepsilon$. *Lagrange nimmt die Ableitungen nach* x, *in welche hernach* $x - k$ *statt* x *gesetzt wird*] so erhält man

$$\frac{df(x-k)}{d\varepsilon} = -\frac{1}{(x-k)^2},\ \frac{d^2f(x-k)}{d\varepsilon^2} = \frac{2}{(x-k)^3}\ etc.$$

Nun ist

$$p = \frac{fx - f(x-k)}{k}\left[= \frac{1}{x} - \frac{1}{x-k}\right] = -\frac{1}{x(x-k)}$$

Nimmt man also die Ableitungen nach k, so erhält man

$$q = -\frac{dp}{dk} = \frac{1}{x(x-k)^2},\ r = -\frac{dq}{dk} = -2\frac{1}{x(x-k)^3} \ldots\ldots$$

Substituirt man Dieses in die obigen Ausdrücke von fx und setzt hernach $x + k$ statt x, so erhält man

$$\frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x(x+k)}$$

$$\frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^2(x+k)}$$

u. s. w. wie in (4.)

Es sey $fx = \sqrt{x}$, so ist $f(x-k) = \sqrt{(x-k)}$, und wenn man die Ableitungen nach x [*oder* $\varepsilon = x - k$] nimmt,

$$\frac{df(x-k)}{d\varepsilon} = \frac{1}{2\sqrt{(x-k)}},\ \frac{d^2f(x-k)}{d\varepsilon^2} = -\frac{1}{4(x-k)^{\frac{3}{2}}}$$

etc.

Hier ist $p\left[= \frac{fx - f(x-k)}{k}\right] = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{(x-k)}}{k}$

$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{(x-k)}}$. Man erhält, wenn man die Ableitungen nach k nimmt,

$$q = -\frac{1}{2\sqrt{(x-k)}\,[\sqrt{x} + \sqrt{(x-k)^2}]}$$

$$r = \frac{1}{8(x-k)^{\frac{3}{2}}[\sqrt{x} + \sqrt{(x-k)}]^2} + \frac{1}{4(x-k)[\sqrt{x} + \sqrt{(x-k)}]}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 3\sqrt{(x-k)}}{8(x-k)^{\frac{3}{2}}[\sqrt{x} + \sqrt{(x-k)^3}]} \text{ etc.}$$

Substituirt man dieses in den Ausdruck von fx, so erhält man, wenn man noch $x + k$ statt x setzt,

$$\sqrt{(x+k)} = \sqrt{x} + \frac{k}{\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{2\sqrt{x}[\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}]^2}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{k^3[\sqrt{(x+k)} + 3\sqrt{x}]}{8x\sqrt{x}[\sqrt{(x+k)} + \sqrt{x}]^3}$$

$$= \sqrt{x} + \frac{k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{8x\sqrt{x}} + \frac{k^3}{16x^2\sqrt{x}} \cdots$$

wie in (4.)

37.

Man kann auch aus dem Ausdruck in (3.)

$$f(x+k) = fx + kP$$

unmittelbar das Gesetz der Reihe und den Ausdruck der Reste finden, wenn man abwechselnd die Ableitungen nach x und nach k nimmt. [*Lagrange ist hier gezwungen, die Verschiedenheit der Bezeichnung der Ableitungen durch ein eigenes Zeichen anzudeuten. Die Ableitungen nach k werden dadurch von den Ableitungen nach x unterschieden, dass der Strich an der abgeleiteten Grösse, der die Ableitungs-Operation bezeichnet, jetzt unterhalb, statt wie gewöhnlich oberhalb angebracht wird. Dergleichen Hülfsmittel reichen nicht weit. Denn, kommt eine dritte, vierte u.s.w. Grösse vor, nach welcher die Ableitung genommen*

werden soll, so geräth man wegen der Stelle des Strichs offenbar in Verlegenheit.]

Man erhält zuerst, vermöge der Ableitung nach x,

$$\frac{df(x+k)}{dx} = \frac{dfx}{dx} + k\frac{dP}{dx},$$

[*weil nemlich $f(x+k) = fx + kP$ gesetzt wird.*] Sodann erhält man durch die Ableitung nach k, weil offenbar die Ableitungen von $f(x+k)$ nach k und x das Nemliche geben,

$$\frac{df(x+k)}{dk} = P + k\frac{dP}{dk}.$$

Es ist also $\frac{dfx}{dx} + k\frac{dP}{dx} = P + k\frac{dP}{dk}$, woraus folgt:

$$P = \frac{dfx}{dx} + k\left(\frac{dP}{dx} - \frac{dP}{dk}\right).$$

Man setze $Q = \frac{dP}{dx} - \frac{dP}{dk}$,

so erhält man, wenn man den Werth von P substituirt,

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + k^2 Q.$$

Man nehme von Neuem die Ableitungen nach x und k, so erhält man

$$\frac{df(x+k)}{dx} = \frac{dfx}{dx} + k\frac{d^2fx}{dx^2} + k^2\frac{dQ}{dx} \text{ und}$$

$$\left[\frac{df(x+k)}{dk} = \right]\frac{df(x+k)}{dx} = \frac{dfx}{dx} + 2kQ + k^2\frac{dQ}{dk}$$

also [*wenn man die beiden Ausdrücke von* $\frac{df(x+k)}{dx}$ *einander gleich setzt und weglässt was sich aufhebt, was übrig bleibt aber durch* k *dividirt*]

$$\frac{d^2 fx}{dx^2} + k\frac{dQ}{dx} = 2Q + k\frac{dQ}{dk}$$

und hieraus

$$Q = \tfrac{1}{2}\left[\frac{d^2 fx}{dx^2} + k\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{dk}\right)\right].$$

Setzt man also $R = \frac{1}{2}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{dk}\right)$, so erhält man, nach der Substitution,

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2 fx}{dx^2} + k^3 R.$$

Auf dieselbe Weise würde man, wenn man

$$S = \tfrac{1}{3}\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dR}{dk}\right)$$

setzte,

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2 fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3 fx}{dx^3} + k^4 S$$

finden u. s. w.

Es sey z. B. $fx = \frac{1}{x}$, so ist $P = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x}\right)$ $= -\frac{1}{x(x+k)}$, also $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{x^2(x+k)} + \frac{1}{x(x+k)^2}$,

$$\frac{dP}{dk} = \frac{1}{x(x+k)^2},$$

folglich $Q\left[welches\ \frac{dP}{dx} - \frac{dP}{dk}\ ist\right] = \frac{1}{x^2(x+k)}$.

Ferner

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{2}{x^3(x+k)} - \frac{1}{x^2(x+k)^2},\quad \frac{dQ}{dk} = -\frac{1}{x^2(x+k)^2},$$

folglich

$$R\left[welches\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{dk}\right)\ ist\right] = -\frac{1}{x^3(x+k)},$$

Eben so findet man

$$S = \frac{1}{x^4(x+k)}$$

u. s. w. welches wieder die obige Reihe giebt. [*Diese zweite Methode ist unstreitig kürzer und einfacher, als die erste.*]

Für unseren Zweck aber kommt es weniger auf die genauen Reste der entwickelten Reihen nach einem beliebigen Gliede an, als vielmehr darauf, die Grenzen dieser Reste zu finden, um den Fehler zu schätzen, den man begeht, wenn man nur einige von den Gliedern der Reihe in Rechnung bringt.

38.

Zu diesem Ende stellen wir folgenden allgemeinen Lehrsatz auf: Wenn die erste Ableitung von fx, wie $\frac{dfx}{dx}$, für alle Werthe von x, von $x = a$ bis $x = b$, wo $b > a$, immer positiv ist, so ist die Differenz der Stammgrössen, die jenen beiden Werthen von x entsprechen, nemlich $fb - fa$, nothwendig eine positive Grösse.

Es ist klar, dass wenn in dem Ausdruck $f(x+k) = fx + kP$, in welchem P eine Function von x und k ist, die für $k = 0$, $\frac{dfx}{dx}$ giebt (3, 8.), $\frac{dfx}{dx}$ positiv ist, der Werth von P, von $k = 0$ an, bis zu irgend einem Werthe von k, den man so klein annehmen kann, als man will, immer positiv sein muss. In so fern also der Werth der ersten Ableitung $\frac{dfx}{dx}$ positiv ist, kann man immer für k eine posi-

tive Grösse annehmen, die klein genug ist um die Grösse $f(x+k)-fx$ nothwendig positiv zu machen. [*Nemlich, wenn* $\frac{dfx}{dx}$, *welches nichts anders ist als* $\frac{f(x+k)-fx}{k}$, *für* $k=0$, *positiv ist, so ist auch nothwendig für ein positives* k, $k.\frac{dfx}{dx}$ *oder* $f(x+k)-fx$ *positiv.*]

Wir wollen der Reihe nach statt x die Grössen a, $a+k$, $a+2k$, $a+3k \ldots a+nk$ setzen, so folgt, dass man immer k positiv und klein genug annehmen kann, um alle die Grössen $f(a+k)-fa$, $f(a+2k)-f(a+k)$, $f(a+3k)-f(a+2k)$ u. s. w. bis $f[a+(n+1)k]-f(a+nk)$, nothwendig positiv zu machen, sobald die Grössen $\frac{dfa}{da}$, $\frac{df(a+k)}{d(a+k)}$, $\frac{df(a+2k)}{d(a+2k)}$ *etc.* bis $\frac{df(a+nk)}{d(a+nk)}$, positiv sind. Also ist auch die Summe der ersten Grössen

$$\begin{aligned}[\textit{nemlich}\ & f(a+k)-fa \\ & +f(a+2k)-f(a+k) \\ & +f(a+3k)-f(a+2k) \\ & \quad - \quad - \quad - \quad - \\ & f[a+(n+1)k]-f(a+nk)],\end{aligned}$$

das heisst, die Grösse $f[a+(n+1)k]-fa$ [*alle übrigen Glieder heben sich bei der Summirung auf*] nothwendig positiv.

Nun sey $a+(n+1)k=b$, so erhält man

$$k=+\frac{b-a}{n+1},$$

und es folgt jetzt, dass die Grösse $fb-fa$, noth-

wendig positiv ist, wenn alle die Grössen $\frac{dfa}{da}$,

$\frac{df\left(a+\frac{b-a}{n+1}\right)}{d\left(a+\frac{b-a}{n+1}\right)}$, $\frac{df\left[a+\frac{2(b-a)}{n+1}\right]}{d\left[a+\frac{2(b-a)}{n+1}\right]}$ u. s. w. bis zu

$\frac{df\left[a+\frac{n(b-a)}{n+1}\right]}{d\left[a+\frac{n(b-a)}{n+1}\right]}$ positiv sind, wo n so gross sein kann als man will.

Um so mehr also wird die Grösse $fb-fa$ positiv sein, wenn es $\frac{dfx}{dx}$ für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$ ist, weil sich unter diesen Werthen nothwendig auch diejenigen a, $a+\frac{b-a}{n+1}$, $a+\frac{2(b-a)}{n+1}$ $a+\frac{n(b-a)}{n+1}$ befinden, wo man n so gross annehmen kann, als man will.

39.

Mit Hülfe dieses Lehrsatzes kann man die Grenzen jeder Stammgrösse, deren erste Ableitung man kennt, in *plus* und *minus* finden.

Es sey die Stammgrösse Fz gegeben. Ihre erste Ableitung $\frac{dFz}{dz}$ werde durch $z^m Z$ bezeichnet, wo Z eine gegebene Function von z ist. M sey der grösste und N der kleinste Werth von Z, für alle Werthe von z zwischen a und b, und zwar in dem Sinne genommen, dass negative kleinere Grössen grösser als grössere, und negative grössere Grössen kleiner als kleinere sind; z. B. dass $-1>-2$, -5

> -7, und eben so $-2 < -1$ ist, wie es in der Natur der Sache liegt. Auf diese Weise sind die Grössen $M - Z$ und $Z - N$ immer positiv, von $z = a$ bis $z = b$, also auch die Grössen $z^m(M - Z)$ und $z^m(Z - N)$ [*nemlich, weil z selbst positiv sein soll; jedoch entsteht einige Schwierigkeit, wenn man für m z. B. einen Bruch annimmt, dessen Nenner eine grade Zahl ist, z. B.* $\frac{1}{2}$; *dann kann auch* z^m *negativ sein, obgleich z positiv ist, nemlich* $-\sqrt{z}$.]

Macht man also, erstlich, $\frac{dfz}{dz} = z^m(M - Z)$, so ist, vermöge des obigen Lehrsatzes, $fb - fa > 0$. Es war aber $z^m Z = \frac{dFz}{dz}$. Die erste Stammgrösse hiervon ist Fz. Von $z^m M$ ist solche, weil sich M nicht verändert, $\frac{Mz^{m+1}}{m+1}$ [*welches in der Zurückleitungs- (Integral-) Rechnung gelehrt wird.*] Also ist

$$fz = \frac{Mz^{m+1}}{m+1} - Fz.$$

[*Hier ist wieder eine kleine Schwierigkeit. Die Stammgrösse von* Mz^m *nemlich ist nicht so wohl* $\frac{Mz^{m+1}}{m+1}$ *sondern* $\frac{Mz^{m+1}}{m+1}$ + *Const., wo die Constante besonders bestimmt werden muss*]. Macht man der Reihe nach, $z = a$ und $z = b$, so giebt $fb - fa > 0$:

$$\frac{Mb^{m+1}}{m+1} - Fb - \frac{Ma^{m+1}}{m+1} + Fa > 0,$$

woraus folgt

$$Fb < Fa + \frac{M(b^{m+1} - a^{m+1})}{m+1}.$$

Macht man, zweitens, $\frac{dfz}{dz} = z^m(Z - N)$, so ist auch $fb - fa > 0$ und man findet, wie oben,

$$fz = Fz - \frac{Nz^{m+1}}{m+1};$$

also giebt, wenn man der Reihe nach $z = a$ und $z = b$ setzt, $fb - fa > 0$,

$$Fb - \frac{Nb^{m+1}}{m+1} - Fa + \frac{Na^{m+1}}{m+1} > 0,$$

woraus folgt

$$Fb > Fa + \frac{N(b^{m+1} - a^{m+1})}{m+1}.$$

Diese Resultate wollen wir nun auf die Grössen $P, Q, R \ldots.$ in (35.) anwenden.

Da diese Grössen als Functionen von z betrachtet werden, so setzen wir erstlich $P = Fz$ und folglich $\frac{dP}{dz} = \frac{dFz}{dz} = \frac{df(x - xz)}{d\varepsilon}$. Es ist also, weil man $\frac{dFz}{dz} = z^m Z$ gesetzt hat, und hier $m = 0$ ist,

$$Z = \frac{df(x - xz)}{d\varepsilon}.$$

Es sey $a = 0$ und $b = 1$, so giebt die Bedingung, dass P Null sein muss für $z = 0$, [*nemlich weil* $fx = f(x - xz) + xP$ (35.) *welches für* $z = 0$ *in* $fx = fx + xP$ *übergeht, woraus* $P = 0$ *folgt*] $Fa = 0$, und Fb ist der Werth von P für $z = 1$.

Sind also nun M und N der grösste und der kleinste Werth von $\frac{df(x-xz)}{d\varepsilon}$, für alle Werthe von z, von 0 bis 1, so ist

$$Fb < M \text{ und } > N.$$

[*Nemlich, weil* $a = 0$ *und* $m = 0$ *ist, welches in die obige allgemeine Ausdrücke* $Fb < Fa + \frac{M(b^{m+1} - a^{m+1})}{m+1}$ *und* $Fb > Fa + \frac{N(b^{m+1} - a^{m+1})}{m+1}$ *gesetzt,* $Fb < M$ *und* $Fb > N$ *giebt.*] Also sind M und N zwei Grenzen für die Grösse P, wenn man darin $z = 1$ setzt.

Man setze zweitens $Q = Fz$, so erhält man

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{dFz}{dz} = z\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2},$$

also für $m = 1$,

$$z = \frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2}.$$

Es sey abermals $a = 0$ und $b = 1$, so hat man wieder, wegen der Bedingung dass Q für $z = 0$ verschwinden muss, $Fa = 0$ und Fb gleich dem Werthe von Q, der $z = 1$ entspricht.

Bezeichnen also M_1 und N_1 die grössten und kleinsten Werthe von $\frac{d^2f(x-xz)}{d\varepsilon^2}$, für alle Werthe von $z = 0$ bis $z = 1$, so erhält man

$$Fb < \frac{M_1}{2} \text{ und } > \frac{N_1}{2},$$

so, dass $\frac{1}{2}M_1$ und $\frac{1}{2}N_1$ die Grenzen für Q bis zu $z = 1$ sind.

Man setze, drittens, $R = Fz$, so ist

$$\frac{dR}{dz} = \frac{dFz}{dz} = \tfrac{1}{2}z^2 \frac{d^3 f(x - xz)}{d\varepsilon^3}.$$

Macht man $m = 2$, $a = 0$, $b = 1$, so findet man auf dieselbe Weise, dass wenn M_2 und N_2 die grössten und kleinsten Werthe von $\frac{1}{2}\frac{d^3 f(x-xz)}{d\varepsilon^3}$ bezeichnen, von $z = 0$ bis $z = 1$, $\frac{1}{3}M_2$ und $\frac{1}{3}N_2$ für die Grenzen von R, bis zu $z = 1$ u. s. w.

Nun ist klar, dass wenn man in einer Function von $x - xz$, der Grösse z alle Werthe von 0 bis 1 giebt, die Werthe der Function die nemlichen sind, welche eine gleiche Function von u erhalten würde, wenn man darin der Grösse alle Werthe von $u = 0$ bis $u = x$ gäbe; denn wenn man $x - xz = u$ setzt, so giebt $z = 0$, $u = x$ und $z = 1$, $u = 0$, und die zwischen 0 und 1 liegende Werthe von z geben die zwischen 0 und x liegenden Werthe von u. Hieraus folgt, dass M und N die grössten und kleinsten Werthe von $\frac{dfu}{du}$, für alle Werthe von u, von $u = 0$ bis $u = x$ sind und dass folglich jeder zwischen M und N liegende Werth durch $\frac{dfu}{du}$ ausgedrückt werden kann, so lange der Werth von u zwischen 0 und x bleibt. Also kann der Werth der Grösse P für $z = 1$ durch $\frac{dfu}{du}$ ausgedrückt werden, wenn u zwischen 0 und x liegt. Eben so kann Q für $z = 1$ durch $\frac{1}{2}\frac{d^2fu}{du^2}$ ausgedrückt werden, wenn u zwischen 0 und x liegt, R, für $z = 1$, durch $\frac{1}{2.3}\frac{d^3fu}{du^3}$, wenn u zwischen 0 und x liegt u. s. w.

40.

Hieraus folgt endlich dieser neue, und wegen seiner Einfachheit und Allgemeinheit merkwürdige Lehrsatz, dass wenn u eine unbekannte Grösse, bezeichnet die zwischen o und x liegt, jede Function von x und anderen Grössen, nach Potenzen von x auf folgende verschiedene Arten entwickelt werden kann:

$$fx = fox + x\frac{dfu}{du},$$

$$= fox + x\frac{dfox}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2fu}{du^2},$$

$$= fox + x\frac{dfox}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2fox}{dx} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3fu}{du}.$$

Dieses giebt für die Entwickelung von $f(x+z)$ nach Potenzen von x,

$$fox = fz,\ \frac{dfox}{dx} = \frac{dfz}{dz},\ \frac{d^2fox}{dx^2} = \frac{d^2fz}{dz};$$

denn die Ableitungen von $f(z+x)$ sind dieselben, man mag sie nach x oder z nehmen, weil die Zunahme von $z+x$ dieselbe bleibt, man mag $x+k$ statt x, oder $z+k$ statt z setzen. [*Im Original bezieht sich die an dieser Stelle gegebene Erläuterung mehr auf die unvollständige Bezeichnung, daher selbige wegbleiben konnte.*]

Man erhält also

$$f(x+z) = fz + x\frac{df(z+u)}{du}$$

$$= fz + x\frac{dfz}{dz} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2f(z+u)}{du^2}$$

$$= fz + x\frac{dfz}{dz} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2fz}{dz^2} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3(z+u)}{du^3}$$

wo u eine unbekannte, zwischen o und x liegende Grösse bezeichnet.

Setzt man x statt z, und k statt x, so erhält man die Entwickelung von $f(x+k)$ nach Potenzen von x, und man sieht, dass in dieser Entwickelung die unendliche Reihe, von irgend einem Gliede an, immer dem Werthe ihres ersten Gliedes gleich ist, wenn man darin $x+K$ statt x setzt, wo K eine Grösse zwischen o und k bedeutet; dass also die grössten und kleinsten Werthe dieses Gliedes, für alle Werthe von o bis k, die Grenzen des Werths von dem Rest der Reihe bis ins Unendliche sind.

Es sey $fz = z^m$, so erhält man die Entwickelung des Binomiums $(z+x)^m$ und es folgt, dass die Summe aller Glieder, von einem beliebigen Gliede

$$\frac{m.m-1 \ldots m-n+1}{1.2 \ldots n} z^{m-n} x^n$$

ab gerechnet, zwischen den Grenzen

$$\frac{m.m-1 \ldots m-n+1}{1.2 \ldots n} z^{m-n} x^n \text{ und}$$

$$\frac{m.m-1 \ldots m-n+1}{1.2 \ldots n} (z+x)^{m-n} x^n$$

liegt. Denn es ist offenbar, dass die grössten und kleinsten Werthe von $(z+u)^{m-n}$, $(z+x)^{m-n}$ und z^{m-n} sind [*weil* u *zwischen* o *und* x *liegt*].

Die Güte der Näherungsmethoden, bei welchen man Reihen anwendet, hängt nicht allein von der Convergenz dieser Reihen, sondern auch davon ab, ob man im Stande ist, den Irrthum zu schätzen, der durch Weglassung von Gliedern entsteht; und in diesem Betracht kann man sagen, dass fast alle Nähe-

rungs-Methoden, deren man sich bei der Auflösung geometrischer und mechanischer Aufgaben bedient, noch sehr unvollkommen sind. Der obige Lehrsatz kann in vielen Fällen zur Vervollkommnung der Näherungs-Methoden dienen, ohne welche oft ihre Anwendung misslich ist.

In der neunten Vorlesung über die Functionen-Rechnung findet man eine noch einfachere Methode, die Grenzen des Werths der Entwickelung einer Function auszudrücken, nebst neuen Bemerkungen über diesen Gegenstand. Man sehe auch eine Abhandlung von Ampère im 6ten Bande des Journals der *école polytechnique*. [*Unstreitig ist dieser neue, Lagrange zugehörige Lehrsatz ungemein wichtig. Der obige Vortrag desselben ist aber wohl, ausser dass er auch noch schwache Stellen hat, nicht so einfach, wie er für Elemente zu wünschen sein möchte. Man sehe deshalb die von Lagrange citirte neunte Vorlesung im zweiten Bande.*]

Siebenter

Siebenter Abschnitt.

Von dem Ableitungs-Gleichungen und ihrem Nutzen in der Analysis, bei Umformung der Functionen. Allgemeine Theorie dieser Gleichungen und der darin vorkommenden willkürlichen Constanten.

41.

Bis jetzt haben wir die Ableitungen nur als Mittel zur Bildung von Reihen betrachtet. Sie bieten aber ausserdem, an sich selbst, ein neues System algebraischer Operationen dar, und geben Verwandlungen, die in der Analysis von grossem Nutzen sind.

Wir haben in (17.) gesehen, dass, wenn eine beliebige Gleichung zwischen x und y, oder blos mit x, für jeden Werth von x Statt findet, auch die abgeleiteten Gleichungen Statt haben, welche man erhält, wenn man die Ableitungen der verschiedenen Glieder der gegebenen Gleichung nimmt. Diese Ableitungs-Gleichungen, und selbst beliebige Verbindungen von ihnen, können also an die Stelle der Stammgleichung treten, und man erhält dadurch zuweilen Hülfsgleichungen, die leichter aufzulösen sind, als die Stammgleichungen selbst.

Wir haben die Gleichungen, welche man erhält, wenn man die erste, zweite etc. Ableitung aller Glieder der gegebenen Haupt-Gleichung nimmt, erste, zweite etc. abgeleitete Gleichungen (*equations primes,*

secondes etc.) genannt. Wir wollen diejenigen Gleichungen, welche entstehen, wenn man auf irgend eine Weise die Stammgleichung mit ihrer ersten abgeleiteten, oder diese mit der zweiten abgeleiteten Gleichung u. s. w. verbindet, Ableitungs-Gleichungen der ersten, zweiten etc. Ordnung *(equations derivées du premier ordre, du second ordre etc.)* nennen.

Enthält also die Stammgleichung x und y, so wird die Ableitungs-Gleichung der ersten Ordnung x, y und $\frac{dy}{dx}$, die Ableitungs-Gleichung der zweiten Ordnung x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx}$ u. s. w. enthalten.

42.

Wir wollen an einigen Beispielen den Nutzen der Ableitungs-Gleichungen bei Umformung der Functionen zeigen.

Zuerst ist zu bemerken, dass man, durch die Verbindung einer Function mit ihrer ersten Ableitung, irgend einen Exponenten wegschaffen kann.

Es sey z. B. die Gleichung $y = X^m$ gegeben, wo X irgend eine Function von x bedeutet, so erhält man, wenn man die ersten Ableitungen nimmt, nach (16.)

$$\frac{dy}{dx} = mX^{m-1}\frac{dX}{dx},$$

dividirt man diese Gleichung durch die vorige, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} : y = m\frac{dX}{dx} : X, \text{ oder } X\frac{dy}{dx} - my\frac{dX}{dx} = 0,$$

welches eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ist, die die Potenz X^m nicht mehr enthält, und welche also, in dieser Gestalt, zur Entwickelung des Werthes von y in eine Reihe, durch die Methode der unbestimmten Coefficienten, viel bequemer ist.

Es sey z. B.

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots,$$

so setze man

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots.$$

Nimmt man hiervon die erste Ableitung, so erhält man

$$\frac{dX}{dx} = b + 2cx + 3dx^2 \ldots. \text{ und}$$

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 \ldots.$$

Substituirt man nun und nimmt die Glieder, welche gleiche Potenzen von x enthalten, zusammen, so erhält man

$$aB - mbA + [2aC + bB - m(2cA + bB)]x$$
$$+ [3aD + 2bC + cB - m(3dA + 2cB + bC)]x^2$$
$$\ldots. = 0,$$

welche Gleichung, weil sie identisch sein, das heisst, für jeden beliebigen Werth von x Statt finden muss, damit der angenommene Ausdruck für y erfüllt werde, so viele einzelne Gleichungen giebt, als verschiedene Potenzen von x vorhanden sind. Man erhält aus diesen einzelnen Gleichungen

$$B = \frac{mbA}{a},$$

$$C = \frac{2mcA + (m-1)bB}{2a},$$

$$D = \frac{3mdA + (2m-1)cB + (m-2)bC}{3a} \text{ etc.}$$

Man findet also alle die Coefficienten B, C, D *etc.* der Reihe nach, durch Ausdrücke, deren Gesetz leicht sichtbar ist, und die man folglich so weit verfolgen kann, als man will.

Der erste Coefficient A aber bleibt unbestimmt. Man muss, um ihn zu finden, zu der Stammgleichung $y = X^m$ zurückgehen. Macht man, in derselben, $x = 0$, so erhält man auf einer Seite $X = a$, auf der andern $y = A$, also $A = a^m$.

43.

Eben so kann man durch die Ableitungs-Operation, Logarithmen, Exponential-Grössen, Sinus und Cosinus wegschaffen.

Es sey z. B. $y = \overset{e}{log}\, X$, so ist die erste Ableitungs-Gleichung: $X\frac{dy}{dx} - \frac{dX}{dx} = 0$. [*Nemlich* $y = \overset{e}{log}\, X$ *giebt* $\frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx} : X$, *woraus* $X\frac{dy}{dx} - \frac{dX}{dx} = 0$ *folgt.*] Wäre $y = e^X$, so erhielte man $\frac{dy}{dx} - y\frac{dX}{dx}$. [*Nemlich* $y = e^X$ *giebt* $\frac{dy}{dx} = e^X\frac{dX}{dx} = y\frac{dX}{dx}$, *woraus* $\frac{dy}{dx} - y\frac{dX}{dx}$ *folgt.*] Um Sinus und Cosinus wegzuschaffen, muss man bis zur zweiten Ordnung gehen.

Es sey z. B. $y = sin\, X$, wo X, wie immer, eine beliebige Function von x bedeutet, so erhält man, wenn man die ersten Ableitungen nimmt, nach (14.)

$$\frac{dy}{dx} = \cos X \frac{dX}{dx},$$

und, wenn man diese Gleichung von neuem ableitet,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2X}{dx} \cos X - \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 \sin X.$$

Eliminirt man zwischen diesen drei Gleichungen $\sin X$ und $\cos X$, so erhält man folgende Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{dX}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dX}{dx}\right)^3 y = 0,$$

worin keine transcendente Grösse mehr vorkommt. [*Nemlich die erste Gleichung giebt*

$$y\left(\frac{dX}{dx}\right)^3 = \sin X\left(\frac{dX}{dx}\right)^3,$$

die zweite giebt

$$\frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \cos X \frac{dX}{dx} \cdot \frac{d^2X}{dx^2},$$

die dritte giebt

$$\frac{dX}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \cos X \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{dX}{dx} - \sin X \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 \cdot \left(\frac{dX}{dx}\right).$$

Zieht man von der zweiten die Summe der beiden ersten ab, so erhält man, wie oben,

$$\frac{dX}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} + y\left(\frac{dX}{dx}\right)^3 = 0.]$$

Man findet die nemliche Gleichung, wenn man $y = \cos X$ setzt.

Macht man hier für X und y, ähnliche Substitutionen, wie oben in (42.), vergleicht die Glieder nach Potenzen von x, und setzt jedesmal die Summe aller derjenigen, die gleiche Potenzen von x enthalten, Null, so erhält man eben so viele einzelne Gleichun-

gen, als Potenzen von x vorhanden sind, welche Gleichungen dann zur Bestimmung der willkürlichen Coefficienten in dem für y angenommenen Ausdruck dienen, und zwar jedes Coefficienten durch die beiden vorhergehenden. Die beiden ersten Coefficienten bleiben unbestimmt. Man findet sie, wenn man in die Stammgleichung, und in die erste abgeleitete Gleichung, $x = 0$ setzt. Die Gleichung $y = \sin X$ giebt auf diese Weise $A = \sin a$, und die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx} \cos X$, giebt $B = b \cos a$.

[*Hier, wo zuerst Gleichungen zwischen Ableitungen vorkommen, ist es nöthig, wiederholt zu erinnern, dass man Zeichen, wie* dx, dy *etc. nicht etwa durch Multiplication wegschaffen und also z. B. die obige Gleichung* $\frac{dX}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dX}{dx}\right)^3 y = 0$, *nicht etwa so:* $dX.d^2y - d^2Xdy + dX^3.y = 0$, *schreiben kann. Dieses geschieht zwar bei der gewöhnlichen Behandlung des Differential-Calculs, allein eine so geschriebene Gleichung hat keinen Sinn. Die Multiplication wäre nur erlaubt, wenn* dx, dy *etc. wirkliche Grössen wären, wofür man sie freilich nach der gewöhnlichen Ansicht nimmt. Allein da sie dies nicht sind, so findet auch die Multiplication nicht Statt. Nur* $\frac{dX}{dx}, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ *und dergleichen, sind wirkliche Grössen, und zwar sind* $\frac{dX}{dx}$ *und* $\frac{dy}{dx}$ *die Coefficienten zu* k *in den Entwickelungen von*

$X = fx$ und $y = fx$, wenn man darin $x + k$ statt x setzt, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ist der zweite Coefficient in der Entwickelung von y; dx, dy etc. sind nicht Grössen, sondern nur Theile eines Zeichens. Das dx ist von dem dX, oder von dem dy eben so unzertrennlich, wie z. B. das d von dem X und dem y. So wenig das d allein eine Grösse bedeutet, mit der man etwa dividiren könnte, um sie wegzuschaffen; so wenig bedeutet dx eine Grösse, mit der man multipliciren könnte. Freilich sind Zeichen wie $\frac{dX}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 X}{dx^2}$ nicht allein wegen ihrer Zusammengesetzheit und Weitläuftigkeit, sondern noch mehr deshalb, weil sie unrichtige Begriffe von der Entstehung der bezeichneten Grössen befördern, indem z.B. die Grösse $\frac{dX}{dx}$ oder $\frac{d^2 X}{dx^2}$ keinesweges durch irgend eine Division entsteht, zum Ausdruck von sehr bestimmten Grössen wenig geschickt. Es bleibt indessen, so lange man an hergebrachten Formen festhalten will, nichts anders übrig, als sich dieser Zeichen zu bedienen. Die Zeichen können, wenn man über ihre Schwerfälligkeit und Unpasslichkeit hinwegsieht, so weit sie zureichen, bleiben. Aber der unrichtige Begriff, den man damit, nach der gewöhnlichen Ansicht, verbindet und zwar insbesondere, dass sich dx, dy.... von dem Uebrigen trennen lassen, darf nicht bleiben. Dergleichen Unrichtigkeiten wegzuschaffen, ist der Zweck dieser Arbeit Lagrange's. Die oben erwähnten Zeichen des Uebersetzers, sind

der Schwierigkeit der alten Zeichen nicht unterworfen. Hier ist in $\frac{d}{x}X$, $\frac{d}{x}y$, $\frac{d^2}{x^2}X$ *etc.* $\frac{d}{x}$, $\frac{d^2}{x^2}$ *nur ein einziges Zeichen und Niemanden wird es einfallen, mit* x, x^2 *etc. multipliciren zu wollen, damit* d *allein übrig bleibe, welches vielmehr Jedermann für ein blosses Zeichen, und nicht für eine Grösse erkennt.*]

44.

Die gefundene Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung kann nicht allein zur Entwickelung von $\sin x$ und $\cos x$ in Reihen, sondern auch zur Umformung ihrer Werthe mittelst Exponential-Grössen dienen.

Man setze zu dem Ende $y = e^V$, wo e die Zahl bedeutet, deren natürlicher Logarithme 1 ist (12.), V aber eine unbestimmte Function von x. Nimmt man die erste und zweite Ableitung, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = e^V \frac{dV}{dx}, \frac{d^2y}{dx} = \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \frac{d^2V}{dx^2}\right] e^V.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die obige Gleichung [43.], so erhält man, nachdem mit e^V dividirt worden,

$$\frac{dX}{dx}\left[\frac{d^2V}{dx} + \left(\frac{dV}{dx}\right)^2\right] - \frac{d^2X}{dx^2}.\frac{dV}{dx} + \left(\frac{dX}{dx}\right)^3 = 0.$$

Dieser Gleichung lässt sich genug thun, wenn man

$$\frac{dV}{dx} = m\frac{dX}{dx},$$

setzt, wo m ein constanter Coefficient ist, welches

$\frac{d^2 V}{dx^2} = m \frac{d^2 X}{dx^2}$ giebt. Substituirt man diese Ausdrücke, so geht die Gleichung in folgende über:

$$(1 + m^2)\left(\frac{dX}{dx}\right) = 0.$$

[*Denn man erhält* $\frac{dX}{dx}\left(m \frac{d^2 X}{dx^2} + m^2\left(\frac{dX}{dx}\right)^2\right) - \frac{d^2 X}{dx^2} . m \frac{dX}{dx} + \left(\frac{dX}{dx}\right)^3 = 0$, *oder, weil das erste und dritte Glied sich aufheben*, $(1+m^2)\left(\frac{dX}{dx}\right)^3 = 0$], woraus folgt

$$1 + m^2 = 0, \text{ also } m = \sqrt{-1}.$$

Es ist also $\frac{dV}{dx} = \frac{dX}{dx} \sqrt{-1}$, und hieraus, wenn man zur Stammgleichung zurückgeht,

$$V = X\sqrt{-1} + a,$$

wo a eine willkürliche Constante ist. Also ist

$$e^V = e^{a + X\sqrt{-1}} = e^a . e^{X\sqrt{-1}} = Ae^{X\sqrt{-1}},$$

wenn, der Kürze wegen, $e^a = A$ heisst.

Man erhält also

$$y = Ae^{X\sqrt{-1}},$$

und da die Wurzelgrösse $\sqrt{-1}$ positiv und negativ genommen werden kann, mit demselben Rechte,

$$y = Be^{-X\sqrt{-1}},$$

wenn B eine andere willkürliche Constante bedeutet. Es ist leicht zu sehen, dass jeder dieser Werthe von y der Gleichung

$$\frac{dX}{dx} . \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 X}{dx^2} . \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dX}{dx}\right)^3 y = 0$$

genugthut, desgleichen auch ihre Summe, weil die Grössen y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ nur in lineärer Form vorkommen. Man hat also allgemein

$$y = Ae^{X\sqrt{-1}} + Be^{-X\sqrt{-1}},$$

wo A und B wieder, wie oben, zwei unbestimmte Coefficienten sind.

Dieser Ausdruck von y bezeichnet eben sowohl $\sin X$ als $\cos X$. Der Unterschied liegt blos in den Constanten A und B, die durch Vergleichung der Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$, für irgend einen Werth von X bestimmt werden müssen. Da nun $\sin X$ Null ist für $X = 0$, vermöge der Natur der Sinus, so muss $A + B = 0$ sein, [*und zwar, weil für* $X = 0$, $e^{X\sqrt{-1}}$ *und* $e^{-X\sqrt{-1}}$, *beide* 1 *sind*]. Ferner ist $\frac{dy}{dx} = \cos X . \frac{dX}{dx}$, folglich ist, weil der gefundene Ausdruck für y, $\frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx}(Ae^{X\sqrt{-1}} - Be^{-X\sqrt{-1}})\sqrt{-1}$ giebt,

$$\cos X = (Ae^{X\sqrt{-1}} - Be^{-X\sqrt{-1}})\sqrt{-1}.$$

Für $X = 0$ ist $\cos X = 1$, also $(A-B)\sqrt{-1} = 1$. Diese beiden Gleichungen geben $A = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$ und $B = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}$, also endlich

$$\sin X = \frac{e^{X\sqrt{-1}} - e^{-X\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

und auf die nemliche Weise

$$\cos X = \frac{e^{X\sqrt{-1}} + e^{-X\sqrt{-1}}}{2},$$

welches die bekannten Ausdrücke sind, die wir schon auf einem anderen Wege, in (22.), gefunden haben. [*Diese Rechnung dient, nicht sowohl die Ausdrücke mit unmöglichen Exponential-Grössen für sin X und cos X aus der obigen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung zu finden, als vielmehr, nachzuweisen, dass die Ausdrücke, wenn man sie schon kennt, wirklich sin X und cos X bedeuten, und zwar dadurch, dass sie, und sin X und cos X, einer und derselben Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung entsprechen. Denn es ist nicht bewiesen, dass der besagten Ableitungs-Gleichung nicht auch noch durch andere Functionen von x genug gethan werden kann. Wäre letzteres der Fall, so wäre es blosses Ungefähr, dass man darunter grade diejenigen Functionen gewählt hätte, welche sin X und cos X durch unmögliche Exponential-Grössen ausdrücken.*]

45.

In den obigem Beispielen haben wir die Ableitungs-Gleichung gesucht, und hernach aus dieser Gleichung die Stammgrösse y gefunden. Der letzte Theil dieser Operation ist, wie man sieht, die Umkehrung derjenigen, durch welche man von der Stammgrösse zu ihren Ableitungen gelangt. [*Sie ist das, was man gewöhnlich Integration nennt.*] Sie ist immer durch Reihen ausführbar, wenn man, wie wir oben lehrten, Reihen mit unbestimmten Coefficienten annimmt, und die einzel-

nen Gleichungen für die verschiedenen Potenzen von x aufstellt. Man findet auf diese Weise die Coefficienten, einen durch den andern, und hat öfters den Vortheil, dass sich das allgemeine Gesetz für die Abhängigkeit der Coefficienten zeigt. [*In der That ist diese Methode zu der sogenannten Integration durch Reihen vielfältig anwendbar. Es sey z. B.*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

gegeben, so nehme man die zweite Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2x^3}{(\sqrt{-x^4})^{\frac{3}{2}}}$. *Dividirt man die erste durch die zweite, so erhält man*

$$\frac{d^2y}{dx^2} : \frac{dy}{dx} = -\frac{2x^3}{1-x^4} = -2x^3(1+x^4+x^8+x^{12}....)$$

Hat man nun $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ *gesetzt, so ist*

$$\frac{dy}{dx} = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\gamma + 3.2\delta x$$

Substituirt man dieses in die vorige Gleichung, so erhält man

$$\frac{2\gamma + 3.2\delta x}{\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2} = -2x^3(1+x^4+x^8)$$

oder

$$2\gamma + 3.2\delta x = -2x^3(1+x^4+x^8....)(\beta + 2\gamma x)$$

woraus sich die Coefficienten β, γ.... *finden lassen, so, dass man also* y *erhält, welches das Integral von* $\frac{1}{\sqrt{(y-x^4)}}$ *ist. Statt* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *mit* $\frac{dy}{dx}$

zu dividiren, hätte man auch nur die Wurzelgrösse wegschaffen können, worauf es nur ankommt z. B. man hätte die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = -2x^3$, *oder die Gleichung* $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{2x^3}{(1-x^4)^2}$ *aufstellen können, welche Gleichungen ebenfalls rational sind.*

Es sey $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\overset{e}{\log} x}$, *so ist* $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x \overset{e}{\log} x^2}$ *welches* $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 : \frac{d^2y}{dx^2} = -x$ *giebt. Also, wenn man, wie oben,* $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots$ *setzt,*

$$\frac{(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 \ldots)^2}{2\gamma + 3 \cdot 2\delta x \ldots} = -x, \text{ oder}$$

$$(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 \ldots)^2 = -x(2\gamma + 3 \cdot 2\delta x \ldots)$$

woraus sich die Coefficienten $\beta, \gamma \ldots$ *finden lassen.*

Es giebt bekanntlich Methoden, die Gestalt der Reihen mit unbestimmten Coefficienten, die man annimmt, im Voraus zu erkennen, so dass es nicht nöthig ist, etwa Coefficienten einzuführen, die hernach verschwinden. Diese Integrations-Methode ist besonders da von Nutzen, wo Wurzelgrössen oder transcendente Grössen die Zurückleitung erschweren, weil diese Grössen allemal in den abgeleiteten Gleichungen ebenfalls vorkommen und folglich, wenn man die abgeleiteten Gleichungen mit den gegebenen verbindet, weggeschafft werden können.]

Man kann aber auch die Coefficienten unmittelbar durch die Methode von (33. etc.) finden. Denn

man darf nur die Werthe der Ableitungen [*von* y] suchen, und darin $x = o$ setzen, so erhält man allgemein:

$$y = fx = fox + \frac{dfox}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2fox}{dx^2} \ldots.$$

[*Man erhält diese Reihe, wenn man in die allgemeine Entwickelung von* $f(x+k) = fx + kdfx + \frac{k^2}{2}d^2fx \ldots,$ $x = o$ *und* $k = x$ *setzt.*] Dieser Ausdruck hat das Gute, dass er zeigt, warum allemal Coefficienten, wie oben geschahe, unbestimmt bleiben. Wollte man nemlich y durch eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung suchen, so würde diese Gleichung den Werth von $\frac{dy}{dx}$ in x und y geben. Daraus würde man eine Gleichung der zweiter Ordnung mit $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y$ nnd x, eine Gleichung der dritten Ordnung mit $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y$ und x u. s. w. finden, so dass man, wenn man allmälig die durch diese Gleichungen bestimmten Werthe von $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x}$ in obige Gleichungen substituirte, zuletzt $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x}, \frac{d^3y}{d^3x} \ldots,$ durch x und y ausgedrückt, erhielte. Machte man nun $x = o$, so erhielte man $\frac{dfox}{dx}, \frac{d^2fox}{dx^2}, \frac{d^3fox}{dx^3} \ldots$ durch $\frac{dfox}{dx}$ ausgedrückt, welches unbestimmt bliebe.

Eben so, wenn man die Bestimmung von y von einer Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, zwi-

schen x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, abhängig machte, erhielte man daraus, allmälig, eine Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. w. und nach der Substitution erhielte man $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.... in x, y und $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt, so dass, wenn man $x = 0$ setzte, die Werthe von $\frac{d^2fox}{dx^2}$, $\frac{d^3fox}{dx^3}$, $\frac{d^4fox}{dx^4}$.... durch fox und $\frac{dfox}{dx}$ ausgedrückt würden, welche beide Grössen unbestimmt blieben u. s. w..

Ginge man also von einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung aus, so bliebe eine Grösse fox unbestimmt. Ginge man von einer Gleichung zweiter Ordnung aus, so blieben zwei Grössen $\frac{dfox}{dx}$ und $\frac{d^2fox}{dx^2}$ unbestimmt u. s. w. und zwar sind diese Grössen Constanten, weil sie die Werthe von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.... für $x = 0$ ausdrücken. [*Es giebt bekanntlich noch viele andere Mittel, durch Reihen zu integriren, welche alle mehr oder weniger auf der allgemeinen Entwickelungs-Reihe von $f(x+k)$ beruhen. Man sehe über diesen Gegenstand eine Abhandlung des Uebersetzers, in dessen Sammlung mathematischer Abhandlungen, Berlin bei Maurer*, 1821. 1. *Band. S.* 218. *seq. wo dreizehn verschiedene allgemeine Integrations-Methoden zusammengestellt sind.*]

46.

Obgleich dieser Schluss auf die Theorie der Reihen gegründet ist, so ist es doch leicht, sich zu überzeugen, dass er immer Statt findet, was auch y sey, weil man einen Reihen-Ausdruck immer als die Entwickelung eines endlichen Ausdrucks betrachten kann. Da indessen dieser Umstand den Ableitungs-Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, eigenthümlich ist, so ist es nöthig, ihn aus der Natur dieser Gleichungen selbst, herzuleiten.

Wir wollen also allgemein die Gleichung $F(x,y)$ $[=u]=0$ zwischen zwei veränderlichen Grössen nehmen und durch $\frac{du}{dx}=0$ ihre erste, durch $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ ihre zweite abgeleitete Gleichung u. s. w. bezeichnen, wobei x und y zugleich als veränderlich betrachtet werden. [*Lagrange schreibt* $F(xy)'$, $F(xy)''$ *etc. Mit den alten Zeichen lässt sich dies nicht wohl anders ausdrücken, als wenn man* $\frac{dFxy}{dx}$, *oder, der Kürze wegen,* $\frac{du}{dx}$ *schreibt, indem man* $Fxy=u$ *setzt. Dass die Ableitung nur nach einer der beiden Grössen* x *und* y *genommen werden kann, ist klar, weil, vermöge der gegebenen Gleichung* $Fxy=0$, *die eine Grösse allemal von der andern abhängt. In den Zeichen des Uebersetzers heissen die Gleichungen:* $\frac{d}{x}Fxy=0$, $\frac{d^2}{x^2}Fxy=0$ *etc. oder* $\frac{d}{x}u=0$, $\frac{d^2}{x^2}u=0$ *etc.*] a, b, c mögen nun beliebige,

in

in der Function Fxy enthaltene Constanten bedeuten, so werden diese Constanten auch in den abgeleiteten Gleichungen vorkommen. Da nun die Gleichungen $u = o$ und $\frac{du}{dx} = o$ zugleich Statt finden, so kann man eine Constante a eliminiren. Die entstehende Gleichung wird eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$ sein, die eine Constante weniger, als die Stammgleichung enthält, und die mit der Stammgleichung zugleich Statt findet. Eben so werden die drei Gleichungen $u = o$, $\frac{du}{dx} = o$ und $\frac{d^2u}{dx^2} = o$, zugleich Statt finden. Man kann zwischen denselben zwei Constanten wegschaffen; die entstehende Gleichung wird zweiter Ordnung sein, mit x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, und wird zwei Constanten weniger, als die Stammgleichung, mit welcher sie zugleich Statt findet, enthalten u. s. w.

Da also bei einer Gleichung mit zwei veränderlichen Grössen die Ableitungs-Gleichung der ersten Ordnung eine, die der zweiten Ordnung zwei Constanten u. s. w. weniger, als die Stammgleichung enthalten kann, so folgt umgekehrt, dass die Stammgleichung einer gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung eine, zweiter Ordnung zwei Constanten u. s. w. mehr enthalten muss, [*kann*] als letztere. Die Constanten sind willkürlich und es ist klar, dass die Stammgleichung nie m e h r als diese Zahl von willkürlichen Constanten enthalten kann, weil man die Constanten sonst durch die Ableitungs-Gleichungen nicht

alle wegschaffen könnte. [*Wohl nur das letztere folgt, nicht dass die Gleichung nothwendig zwei Constanten enthalten müsse.*]

Hat man also zur Bestimmung einer Function nichts weiter, als eine Ableitungs-Gleichung der ersten, zweiten Ordnung etc. so enthält die Stammgleichung, in ihrer ganzen Allgemeinheit, eine, zwei Constanten etc. nach der Ordnung der Gleichung. Man findet die Constanten für einzelne bestimmte Werthe der Function, oder ihrer Ableitungen.

Findet man also, auf irgend einem Wege, eine Gleichung zwischen x und y, die einer gegebenen Gleichung von einer beliebigen Ordnung genug thut, und die so viele willkürlichen Constanten, als der Zeiger der Ordnung Einheiten, enthält, so ist diese Gleichung die Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung und kann überall, statt ihrer, in Rechnung gebracht werden. [*Lagrange vermeidet überall ein Zeichen für die Stammgleichung und für die Zurückleitung (Integration). Ein, seinen Ableitungs-Zeichen analoges, Zeichen dürfte auch unbequem sein. Die alte Bezeichnungs-Art bedient sich eines ∫ oder S, allein dies ist grade der Ort, wo die alten Zeichen am meisten inconsequent und auch am meisten unzureichend sind. Wenn es nemlich erlaubt ist, ein anderes Zeichen als d für die Zurückleitung zu setzen, so ist es auch, vergleichsweise, erlaubt, für* $\frac{1}{x^2}$ *ein anderes Zeichen als* x^{-2} *zu setzen, obgleich man xx durch* x^2 *bezeichnet hat; denn, ganz analog wie es sich mit* x^2 *und* x^{-2} *verhält, verhält es sich*

auch mit d^2y *und* $\int\int y$. *Da man es nun gewiss inconsequent finden würde, nicht* x^{-2} *zu schreiben, wenn man* x^2 *schrieb, so muss man es auch nothwendig inconsequent finden, nicht* $d^{-2}y$ *zu schreiben, wenn man einmal* d^2y *schrieb. Deshalb schreibt der Uebersetzer nie* $\int y$ *oder* $\int\int y$ *etc. sondern* $d^{-1}y$, $d^{-2}y$ *oder* $\frac{1}{d}y$, $\frac{1}{d^2}y$, *und wenn bezeichnet werden muss, welche Grössen unabhängig veränderlich sind, z. B.* x, $\frac{x}{d}y$, $\frac{x^2}{d^2}y$ *oder* $\frac{d^{-1}}{x}y$, $\frac{d^{-2}}{x^2}y$ *etc. und er glaubt, so schreiben zu müssen, weil hier gar keine Wahl weiter Statt findet, indem die Operation, die bezeichnet werden soll, die nemliche ist, blos mit dem Unterschiede, dass sie den Rückweg nimmt. So inconsequent ferner dies* $\int$ *ist, so unzulänglich ist es auch; denn die Grösse* x, *z. B. vermag das Zeichen gar nicht mit anzudeuten und man muss sich mit Worten behelfen.*]

47.

Statt aus den drei Gleichungen $u = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, die beiden Constanten a und b auf einmal zu eliminiren, kann man nur eine der Constanten a und b, zwischen den ersten beiden Gleichungen, wegschaffen. Dadurch erhält man zwei Gleichungen der ersten Ordnung, deren eine nur noch die Constante a, die andere nur die Constante b enthält. Schafft man hierauf, aus jeder dieser beiden Gleichungen, die Constante a oder b, mit Hülfe der

von ihr genommenen ersten abgeleiteten Gleichung, weg, so erhält man zwei Gleichungen der zweiten Ordnung ohne a und b, die mit der Gleichung zweiter Ordnung übereinkommen müssen, welche durch die Elimination der beiden Constanten zwischen den drei Gleichungen $u = o$, $\frac{du}{dx} = o$ und $\frac{d^2u}{dx^2} = o$ entsteht, weil der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$, den diese Gleichung der zweiten Ordnung giebt, und der in x, y und $\frac{dy}{dx}$, ohne a und b, ausgedrückt ist, nur immer der nemliche sein kann, auf welche Weise man ihn auch aus der Stammgleichung finden mag.

Daraus folgt, dass eine Gleichung zweiter Ordnung von zwei verschiedenen Ableitungs-Gleichungen der ersten Ordnung abhängt, deren jede eine willkürliche Constante mehr enthält.

Auf dieselbe Art lässt sich beweisen, dass eine Gleichung der dritten Ordnung von drei verschiedenen Ableitungs-Gleichungen der zweiten Ordnung abhängt, deren jede eine willkürliche Constante mehr enthält u. s. w.

Zugleich sieht man, dass man, wenn man zu einer gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, zwei Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung, die ihr beide genugthun, und die jede eine willkürliche Constante a oder b mehr enthalten, gefunden hat, aus diesen beiden Gleichungen unmittelbar die Stammgleichung finden kann; denn es ist alsdann nichts weiter mehr nöthig, als die Grösse $\frac{dy}{dx}$ zwi-

schen den beiden Gleichungen erster Ordnung zu eliminiren, um eine Gleichung zwischen x und y mit zwei willkürlichen Constanten a und b zu erhalten.

Eben so verhält es sich mit den Ableitungs-Gleichungen dritter Ordnung. Findet man drei Gleichungen der zweiten Ordnung, deren jede der gegebenen Ableitungs - Gleichung dritter Ordnung genugthut, und die die willkürlichen Constanten a, b, c enthalten, so erhält man, wenn man $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ zwischen den drei Gleichungen eliminirt, eine Gleichung zwischen x, y und a, b, c, die folglich die Stammgleichung der gegebenen Gleichung ist u. s. w.

48.

Findet man aber für eine Gleichung zweiter Ordnung, zwei Gleichungen erster Ordnung, von welchen nur eine eine willkürliche Constante enthält, so erhält man, wenn man $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, eine Gleichung zwischen x und y, in welcher nur eine willkürliche Constante vorkommt, und die also nicht die vollständige Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung ist. Gleichwohl entspricht diese Gleichung zwischen x und y den beiden Gleichungen der ersten Ordnung, weil sie der gegebenen Gleichung zweiter Ordnung genugthut, die von den beiden zugleich abgeleitet ist. Sie kann also als die vollständige Stammgleichung derjenigen von den beiden Gleichungen erster Ordnung betrachtet werden, die keine willkürliche Constante enthält. Daraus folgt, dass man, wenn eine Ableitungs - Gleichung der

ersten Ordnung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$ gegeben ist, und man findet daraus, auf irgend eine Weise, eine Gleichung der zweiten Ordnung, entweder durch Elimination einer Constante, oder auf anderem Wege, und ferner, zu dieser Gleichung der zweiten Ordnung, auf irgend einem Wege, eine andere Stammgleichung der ersten Ordnung, mit einer willkürlichen Constante a, allemal durch Wegschaffung von $\frac{dy}{dx}$ zwischen der letzten Gleichung und der gegebenen, eine Gleichung zwischen x und y aufstellen kann, welche die willkürliche Constante a enthält, und welche folglich die vollständige Stammgleichung der gegebenen ist.

Eben so lässt sich zeigen, dass, wenn man von einer gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung die Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung nimmt, und alsdann zu dieser eine Stammgleichung zweiter Ordnung, in welcher die gegebene Gleichung nicht enthalten ist, mit einer willkürlichen Constante findet, nur mit Hülfe der gegebenen, $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{dy}{dx}$ weggeschafft werden dürfen, um eine Gleichung zwischen x und y zu haben, die eine willkürliche Constante enthält, und die folglich die vollständige Stammgleichung der gegebenen ist u. s. w.

Alles dieses lässt sich auf Gleichungen höherer Ordnung ausdehnen, und es folgt daraus Aehnliches.

Der Gegenstand dieses Abschnitts ist ausführlicher in der 10. 11. und 12. Vorlesung über die Functionen-Rechnung vorgetragen, wo man auch eine vollständige Analysis der Winkel-Functionen findet.

[*Man sehe auch über die Theorie der Constanten und der Gleichungen, die aus Verbindung gegebener Gleichungen entstehen, die hiervon handelnden Abschnitte in dem Versuch des Uebersetzers über die Rechnung mit veränderlichen Grössen: Göttingen, bei* Vendehoeck. 1813. 1. *Band. S.* 306 *bis* 373.]

Achter Abschnitt.

In welchem die einfachsten Fälle der Zurückleitung von abgeleiteten Functionen, oder von Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung, untersucht werden. Von den lineären Functionen der verschiedenen Ordnungen, und denen, die lineär gemacht werden können.

49.

Wenn eine Gleichung erster Ordnung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$ gegeben ist, und man kann sie, durch irgend eine Operation, auf die Gestalt $\frac{du}{dx} = 0$ bringen, wo $\frac{du}{dx}$ die erste Ableitung einer Function $u = fxy$ bedeutet, so erhält man auf der Stelle die Stammgleichung $fxy = u = a$, wenn a die willkürliche Constante ist.

Zum Beispiel: $\frac{dy}{dx} = 0$ giebt auf der Stelle

$y = a$. Die Gleichung $x\frac{dy}{dx} - y = o$, giebt, durch x^2 dividirt, $\frac{du}{dx} = o$, wenn $u = \frac{y}{x}$, woraus $\frac{y}{x} = a$ folgt. [*Die Uebersetzung dieser Stelle ist, wegen der veränderten Zeichen, nicht wörtlich. Das Zeichen u kommt im Original nicht vor. Der Sinn ist indessen der nemliche.*] Dividirt man nemlich die Gleichung $[x\frac{dy}{dx} - y = o]$ durch xy, so erhält man $\frac{dy}{dx} : y - \frac{1}{x} = o$, wo die Grössen x, y nicht mehr mit einander vermengt sind. Nimmt man die Stammgrösse von jedem Theile, so erhält man

$$\overset{e}{log}\, y - \overset{e}{log}\, x = \overset{e}{log}\, a,$$

woraus, wie oben, $\frac{y}{x} = a$, folgt.

Allgemein darf man nur, so bald die gegebene Gleichung auf die Gestalt

$$fx + \frac{dy}{dx} Fy = o,$$

gebracht werden kann, wo die Grössen abgesondert sind, die Stammgrössen von fx und $\frac{dy}{dx} Fy$ nehmen, und die Summe derselben einer willkürlichen Constante a gleich setzen. Eben so, wenn sich die gegebene Gleichung, durch irgend eine Substitution, auf eine ähnliche Form bringen lässt.

Es sey z. B. die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

gegeben, so mache man $\frac{y}{x} = u$, woraus $y = xu$, und $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$ folgt. [*Nemlich weil, vermöge der gegebenen Gleichung zwischen x und y, y von x abhängt.*] Die gegebene Gleichung geht, wenn man dieses substituirt, in $x\frac{du}{dx} + u = fu$ über, und dieser Ausdruck kann auf

$$\frac{1}{x} + \frac{\frac{du}{dx}}{u - fu} = 0, \text{ gebracht werden.}$$

[*Weil nemlich* $x\frac{du}{dx} + u - fu = 0$ *ist, welches, durch* $x(u - fu)$ *dividirt,* $\frac{\frac{du}{dx}}{u - fu} + \frac{1}{x} = 0$ *giebt. Dieser Ausdruck ist deshalb zur Zurückleitung geschickter, als die gegebene Gleichung* $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, *weil darin die veränderlichen Grössen x und u abgesondert sind.*]

Wäre die Gleichung $y = xf\left(\frac{dy}{dx}\right)$ gegeben, so nehme man davon, anstatt sie auf die vorige Gleichung zu bringen, [*welches angehen würde, weil* $\frac{y}{x} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ *und folglich* $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ *ist*] die ersten Ableitungen, welches giebt

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{df\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dy}{dx}} + f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

und sich auf

$$\frac{1}{x}+\frac{\frac{d^2y}{d^2x}\cdot\frac{df\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}}{f\left(\frac{dy}{dx}\right)-\frac{dy}{dx}}=0,$$

bringen lässt. Macht man $\frac{dy}{dx}=u$, so geht die Gleichung in eine der vorigen Art über. [*Nemlich*, $\frac{dy}{dx}=u$ *giebt* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *und folglich* $\frac{1}{x}+\frac{\frac{du}{dx}\cdot\frac{dfu}{du}}{fu-u}$ $=0$, *welches in so fern mit der obigen Gleichung* $\frac{1}{x}+\frac{\frac{du}{dx}}{u-fu}=0$ *übereinkommt*, *als auch hier die veränderlichen Grössen* x *und* u *abgesondert sind.*] Hat man also hiervon eine Stammgleichung zwischen x und u mit einer willkürlichen Constante gefunden, das heisst, eine Gleichung zwischen x und $\frac{dy}{dx}$, so darf man nur $\frac{dy}{dx}$, mit Hülfe der gegebenen Gleichung, wegschaffen, um eine Gleichung zwischen x und y mit einer willkürlichen Constante zu haben, welche die vollständige Stammgleichung der gegebenen ist. Diese Methode ist, wie man sieht, eine Anwendung der Theorie des vorigen Paragraphs.

50.

Hierdurch lässt sich, wie man sieht, die Untersuchung der Stammgrössen mit zwei veränderlichen Grössen, auf diejenige der Stammgrössen mit einer Veränderlichen bringen. [*Jedoch nur in dem Fall, wenn eine Gleichung zwischen den zwei veränderlichen*

Grössen gegeben ist, wodurch ein Ausdruck, der dieselben enthält, in einen Ausdruck mit einer Veränderlichen übergeht.] Da aber zu dieser Verwandlung in der Regel nöthig ist, dass man für x und y andere gegebene veränderliche Grösse t und u setzt, so ist in Rücksicht dieser Substitution zu bemerken, dass, weil u, vermöge der Gleichung zwischen x und y, von t abhängt, die beiden Grössen x und y als von t abhängig betrachtet werden können. Hat man also $y = fx$ gesetzt, so erhält man, wenn man x und y als Functionen von t betrachtet, $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dx}$ (16.). Betrachtet man y gradezu als eine Function von x, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dfx}{dx}$, wie bisher. Um also von dieser Hypothese zu derjenigen überzugehen, wo x und y Functionen von t sind, muss man statt $\frac{dy}{dx}$ die Grösse $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ setzen. [*Weil* $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dx}$ *war, woraus* $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ *folgt. Hier ist das Original wieder, der Zeichen wegen, beinahe unverständlich. Es heisst dort, man müsse* $\frac{y'}{x'}$ *statt* y' *setzen; also bedeutet der nemliche Strich an dem* y, *einmal die Ableitung nach* t, *das anderemal die Ableitung nach* x, *und der nemliche Strich an dem* x, *die Ableitung nach* t. *Aus dieser Vieldeutigkeit entsteht offenbar Verwirrung und die Schwierigkeit ist um so grösser, da es hier grade ins besondere auf den Unterschied der Beziehung der Ableitungen, das heisst, der Be-*

deutung des Strichs ankommt und nur allein davon geredet wird.]

Hätte man also die Gleichung $\frac{dy}{dx} = Fxy$ zu verwandeln, so würde man damit anfangen, statt derselben $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} Fxy$ zu schreiben, [*weil* $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ *statt* $\frac{dy}{dx}$ *geschrieben werden muss, welches* $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = Fxy$, *oder* $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} Fxy$ *giebt.*] Hierauf aber würde man statt x, y, $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ ihre Werthe in t, u und $\frac{du}{dt}$ substituiren.

Eben so muss man für $\frac{d^2 y}{dx^2}$ die Grösse $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} : \frac{dx}{dt}$ oder $\left(\frac{d^2 y}{dt^2} . \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} . \frac{d^2 x}{dt}\right)$ $\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$ substituiren u. s. w. [*Denn, wenn z. B.* $\frac{dy}{dx} = v$ *heisst, so ist* $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = v$, *also* $\frac{d^2 y}{dt^2} : \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} . \frac{d^2 x}{dt^2} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{dv}{dt}$. *Nun folgt aus* $v = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 y}{dx^2} . \frac{dx}{dt}$, *also ist* $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dv}{dt} : \frac{dx}{dt}$. *Setzt man hierin den vorhin gefundenen Werth von* $\frac{dv}{dt}$, *so erhält man*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left[\frac{d^2 y}{dt^2} : \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} . \frac{d^2 x}{dt^2} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] \frac{dx}{dt}$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}.\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^3,$$

welches also an die Stelle von $\frac{d^2y}{dx^2}$ *gesetzt werden muss.*]

Wollte man in einer Gleichung, in welcher y von x abhängt, umgekehrt, x als abhängig von y betrachten, so wäre die erste Ableitung von y der Einheit gleich und man dürfte bloss $1 : \frac{dx}{dy}$ statt $\frac{dy}{dx}$, $-\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3$ statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ setzen u. s. w. [*Denn wenn y von x abhängt, und man will nun, umgekehrt, x als von y abhängend betrachten, so ist* $\frac{dy}{dy} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dy}$, *oder* $1 = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dy}$, *woraus folgt:* $\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$. *Ferner folgt aus* $1 = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dy}$, $0 = \frac{d^2y}{dx^2}.\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \frac{dy}{dx}.\frac{d^2x}{dy^2}$, *oder, wenn man den Werth von* $\frac{dy}{dx}$, $1 : \frac{dx}{dy}$ *substituirt,* $0 = \frac{d^2y}{dx^2}.\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 + \frac{d^2x}{dy^2}$, *woraus folgt:* $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3$. *Man muss also, sobald, umgekehrt, x als abhängig von y betrachtet werden soll, wie es im Text heisst,* $1 : \frac{dx}{dy}$ *statt* $\frac{dy}{dx}$, *und* $-\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3$ *statt* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *setzen.*

Diese Verwandlungen kommen bei der Zurückleitung häufig und überall vor, wo, statt der vorhandenen, beliebige andere veränderli-

che Grössen in Rechnung gebracht werden sollen. Wäre z. B. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{(1 + x^2)}$ *gegeben, und man wollte, um wo möglich die Wurzelgrösse wegzuschaffen,* $\sqrt{(1+x^2)} = t$ *setzen, so wäre nunmehr* x, *also auch* y, *von* t *abhängig. Man müsste also, dem Obigen zufolge, zunächst* $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ *statt* $\frac{dy}{dx}$ *setzen, welches* $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} . xt$ *giebt. Nun war* $t = \sqrt{(1 + x^2)}$, *also ist* $1 + x^2 = t^2$ *und* $x\frac{dx}{dt} = 2t$, *folglich* $\frac{dy}{dt} = 2t^2$, *welcher Ausdruck keine Wurzelgrösse mehr enthält. Wäre* $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \overset{e}{\log} x}$ *und man wollte, um den Logarithmen, wo möglich, wegzuschaffen,* $\overset{e}{\log} x = t$ *setzen, so wäre zunächst* $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{1}{x \overset{e}{\log} x}$, *oder* $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} : x \overset{e}{\log} x$. *Nun giebt* $\overset{e}{\log} x = t$, $\frac{dx}{dt} : x = 1$, *also ist* $\frac{dx}{dt} : x \overset{e}{\log} x = \frac{1}{\overset{e}{\log} x} = \frac{1}{t}$, *folglich ist* $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$, *welches den Logarithmen nicht mehr enthält u. s. w. Ausführlicheres findet man über das Uebertragen der Abhängigkeit veränderlicher Grössen in dem oben erwähnten Versuch des Uebersetzers über die Rechnung mit veränderlichen Grössen, 1. Band, S. 373 bis 415.]*

51.

Uebrigens giebt es ein allgemeines Mittel, die Stammgleichung einer abgeleiteten von beliebiger Ordnung zu finden, welches darin besteht, das erste Glied der Gleichung, deren zweites Glied Null ist, mittelst eines Multiplicators [*des sogenannten integrirenden Multiplicators*] zu einer vollständigen Ableitung zu machen. Man findet in der dreizehnten Vorlesung über die Functionen-Rechnung einen Beweis der Existenz des Multiplicators für alle mögliche Ableitungs-Gleichungen, aber die Ausmittelung desselben ist öfters sehr schwierig, weshalb dieses Mittel mehr interessant als nützlich ist. [*Die Mittel zur allgemeinen Zurückleitung der Ableitungs-Gleichungen sind bekanntlich überhaupt noch sehr unvollkommen. Man sehe auch über Fälle, in welchen Ableitungs-Gleichungen, statt durch Multiplication, auch durch subtractive Zertheilung integrabel gemacht werden können, einige Bemerkungen im zweiten Bande der Sammlung mathematischer Abhandlungen des Uebersetzers, Seite* 248. *seq.*]

52.

Was die Zurückleitung der Functionen einer einzelnen veränderlichen Grösse, wie Fx, oder $\frac{dy}{dx} Fy$ betrifft, so kann man, bekanntlich, wenn Fx, eine rationale Function von x ist, dieselbe allemal in einzelne Glieder von der Form x^m, oder $\frac{1}{(a+bx)^m}$

zerlegen, wo m eine ganze positive Zahl, und $a+bx$ einen Factor des Nenners der Function bedeutet, im Fall sie einen Nenner hat. Die Stammgrösse Fx ist also aus eben so vielen Gliedern von der Form $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ und $\frac{(a+bx)^{1-m}}{b(1-m)}$, oder $\overset{e}{log}\, x$, wenn $m=-1$ und $\frac{\overset{e}{log}(a+bx)}{b}$, wenn $m=1$ ist, zusammengesetzt. Eben so verhält es sich mit der Stammgrösse von $\frac{dy}{dx}Fy$. (32.)

Enthält Fx Irrational-Grössen, so schafft man sie durch Substitutionen weg, welches aber, im Allgemeinen, durch die bekannten Methoden, nur für Wurzelgrössen, von der Form $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ möglich ist. Enthält Fx verwickeltere Wurzelgrössen, oder auch nur mehrere jener Art, so ist die Berechnung der Stammgrösse durch die bekannten Methoden im allgemeinen nicht möglich. Man kann dieselbe alsdann nur dadurch finden, dass man die Wurzelgrössen entweder durch die Auflösung in Reihen wegschafft, oder dass man die allgemeine Methode von (33.), für die Auflösung jeder Function von x in eine Reihe, [*oder die Methode von* (45.) *oder eine andere von den dort erwähnten dreizehn verschiedenen Methoden*] anwendet. Zu dem Ende sey

$$\frac{dFx}{dx}=\frac{d^2fx}{dx^2},\ \frac{d^2Fx}{dx}=\frac{d^3fx}{dx^3}\ \ldots,$$

so lässt sich der Werth der Stammgrösse fx von Fx durch

$fx=$

$$fx = fox + x\frac{dFox}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2Fox}{dx^2} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3Fox}{dx^3} \ldots\ldots$$

ausdrücken, wo fox die unbestimmte Constante ist. [*Da die Zurückleitung oder Integration entwickelt gegebener Functionen einer veränderlichen Grösse von der Form* $\frac{dy}{dx} = fx$, *von welcher hier die Rede ist, als der einfachste Fall bei der Anwendung der Rechnung auf Gegenstände der Geometrie, Mechanik und Physik, nicht allein am häufigsten vorkommt, sondern auch andere Operationen der Integral-Rechnung, wenn die Ableitungen nicht entwickelt, sondern nur durch Gleichungen gegeben sind, zuletzt darauf hinauskommen, so ist dieser Gegenstand besonders wichtig. Da der Fälle, in welchen für die Stammgrössen endliche Ausdrücke angegeben werden können, nur so wenige sind, und dieselben nicht über diejenigen hinaus gehen, welche* Lagrange *anführt, so müssen hier die Reihen vorzüglich zu Hülfe genommen werden, und da sich, auch selbst die endlichen Ausdrücke, wie* $\log x$, $\cos x$ *etc., auf Reihen beziehen, so kommt am Ende, wenigstens in so fern als es den Zahlen-Werth der Stammgrössen in bestimmten Fällen gilt, Alles auf die Auflösung in Reihen an. Dann besteht die Schwierigkeit darin, die Reihen convergent zu machen. Nur zu häufig sind sie es nicht; auch* Lagrange's *allgemeine Reihe ist es nicht immer. Unter den, zur Verstärkung der Convergenz ersonnenen Methoden, von welchen man in dem oben erwähnten Aufsatz des Ueber-*

setzers, im ersten Bande seiner Sammlung mathematischer Abhandlungen, mehrere bei einander findet, sind besonders diejenigen von Kramp und Bérard, denen frühere und ähnliche Arbeiten von Cotes und Newton vorhergehen, zu bemerken. Da die Integration von Ausdrücken, wie $\frac{dy}{dx} = fx$, *direct die Fläche von Curven in der Ebene unter ihren Coordinaten giebt, so hat man diesen Fall der Integral-Rechnung, auch den Fall der Quadratur genannt. Die approximative Integrations-Methode nach Kramp und Bérard, geht von dieser Quadratur der Curven aus.*]

53.

Findet man für eine gegebene Ableitungs-Gleichung irgend einer Ordnung, eine Gleichung niedrigerer Ordnung, die keine willkürliche Constante, oder deren weniger enthält, als sie enthalten könnte; so kann diese Gleichung nicht als die vollständige Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung, sondern nur als ein einzelner Fall derselben angesehen werden, in welchem die willkürlichen Constanten bestimmte Werthe erhalten haben.

Es giebt einem sehr ausgedehnten Fall, wo blos mehrere besondere Werthe von y in x zur Bestimmung des vollständigen Werths von y zureichen, nemlich denjenigen, wenn die gegebene Gleichung, die übrigens von beliebiger Ordnung sein kann, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.... nur in lineärer Form enthält.

Es sey z. B. die Gleichung

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} \dots = 0.$$

gegeben, wo A, B, $C \dots$ gegebene Functionen von x allein sind. Die verschiedenen Functionen von x, welche, für y substituirt, jede einzeln der Gleichung genugthun, sollen p, q, $r \dots$ sein, so behaupte ich, dass allgemein

$$y = ap + bq + cr \dots$$

ist, wo a, b, $c \dots$ willkürliche Constanten sind. Denn, substituirt man diesen Ausdruck für y in die gegebene Gleichung, so wird derselben, unabhängig von den Constanten, genuggethan. [*Nemlich* $y = ap + bq + cr \dots$, *giebt* $\frac{dy}{dx} = a\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} + c\frac{dr}{dx} \dots$, $\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{d^2p}{dx^2} + b\frac{d^2q}{dx^2} + c\frac{d^2r}{dx^2} \dots$, *etc. Substituirt man Dieses in die gegebene Gleichung* $Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} \dots = 0$, *so erhält man*

$$A(ap + bq + cr \dots)$$
$$+ B\left(a\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} + c\frac{dr}{dx} \dots\right)$$
$$+ C\left(a\frac{d^2p}{dx^2} + b\frac{d^2q}{dx^2} + c\frac{d^2r}{dx^2} \dots\right) \text{ etc.} = 0.$$

oder, weil die Constanten a, b, $c \dots$ *willkürlich sind und folglich die Summen der Glieder, welche* a, b *etc. enthalten, einzeln, gleich Null sein müssen,*

$$Ap + B\frac{dp}{dx} + C\frac{d^2p}{dx^2} \dots = 0,$$

$$Aq + B\frac{dq}{dx} + C\frac{d^2 q}{dx^2} \ldots = 0,$$

etc. Da nun p, q Werthe von y sind, und $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{d^2 p}{dx^2}$ offenbar nichts anders sind, als $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, so kommen alle diese Gleichungen mit einander und mit der gegebenen Gleichung $Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2 y}{dx^2}$ überein. Oder auch umgekehrt: da p, q, r Werthe von y sind, die der gegebenen Gleichung $Ay + B\frac{dy}{dx}$ $= 0$ genug thun, so finden nothwendig die Gleichungen

$$Ap + B\frac{dp}{dx} + C\frac{d^2 p}{dx^2} \ldots = 0,$$

$$Aq + B\frac{dq}{dx} + C\frac{d^2 q}{dx^2} \ldots = 0,$$

$$Ar + B\frac{dr}{dx} + C\frac{d^2 r}{dx^2} \ldots = 0, \text{ etc.}$$

Statt. Man multiplicire jede dieser Gleichungen mit einem unbestimmten Coefficienten, wie a, b, c und addire die Producte, so erhält man die Gleichung

$$A(ap + bq + cr \ldots)$$
$$+ B\left(a\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} + c\frac{dr}{dx} \ldots\right)$$
$$+ C\left(a\frac{d^2 p}{dx^2} + b\frac{d^2 q}{dx^2} + c\frac{d^2 r}{dx^2} \ldots\right) \ldots = 0.$$

Setzt man nun $ap + bq + cr \ldots = y$, so geht diese Gleichung in

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} \ldots = 0$$

über. *Diese letzte Gleichung kommt mit der gegebenen überein, also thut in der That $y = ap + bq + cr \ldots$ der gegebenen Gleichung vollständig Genüge.*] Daraus folgt, dass man, wenn die Zahl der besonderen Werthe $p, q, r \ldots$ der Ordnungs-Zahl der gegebenen Gleichung, das heisst, dem höchsten Zeiger der Ableitungen gleich ist, den vollständigen Ausdruck für y erhält. Der Fall in (44.) ist ein Beispiel für diese Methode.

Dieselbe erstreckt sich aber noch weiter. Man kann auch den vollständigen Werth von y finden, welcher der Gleichung

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} \ldots = X,$$

genugthut, wenn X eine beliebige Function von x ist.

Da diese Methode eine der nützlichsten in diesem Theile der Analysis ist, so glaube ich sie hier mit wenigen Worten vortragen zu müssen.

54.

Die gegebene Gleichung sey z. B. von der dritten Ordnung. Es ist leicht zu sehen, dass die Methode allgemein für jede Ordnung gilt. Es sey also

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} = X.$$

p, q, r sollen drei verschiedene besondere Werthe von y in x sein, [*Im Original steht, durch einen nicht angezeigten Druckfehler, „de y et x" statt „de y en x"*], welche der Gleichung

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^2} = 0,$$

genugthun, so, dass

$$Ap + B\frac{dp}{dx} + C\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{d^3p}{dx^3} = 0,$$

$$Aq + B\frac{dq}{dx} + C\frac{d^2q}{dx^2} + \frac{d^3q}{dx^3} = 0,$$

$$Ar + B\frac{dr}{dx} + C\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{d^3r}{dx^3} = 0.$$

Man setze $y = ap + bq + cr$, und betrachte a, b, c als drei unbekannte Functionen von x, auf deren Bestimmung es ankommt. Man nehme die erste, zweite und dritte Ableitung von y, so erhält man, erstlich

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} + c\frac{dr}{dx} + p\frac{da}{dx} + q\frac{db}{dx} + r\frac{dc}{dx}.$$

Man setze $p\frac{da}{dx} + q\frac{db}{dx} + r\frac{dc}{dx} = 0$, [*dieses geht an, weil a, b, c unbestimmte Grössen sind,*] so, dass blos

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} + c\frac{dr}{dx},$$

übrig bleibt. Nimmt man hiervon, zweitens, von Neuem die Ableitung, so erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{d^2p}{dx^2} + b\frac{d^2q}{dx^2} + c\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{dp}{dx}\cdot\frac{da}{dx} + \frac{dq}{dx}\cdot\frac{db}{dx} + \frac{dr}{dx}\cdot\frac{dc}{dx}.$$

Man setze wieder $\frac{dp}{dx}\cdot\frac{da}{dx} + \frac{dq}{dx}\cdot\frac{db}{dx} + \frac{db}{dx}\cdot\frac{dc}{dx}$

$= 0$, [*dieses geht wieder an; denn, da drei unbestimmte Grösson a, b, c vorhanden sind, so können, ausser der gegebenen Gleichung, noch zwei Gleichungen zur Bestimmung von a, b, c willkürlich angenommen werden,*] so dass blos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{d^2p}{dx^2} + b\frac{d^2q}{dx^2} + c\frac{d^2r}{dx^2},$$

übrig bleibt. Nimmt man hiervon, drittens, noch einmal die Ableitung, so erhält man

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a\frac{d^3p}{dx^3} + b\frac{d^3q}{dx^3} + c\frac{d^3r}{dx^3} + \frac{d^2p}{dx^2}\cdot\frac{da}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2}\cdot\frac{db}{dx} + \frac{d^2r}{dx^2}\cdot\frac{dc}{dx}.$$

Substituirt man nun diese Werthe von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ in die gegebene Gleichung [*welches giebt*

$$\begin{aligned}&A(ap + bq + cr)\\ &+B\left(a\frac{dp}{dx} + b\frac{dq}{dx} + c\frac{dr}{dx}\right)\\ &+C\left(a\frac{d^2p}{dx^2} + b\frac{d^2q}{dx^2} + c\frac{d^2r}{dx^2}\right)\\ &+ \quad a\frac{d^3p}{dx^3} + b\frac{d^3q}{dx^3} + c\frac{d^3r}{dx^3} +\\ &\frac{d^2p}{dx^2}\cdot\frac{da}{dx} + \frac{d^2q}{dx^2}\cdot\frac{db}{dx} + \frac{d^2r}{dx^2}\cdot\frac{dc}{dx} = X].\end{aligned}$$

so ist klar, dass sich, vermöge der Art der Grössen p, q, r, die Glieder welche a, b, c enthalten, aufheben müssen. [*Weil die Werthe p, q, r, für y gesetzt, der Gleichung* $Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2}$

$+\frac{d^3y}{dx^3}=0$, *vorausgesetztermaassen, genugthun, und also einzeln*

$$Ap+B\frac{dp}{dx}+C\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^3p}{dx^3}=0,$$

$$Aq+B\frac{dq}{dx}+C\frac{d^2q}{dx^2}+\frac{d^3q}{dx^3}=0,$$

$$Ar+B\frac{dr}{dx}+C\frac{d^2r}{dx^2}+\frac{d^3r}{dx^3}=0,$$

ist, welches, wenn man die erste dieser Gleichungen mit a, die zweite mit b, die dritte mit c multiplicirt und die Producte von der obigen Gleichung abzieht,

$$\frac{d^2p}{dx^2}\cdot\frac{da}{dx}+\frac{d^2q}{dx^2}\cdot\frac{db}{dx}+\frac{d^2r}{dx^2}\cdot\frac{dc}{dx}=X,$$

giebt.] Es bleibt also nur die Gleichung

$$\frac{da}{dx}\cdot\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{db}{dx}\cdot\frac{d^2q}{dx^2}+\frac{dc}{dx}\cdot\frac{d^2r}{dx^2}=X,$$

übrig, welche, mit den beiden willkürlich angenommenen Gleichungen

$$p\frac{da}{dx}+q\frac{db}{dx}+r\frac{dc}{dx}=0 \text{ und}$$

$$\frac{dp}{dx}\cdot\frac{da}{dx}+\frac{dq}{dx}\cdot\frac{db}{dx}+\frac{dr}{dx}\cdot\frac{dc}{dx}=0,$$

verbunden, zur Bestimmung der Grössen $\frac{da}{dx}$, $\frac{db}{dx}$ und $\frac{dc}{dx}$ dient, während die Grössen p, q, r, und ihre ersten und zweiten Ableitungen, so wie die Grösse X, bekannt sind.

Man setze nun, es sey $\frac{da}{dx}=P$, $\frac{db}{dx}=Q$,

$\frac{dc}{dx} = R$ gefunden worden, so sind nunmehr P, Q, R bekannte Functionen von x. Man darf selbige nur als erste Ableitungen betrachten und dazu die Stammgrössen suchen, welche jede eine willkürliche Constante enthalten können, die hinzukommt. Man findet alsdann die Werthe der unbekannten Grössen a, b, c, die man nun in den Ausdruck für y [$y = ap + bq + cr$] substituiren kann.

55.

Wenn die Gleichung nur von der ersten Ordnung ist, so ist nur ein einzelner Werth p [*von* y] nöthig, welchen man immer finden kann. Man hat alsdann die Gleichung $Ap + \frac{dp}{dx} = 0$, [*nemlich, nach der Analogie der obigen Gleichung vom 3ten Grade* $Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} = 0$] welcher der Ausdruck $p = e^{-M}$ entspricht, wenn M die Stammgrösse von A ist, so dass $\frac{dM}{dx} = A$. Denn nimmt man die erste Ableitung, so erhält man [*aus* $p = e^{-M}$]

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{dM}{dx}\, e^{-M} = -Ap.$$

Für Gleichungen höherer Ordnung giebt es kein allgemeines Mittel, die Werthe von p, q, r.... zu finden, in so fern nicht etwa die Coefficienten A, B, C.... constant sind. Im letzten Falle sind sie leicht zu finden; denn alsdann darf man nur $p = e^{mx}$ setzen, wo m eine unbestimmte Constante ist. Dieses giebt

$$\frac{dp}{dx} = me^{mx}, \quad \frac{d^2p}{dx^2} = m^2 e^{mx} \text{ etc.}$$

Die Gleichung $Ap + B\frac{dp}{dx} + C\frac{d^2p}{dx^2} + D\frac{d^3p}{dx^3} \ldots = 0$ geht also in

[$Ae^{mx} + Bme^{mx} + Cm^2 e^{mx} + Dm^3 e^{mx} \ldots = 0$, *oder in*]

$$A + Bm + Cm^2 + Dm^3 \ldots = 0,$$

über, welche Gleichung, allgemein gesprochen, von dem nemlichen Grade ist, wie die gegebene. Sie hat also so viel Wurzeln, wie die Ordnungszahl Einheiten. Bezeichnet man diese Wurzeln durch $m, n \ldots$, so erhält man

$$p = e^{mx}, \quad q = e^{nx} \ldots$$

so dass also, in diesem Fall, die Schwierigkeit auf eine Gleichungs-Auflösung gebracht ist. [*Bei dieser Gelegenheit ist sichtbar, wie die Ideen und Darstellungen Lagrange's in demselben Maasse klarer und eindringender sind, je weniger der Verfasser mit Vorhandenem gleichsam belasstet ist, je unbetretener der Weg ist, den er wandelt und je allgemeiner der Gesichts-Kreis ist, den der Gegenstand zulässt. Die Fähigkeit, das Abstractere mit derselben Leichtigkeit zu behandeln, wie das Besondere und Anschauliche, ist dem Verfasser in hohem Grade eigen.*]

56.

Man kann zuweilen Gleichungen, die nicht lineär sind, durch Substitutionen lineär machen. Da diese Umformung sehr nützlich ist, so mögen zwei sehr

ausgedehnte Fälle, in welchen sie Statt findet, hier stehen.

Der erste ist der der Gleichung

$$y = xf\frac{dy}{dx} + F\frac{dy}{dx},$$

welcher allgemeiner ist, als der obige (54.). Man setze $\frac{dy}{dx} = z$, so dass $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, oder $y = xfz + Fz$ und nehme die erste Ableitung, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = z = x\frac{dz}{dx}.\frac{dfz}{dz} + fz + \frac{dz}{dx}.\frac{dFz}{dz}$$

welches eine Gleichung der ersten Ordnung zwischen x und z ist, in welcher z als eine Function von x betrachtet wird.

Nun betrachte man, umgekehrt, x als Function von z, so muss $1 : \frac{dx}{dz}$ an die Stelle von $\frac{dz}{dx}$ gesetzt werden (50.), welches die Gleichung

$$x\frac{dfz}{dz} + (fz - z)\frac{dx}{dz} + \frac{dFz}{dz} = 0.$$

giebt, die, wie man sieht, von der ersten Ordnung, und nach x lineär ist. [*Nemlich die Substitution giebt*

$$z = x\frac{1}{\frac{dx}{dz}}.\frac{dfz}{dz} + fz + \frac{1}{\frac{dx}{dz}}.\frac{dFz}{dz}, \text{ oder}$$

$$(z - fz)\frac{dx}{dz} = x\frac{dfz}{dz} + \frac{dFz}{dz}, \text{ oder } x\frac{dfz}{dz}$$

$$+ (fz - z)\frac{dx}{dz} + \frac{dFz}{dz} = 0,$$

welche Gleichung nach x *lineär ist, weil sie nur*

x und $\frac{dx}{dz}$ als Factoren enthält. Die übrigen Grössen $\frac{dfz}{dz}$, $\frac{dFz}{dz}$ und fz enthalten nur z, kein x.] Man kann also dazu, nach der obigen Methode, die Stammgleichung in x und z finden. Eliminirt man zwischen ihr und der] gegebenen Gleichung $y = xfz + Fz$, die Grösse z, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche die Stammgleichung der gegebenen ist.

Der zweite Fall ist der der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + My^2 + N = 0,$$

wo M und N Functionen von x sind. [*Ein einzelner Fall dieser Gleichung ist die Riccatische.*]

Hier setze man $y = \frac{\frac{dz}{dx}}{Mz}$, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} : Mz - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 : Mz^2 - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dM}{dx} : M^2z.$$

Man substituire diese Werthe [*von y und* $\frac{dy}{dx}$], in die gegebene Gleichung [$\frac{dy}{dx} + My^2 + N = 0$, *so erhält man*

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{Mz} - \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{Mz^2} - \frac{\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dM}{dx}}{M^2z} + M \cdot \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{M^2z^2} + N = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{Mz} - \frac{\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dM}{dx}}{M^2z} + N = 0.]$$

Dieses giebt, wenn man mit Mz multiplicirt,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dM}{dx}}{M} + N = 0,$$

welche Gleichung, wie man sieht, von der zweiten Ordnung, aber nach z lineär ist.

Nun setze man, es wären zwei einzelne Werthe von y in x, nemlich ohne Constanten, gefunden worden. Sie mögen p und q sein, so hat man, für den Werth p, $p = \frac{dz}{dp} : Mz$, woraus folgt $z = e^P$, wenn P die Stammgrösse von pM bezeichnet. [*Nemlich aus* $p = \frac{dz}{dp} : Mz$, *folgt* $pM = \frac{dz}{dp} : z$, *oder* $\frac{dP}{dx} = \frac{dz}{dp} : z$ *(weil P die Stammgrösse von pM sein soll). Von dieser Gleichung ist die Stammgleichung* $P = \overset{e}{log}\, z$, *also* $P \log e = \overset{e}{log}\, z$, *oder* $\log e^P = \overset{e}{log}\, z$, *oder* $e^P = z$. *Die Constante kommt nachher in Rechnung*]. Auf dieselbe Weise erhält man für den Werth q von y, $z = e^Q$, wo Q die Stammgrösse von qM bedeutet. Hat man also zwei einzelne Werthe von z, so ist der vollständige Werth dieser Grösse, nach (53.)

$$z = ae^P + be^Q,$$

wo a und b ganz willkürliche Constanten sind. Da also nun $y = \frac{dz}{dx} : Mz$ und $\frac{dP}{dx} = pM$, $\frac{dQ}{dx} = qM$, [*folglich* $\frac{dz}{dx} = a\frac{dP}{dx} e^P + b\frac{dQ}{dx} e^Q = ape^P + bqe^Q$], so erhält man für den vollständigen Werth von y:

$$y = \frac{ape^P + bqe^Q}{ae^P + be^Q},$$

oder, wenn man statt $\frac{b}{a}$, c schreibt, [*und oben und unten durch* ae^P *dividirt*]

$$y = \frac{p + cqe^{Q-P}}{1 + ce^{Q-P}},$$

wo c eine willkürliche Constante ist.

Wenn z. B. $N = -mM$, [*also* $\frac{dy}{dx} + My^2 - mM = 0$], wo m eine Constante ist, so wird die gegebene Gleichung, wie leicht zu sehen, erfüllt, wenn man $y = \sqrt{m}$ setzt. [*Denn alsdann ist* $\frac{dy}{dx} = 0$ *und folglich* $0 + Mm - mM = 0$.] Man erhält also, wegen der Zweideutigkeit der Zeichen,

$$p = \sqrt{m} \text{ und } q = -\sqrt{m}.$$

Ist also L die Stammgrösse von M, so ist

$$P = L\sqrt{m} \text{ und } Q = -L\sqrt{m},$$

[*denn* P *und* Q *waren die Stammgrössen von* $pM = M\sqrt{m}$ *und* $qcM = -M\sqrt{m}$] also ist der vollständige Werth von y:

$$y = \frac{(1 - ce^{-2L\sqrt{m}})\sqrt{m}}{1 + ce^{-2L\sqrt{m}}}.$$

Uebrigens kann die gegebene Gleichung, in diesem Fall, auf die Form

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y^2 - m} + M = 0,$$

gebracht werden, wo die Grössen x und y abgeson-

dert sind, und wovon also die Stammgleichung, wie oben gezeigt, gefunden werden kann.

57.

Ist die gegebene Gleichung nach $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ nicht lineär und auch unter der obigen Form nicht enthalten, so kenne ich keine allgemeine Methode, die einzelnen Werthe von y, die man gefunden haben könnte, zu vervollständigen. Die Vervollständigung ist indessen durch Reihen möglich.

Man setze, der vollständige Werthe von y, für eine Gleichung erster Ordnung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, sey $f(x, a)$, wo a eine willkürliche Constante ist. Giebt man dem a einen besondern Werth h, so wird die Grösse $f(x, a)$ zu einem einzelnen Werthe von y, welcher p heissen soll und welcher, auf irgend einem Wege, als bekannt angenommen wird. Man setze $a = h + k$ und entwickele die Grösse $f(x, h+k)$ nach steigenden Potenzen von k, so ist das erste Glied $= f(x, h) = p$; die anderen Glieder sind von der Form $qk + rk^2 \ldots$, wo q, $r \ldots$ Functionen von x bedeuten. Setzt man diesen Ausdruck von y [*weil nemlich* $f(x, h+k) = f(x, a) = y$ *ist*], in die gegebene Gleichung erster Ordnung, so muss dieselbe, unabhängig von der Constante k, die willkürlich ist, erfüllt werden.

Es sey also $\frac{dy}{dx} = F(xy)$ die Gleichung der ersten Ordnung, welcher der einzelne Werth p von y genugthut, so ist, vermöge dessen,

$$\frac{dp}{dx} = F(x, p).$$

Man setze für y die Reihe $p + kq + k^2 r \ldots.$ und entwickele auch die Function Fxy in eine Reihe nach Potenzen von k, so erhält man, wenn man, der Kürze wegen, $Fxp = \omega$ und $kq + k^2 r + \ldots. = \varepsilon$ setzt, nach der obigen Theorie der Entwickelung der Functionen,

$$Fxy = \omega + \varepsilon \frac{d\omega}{dp} + \frac{z^2}{2} \frac{d^2 \omega}{dp^2} \ldots.$$

[*denn es ist* $Fxy = F(x, p + kq + k^2 r \ldots.)$ $= F(x, p + \varepsilon)$]. Nun ist auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} + k \frac{dq}{dx} + k^2 \frac{dr}{dx} \ldots.$$

Substituirt man diese Ausdrücke [*für* $\frac{dy}{dx}$ *und* Fxy] in die Gleichung $\frac{dy}{dx} = Fxy$, [*so erhält man*

$$\frac{dp}{dx} + k\frac{dq}{dx} + k^2\frac{dr}{dx} \ldots. = \omega + \varepsilon \frac{d\omega}{dp} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d^2 \omega}{dp^2} \ldots.$$

$$= Fxp + (kq + k^2 r \ldots.) \frac{dFxp}{dp}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(kq + k^2 r \ldots)^2 \frac{d^2 Fxp}{dp^2} \ldots \Big]$$

Ordnet man die Glieder nach Potenzen von k, so erhält man, weil $Fxp = \frac{dp}{dx}$ ist,

$$k\frac{dq}{dx} + k^2 \frac{dr}{dx} \ldots = kq\frac{dFxp}{dp} + k^2 \left(r\frac{dFxp}{dp} + \frac{q^2}{2} \frac{d^2 Fxp}{dp^2} \right) \ldots$$

welches, durch Vergleichung der Glieder mit gleichen Potenzen von k, folgende Gleichung giebt

$$\frac{dq}{dx} =$$

$$\frac{dq}{dx} = q \frac{dFxp}{dp}, \frac{dr}{dx} = r \frac{dFxp}{dp} + \tfrac{1}{2} q^2 \frac{d^2Fxp}{dp} \ldots\ldots$$

die zur Bestimmung aller der unbekannten Grössen $q, r \ldots.$ dienen.

Da die Grössen $\frac{dFxp}{dp}, \frac{d^2Fxp}{dp^2} \ldots.$ gegebene Functionen von x sind, so ist klar, dass man für p, $q, r \ldots.$ nur lineäre Gleichungen der ersten Ordnung erhält, die nach (55.) behandelt werden können. Es sind selbst nicht einmal die vollständigen Werthe von $q, r \ldots.$, sondern nur beliebige Werthe nöthig, die den Bedingungs-Gleichungen genug thun.

Hat man die Werthe der Grössen $q, r, s \ldots.$ gefunden, so ist der vollständige Werth von y:

$$y = p + kq + k^2 r \ldots.,$$

in welchem k die willkürliche Constante ist, die dem besonderen Werthe p von y mangelte. Dieser Werth von y ist zwar, auf diese Weise, nur durch eine Reihe gefunden, aber die Convergenz der Reihe hängt blos von dem Werthe der Constante k ab.

Diese Methode ist auch, mit gehöriger Ausdehnung, auf Gleichungen höherer Ordnung anwendbar, aber die Gleichungen, welche man zur Bestimmung der unbekannten Functionen findet, sind von gleichem Grade; folglich kann man im Allgemeinen die Werthe dieser Functionen nur dann finden, wenn die Coefficienten constant sind.

Die Methode dient der Auflösung der vorzüglichsten Aufgaben in der Theorie der Planeten zur Grundlage. Da die Excentricitäten und Neigungen, die als willkürliche Constanten betrachtet werden können, sehr klein sind und die Wirkung der An-

ziehungen auch sehr klein ist, so giebt zunächst der Kreis die besonderen Werthe, die man dann durch Reihen complctirt, welche nach den Potenzen der sehr kleinen Constanten fortschreiten.

Neunter Abschnitt.

Von den singulairen Ausdrücken, die nicht in den vollständigen Stammgleichungen mit begriffen sind. Von den singulairen Stammgleichungen.

58.

Die obige Methode, Stammgleichungen mittelst Reihen zu finden, ist auf die Voraussetzung gegründet, dass jede Function Fxy von zwei veränderlichen Grössen x, y, durch die Substitution von $p + kq + k^2 r \ldots$ statt y, immer in eine Reihe nach Potenzen der Grösse k von ganzen positiven Exponenten entwickelt werden kann; da indessen die Reihe durch die Entwickelung einer Function von $y + \varepsilon$ entsteht, wenn $qk + rk^2 \ldots = \varepsilon$ heisst, [*nemlich, weil vermöge der gegebenen Ableitungs-Gleichung zwischen x und y, die Grösse x auch als abhängig von y, folglich Fxy ganz als Function von y betrachtet werden können,*] so folgt aus der Theorie des fünften Abschnitts, dass diese Entwickelung, wenn man der Grösse y einen besondern Werth p

beilegt, auch Potenzen von ε mit gebrochenen oder negativen Exponenten enthalten kann, in welchem Fall die entwickelte Reihe nothwendig ähnliche Potenzen von k enthalten muss. In diesem Falle kann aber die Reihe, welche den Werth von y ausdrücken soll, nicht mehr die nemliche Gestalt haben. Setzt man in $y = f(x, a)$ [*fx, a ist der entwickelte Werth von y*], $a = h + k$ und $p = f(x, h)$, so ist das erste Glied immer p: auch das zweite kann noch $= qk$ gesetzt werden; denn wäre es wirklich von der Form qk^n, wo n ein beliebiger Exponent ist, so dürfte man nur $k^{\frac{1}{n}}$ statt k setzen und annehmen, dass a in $h + k^{\frac{1}{n}}$ übergehe, welches erlaubt ist, weil man k als eine unabhängige Constante betrachtet. [*Dieses nemlich würde statt qk^n, $q\left(k^{\frac{1}{n}}\right)^n = qk$ geben.*] Die folgenden Glieder aber können die Form $rk^n + sk^n \ldots$ haben, wo, nach der Voraussetzung, $m > 1$, $n > m$.

Substituirt man also für y, in Fxy, die Reihe $p + qk + rk^m + sk^n \ldots$ und entwickelt den entstehenden Ausdruck nach steigenden Potenzen von k, so erhält man eine Reihe von der Form

$$[Fxy =]\ Fx, p + Pk^\mu + Qk^\nu \ldots$$

wo μ von der Einheit verschieden, $\nu > \mu$ ist und P, $Q \ldots$ gegebene Functionen von x sind. Die Gleichung $\frac{dy}{dx} = Fxy$ giebt also, wenn man substituirt:

$$k\frac{dq}{dx} + k^m\frac{dr}{dx} + k^n\frac{ds}{dx} \ldots = Pk^\mu + Qk^\nu \ldots$$

welche Gleichung unabhängig von k erfüllt werden

muss. [*Denn da* $y = p + kq + k^m r + k^n s \ldots,$ *so ist* $\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} + k\frac{dq}{dx} + k^m \frac{dr}{dx} \ldots$ *Nun war auch* $Fx, y = \frac{dy}{dx} = Fx, p + Pk^\mu + Qk^\nu \ldots$ *und* Fx, p *ist der Werth von* Fx, y *für* $k = 0$, *also gleich* $fx, h = p$; *mithin ist auch* $\frac{dy}{dx} = p + Pk^\mu + Qk^\nu \ldots$, *folglich ist*

$$p + Pk^\mu + Qk^\nu \ldots = p + k\frac{dq}{dx} + k^m \frac{dr}{dx} + k^n \frac{ds}{dx} \ldots,$$

oder

$$k\frac{dq}{dx} + k^m \frac{dr}{dx} + k^n \frac{ds}{dx} \ldots = Pk^\mu + Qk^\nu \ldots]$$

Ist also $\mu > 1$, so kann man $\frac{dq}{dx} = 0$, $m = \mu$ und $\frac{dr}{dx} = P$, *ferner* $n = \nu$, $\frac{ds}{dx} = Q$ setzen. [*Denn dividirt man mit* k, *so erhält man*

$$\frac{dy}{dx} + k^{m-1}\frac{dr}{dx} + k^{n-1}\frac{ds}{dx} \ldots = Pk^{\mu-1} + Qk^{\nu-1} \ldots,$$

woraus, weil $\mu > 1$, $\nu > \mu$ *und* k *von der obigen Grösse unabhängig ist, zunächst* $\frac{dq}{dx} = 0$, *und wenn nicht* P, Q, *Null sind*, $m = \mu$ *und* $\frac{dr}{dx} = P$, *auch eben so* $\nu = n'$, $\frac{ds}{dx} = Q$ *u. s. w. folgt.*] Man erhält also zunächst $q =$ einer Constante, oder einfacher, $q = 1$ [*weil* $\frac{dq}{dx} = 0$]. Sodann darf man, weil P nur von q und x abhängt, um den Werth von r zu finden, nur die Stammgrösse zu P nehmen u. s. w.

59.

Ist aber $\mu < 1$, so ist es unmöglich der Gleichung zu genügen, so lange k eine unbestimmte Constante sein soll. [*Weil die Gleichung in diesem Falle von der Form* $\frac{dq}{dx} + k^{m-1}\frac{dr}{dx} + k^{n-1}\frac{ds}{dx} = \frac{P}{k^\lambda} + \frac{Q}{k^\varsigma} \ldots$ *ist, in welcher k nicht jeden beliebigen Werth erhalten kann, namentlich nicht den Werth* 0, *und folglich von den übrigen Grössen nicht unabhängig sein kann.*] Es folgt also, dass der besondere Werth von p, weil er dann auf diesem Wege nicht completirt werden kann, in dem allgemeinen Ausdruck fx, a des vollständigen Werths von y nicht enthalten sein kann.

Nun ist klar, dass, welches auch das erste Glied Pk^μ der Entwickelung von Fxy, nach der Substitution von $p + kq + k^m r \ldots$ statt y, sein mag, nur Glieder von der Form $p + kq$ vorkommen können, so dass es einerlei ist, ob man $p + kq + k^m r \ldots$, oder blos $p + kq$ statt y setzt. Die Entwickelung von Fxy nach der Substitution von $p + \varepsilon$ statt y, giebt also $Fxp + \frac{P\varepsilon^\mu}{q^\mu}$. [*Denn wenn* $p + \varepsilon = p + kq$, *so ist* $\varepsilon = kq$, *folglich* $k = \frac{\varepsilon}{q}$ *und* $k^\mu = \frac{\varepsilon^\mu}{q^\mu}$]. Da in dieser Reihe ein Glied mit ε^μ vorkommt, wo $\mu > 0$ und < 1 [*nach der Voraussetzung* $\mu < 1$], so folgt aus der Theorie von (29.)

dass die erste Ableitung von Fxy nach y, für $y = p$, unendlich ist. [*Denn für* $y = p$ *ist* $k = 0$, *also* $\varepsilon = 0$, *folglich, weil die Ableitung* ε *in den Nenner bringt, die erste Ableitung von* $Fxy = \infty$, *für* $y = p$.]

Hieraus folgt, dass der besondere Werth p von y in dem vollständigen Ausdruck dieser Grösse nicht enthalten ist, sobald $y = p$ die erste Ableitung von Fxy, nach y, unendlich macht, das heisst, sobald $1 : \frac{dFxy}{dy} = 0$ ist.

Umgekehrt also giebt die Gleichung $1 : \frac{dFxy}{dy} = 0$ diejenigen Werthe von y, welche, obgleich sie den Gleichungen $\frac{dy}{dx} = Fxy$, als besondere Werthe, entsprechen, in dem allgemeinen Werthe nicht enthalten sind. Man kann diese Werthe **singulaire Werthe** nennen, um sie von den übrigen zu unterscheiden. Ueberhaupt also kann man **singulaire Stammgleichung** jede Gleichung zwischen x und y nennen, die einer Gleichung erster Ordnung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, oder einer Gleichung höherer Ordnung entspricht, ohne in der vollständigen Stammgleichung enthalten, das heisst, ohne ein besonderer Fall der vollständigen Stammgleichung zu sein.

60.

Es giebt also Gleichungen, die gegebenen Ableitungs-Gleichungen höherer Ordnung genugthun können, ohne den Stammgleichungen dieser letzten zu ent-

sprechen, weil sie in den vollständigen Ableitungs-Gleichungen niedriger Ordnung nicht enthalten sind. Diese Gleichungen machen indessen von der allgemeinen Theorie (46.) keine Ausnahme. Sie entstehen vielmehr aus einer eigenthümlichen Art der Entwickelung der höheren Ableitungs-Gleichungen durch die Elimination der Constanten. Nemlich: zwei Gleichungen $Fxy = 0$ und $\frac{dFxy}{dx} = 0$ geben, wie dort [46.] gezeigt, durch die Elimination einer Constante a, eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, von welcher $Fxy = 0$ die Stammgleichung ist. Nun aber ist klar, dass das Resultat der Elimination das Nemliche ist, die Grösse a mag constant, oder eine Function von x sein. In diesem letzten Fall aber würde die erste Ableitung von Fxy nicht mehr blos $\frac{dFxy}{dx}$ sein, sondern zugleich noch ein, von der Veränderung von a herrührendes, Glied enthalten, welches $\frac{da}{dx} \cdot \frac{dFxy}{da}$ ist. [*Diese letzte Stelle ist, wegen der veränderten Zeichen nicht wörtlich übersetzt, denn das Zeichen drückt hier schon aus, was im Original die Worte sagen.*] In dem Fall also, wenn a eine Function von x ist, erhält man $\frac{dFxy}{dx} + \frac{da}{dx} \cdot \frac{dFxy}{da} = 0$, für die erste Ableitung der Gleichung $Fxy = 0$. Damit sich nun diese Gleichung auf $\frac{dFxy}{dx} = 0$ reducire, wie in dem Fall, wenn a constant ist, muss

$\frac{dFxy}{da} = 0$ sein, welche Gleichung zur Bestimmung des Werths von a dient. Es folgt also, dass man, wenn man diese Werthe von a in die Stammgleichung von $Fxy = 0$ substituirt, eine Gleichung zwischen x und y erhält, die ebenfalls der ersten Ableitungs-Gleichung genugthut, ohne in der Stammgleichung, deren willkürliche Constante a ist, enthalten zu sein. [*Diese Stelle setzt die Existenz der singulairen Gleichungen schon mehr ins Licht.*]

Die nemliche Theorie lässt sich auf Gleichungen höherer Ordnungen anwenden, und es folgen daraus ähnliche Schlüsse.

61.

Um nun zu sehen, ob die auf diesem Wege entstehende Gleichung die nemliche ist, wie die aus der obigen folgende Stammgleichung, setze man, wie oben, in (58.), dass die erste Ableitungs-Gleichung auf die Gestalt $\frac{dy}{dx} = Fxy$ gebracht, und dass ihre vollständige Stammgleichung $y = fx, a$ sey, wo a die willkürliche Constante ist. Um hieraus die Stammgleichung, in welcher a veränderlich ist, zu finden, nehme man die erste abgeleitete Gleichung nach a allein. Bezeichnet man durch $\varphi x, a$ die erste Ableitung, von fx, a nach a, [*so dass also* $\varphi x, a = \frac{dfx, a}{da}$] so ist $\varphi x a = 0$, [*denn es ist* $\frac{dfx, a}{dx} = \frac{dy}{dx} = Fxy$, *wenn* a *constant, und* $\frac{dfx, a}{dx} + \frac{dfx, a}{da} \cdot \frac{da}{dx} = \frac{dy}{dx}$

$= Fxy$, *wenn* a *veränderlich ist. Zieht man Eins vom Andern ab, so erhält man* $\frac{dfx,a}{dx} \cdot \frac{da}{dx} = 0$, *und daraus* $\frac{dfx,a}{da} = \varphi x a = 0$,] woraus der Werth von a folgt, den man in fxa substituiren kann, und wodurch man den singulairen Werth von y erhält, der der gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung genugthut. Wir wollen diesen singulairen Werth, wie oben, p nennen.

Da nun aber der vollständige Werth fx, a von y der Gleichung $\frac{dy}{dx} = Fxy$ genugthun soll, was auch a ist, so folgt, dass wenn man substituirt, die entstehende Gleichung $\frac{dfx,a}{dx} = F(x, fx, a)$ [*nemlich* fx, a *für* y, *gesetzt*,] Statt haben muss, was auch a sey. Folglich muss auch die erste abgeleitete Gleichung davon, wenn man a allein als veränderlich betrachtet, ebenfalls Statt finden, was auch a sey. (17.) Diese erste abgeleitete Gleichung von $\frac{dfx, a}{dx}$ nach a, ist $\frac{d^2 fx, a}{dx\, da}$ und es ist, wie wir weiter unten zeigen werden, einerlei, ob man erst die Ableitung nach x und dann nach a, oder erst nach a und dann nach x nimmt. [*Diese Stelle konnte, wegen der anderen Zeichen, wieder nicht wörtlich übersetzt werden.*] Da wir nun $\frac{dfx, a}{da}$ durch $\varphi x, a$ bezeichnet haben, so ist $\frac{d\varphi x, a}{dx} = \frac{d^2 fx, a}{da\, dx}$. [*Wenn man das Original vergleichen will, so wird man*

finden, dass selbst schon die alten Zeichen eine Menge Worte ersparen.]

Da die Function $F(xfx, a)$ durch die Substitution von fx, a statt y in Fx, y entsteht, so kann $\frac{dFxy}{da}$ durch $\frac{dFxy}{dy} . \varphi x, a$ ausgedrückt werden. [*Denn* $\frac{dFxy}{da}$ *ist gleich* $\frac{dFxy}{dy} . \frac{dy}{da} = \frac{dFxy}{dy} . \frac{dfx, a}{da}$ $= \frac{dFxy}{dy} . \varphi x, a.$] Die erste Ableitung der Gleichung $\frac{dfx, a}{dx} \left[= \frac{dy}{dx} \right] = Fxy$, nach a, ist also

$$\left[\frac{d^2 fx, a}{dx\, da} = \right] \frac{d\varphi x, a}{dx} = \frac{dFxy}{dy} . \varphi x, a,$$

woraus folgt:

$$\frac{dFy}{dy} = \frac{d\varphi x, a}{dx} : \varphi x, a.$$

Nun haben wir gefunden, dass man, um den singulairen Werth p [*von* y] zu haben, den Werth von a aus der Gleichung $\varphi x, a = 0$ in fx, a substituiren muss. Man bezeichne diesen Werth von a durch X, welches also eine Function von x bedeutet, so wird die Function $\varphi x, a$ von der Form

$$\varphi x, a = V(X - a)^m$$

sein, wo $m > 0$ und V eine Function von x ist, die für $a = X$ weder Null noch unendlich gross ist. [*Nemlich* $a = X$ *giebt, in dem angenommenen Ausdruck* $\varphi x, a = V(X - a)^m$, *wie es soll,* $\varphi x, a = 0$. *Indessen ist die willkürliche Form wohl nur eine einzelne von den vielen möglichen; denn man könnte z. B. auch setzen:* $\varphi x, a = V \cos \frac{X\pi}{2a}$, *wel-*

ches, für $X = a$, *ebenfalls* $\varphi x, a = 0$ *giebt etc.*]
Daraus folgt:

$$\frac{d\varphi x, a}{dx} = \frac{dV}{dx}(X-a)^m + mV\frac{dX}{dx}(X-a)^{m-1},$$

also erhält man [*wenn man Dieses in die obige Gleichung* $\frac{dFy}{dy} = \frac{d\varphi x, a}{dx} : \varphi a$ *substituirt*]

$$\frac{dFy}{dy} = \frac{dV}{dx} : V + m\frac{dX}{dx} : (X-a).$$

Nun aber ist $y = p$, für $a = X$; also ist $\frac{dFy}{dy}$ unendlich gross für $y = p$, wie in (59.). Die beiden Methoden von (58 und 60.) geben also einerlei Resultate und einerlei singulaire Werthe, die zweite hat aber den Vorzug, dass sie directer ist, und den wahren Grund des Paradoxons zeigt. [*Allerdings. Die erste Methode und der Inhalt dieses 61. §. sind aber noch etwas undeutlich und verwickelt. Man findet weiterhin eine bessere Darstellung dieses Gegenstandes.*]

62.

Man setze, um ein Beispiel zu geben, die Stammgleichung sey

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0.$$

Nimmt man die erste Ableitung, so erhält man

$$x - a\frac{dy}{dx} = 0.$$

Eliminirt man, zwischen dieser Gleichung und der Stammgleichung, a, so erhält man die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$x-[-y-\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}]\frac{dy}{dx}=0.$$

[*Denn aus der Stammgleichung folgt* $a^2+2ay+b^2-x^2=0$, *also* $a=-y\pm\sqrt{(y^2-b^2+x^2)}$ *welches in die abgeleitete* $x-a\frac{dy}{dx}=0$ *gesetzt,* $x-[-y-\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}]\frac{dy}{dx}=0$ *giebt.*]

Von dieser Gleichung ist also die gegebene, die vollständige Stammgleichung, wenn a eine willkürliche Constante bedeutet.

Nimmt man nun von der nemlichen Gleichung $x^2-2ay-a^2-b^2=0$ die erste Ableitung nach a, indem man a als Function von x betrachtet, so erhält man

$$-2(y+a)\frac{da}{dx}=0,$$

welches $y+a=0$ und $a=-y$ giebt.

Substituirt man Dieses in die nemliche Stammgleichung, so erhält man

$$x^2+y^2-b^2=0.$$

[*nemlich* $x^2+2y.y-y^2-b^2=x^2+y^2-b^2=0$].

Diese Gleichung thut daher der nemlichen Gleichung erster Ordnung genug, wie sich leicht zeigen lässt. Denn sie giebt

$$y^2=b^2-x^2 \text{ und } y\frac{dy}{dx}=-x.$$

Substituirt man diesen Werth in die Grösse

$$x+y\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}\sqrt{(x^2+y^2-b^2)},$$

[*die durch die Elimination von a zwischen der Stammgleichung und ihrer abgeleiteten entstand,*]

so wird dieselbe identisch Null. Die Gleichung ist also die singulaire Stammgleichung.

In der That ist, nach (61.), in dem gegenwärtigen Falle

$$Fxy = \frac{x}{-y + \sqrt{(x^2+y^2-b^2)}} \text{ und } p = \sqrt{(b^2-x^2)}.$$

[*Das Erste folgt aus der Gleichung* $x - [-y - \sqrt{(x^2+y^2-b^2)}]\frac{dy}{dx} = 0$, *die durch die Elimination von a zwischen der Stammgleichung und ihrer ersten abgeleiteten entstand; denn sie giebt* $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{-y+\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}}$, *und da* $Fxy = \frac{dy}{dx}$ *ist, so ist* $Fxy = \frac{x}{-y+\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}}$. *Das Andere folgt aus der gefundenen singulairen Stammgleichung* $x^2+y^2-b^2 = 0$. *Sie giebt* $y^2 = b^2 - x^2$, *und da, für den Fall der singulairen Stammgleichung,* $y = p$ *ist, so ist* $p = \sqrt{(b^2-x^2)}$]. Nimmt man also die erste Ableitung nach y allein, so findet man

$$\frac{dFxy}{dy} = \frac{x}{[-y+\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}]\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}}.$$

[*Denn es sey* $\sqrt{(x^2+y^2-b^2)} = \lambda$, *so ist* $Fxy = \frac{x}{\lambda - y}$, *also* $\frac{dFxy}{dy} = -\frac{x\left(\frac{d\lambda}{dy} - y\right)}{(\lambda-y)^2}$. *Aber* $\frac{d\lambda}{dy} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}}$, *also* $\frac{d\lambda}{dy} - 1 = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}} - 1 = \frac{y}{\lambda} - y = \frac{y-\lambda}{\lambda}$, *folglich*

$$\frac{dFxy}{dy} = -\frac{x.\frac{y-\lambda}{\lambda}}{(\lambda-y)^2} = \frac{x}{\lambda(\lambda-y)}$$

$$= \frac{x}{[-y+\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}]\sqrt{(x^2+y^2-b^2)}},]$$

welche Grösse, wie man sieht, für $y=p=\sqrt{(b^2-x^2)}$ unendlich gross ist.

63.

Nun setze man, dass die Ableitungs-Gleichung der ersten Ordnung $\frac{dy}{dx}=Fy$ gegeben, und dass die Function Fy von y von der Art sey, dass sie verschwindet, wenn y irgend einer Constante b gleich ist, so ist klar, dass dieser Werth von y der Gleichung genugthun wird. Denn $y=b$ giebt auch $\frac{dy}{dx}=0$. Es ist nun die Frage, ob y blos ein, in dem allgemeinen Ausdruck von y enthaltener, besonderer, oder ein singulairer Werth von y sey. Man nehme die erste Ableitung von Fy, so ist b ein singulairer Werth von y, wenn $\frac{dFy}{dx}$ unendlich gross ist: im entgegengesetzten Fall nur ein besonderer Werth.

Es sey $Fy=K(y-b)^m$, wo $m>0$ und K eine Constante ist, so erhält man

$$\frac{dFy}{dx}=mK(y-b)^{m-1},$$

welche Grösse [*für* $y=b$] unendlich gross ist, sobald $m<1$. Der Werth b ist also ein singulairer Werth von y, wenn $m>0$ und <1, und ein blos

particulairer Werth, wenn $m =$ oder > 1. Denn, dividirt man die Gleichung $\frac{dy}{dx} = K(y-b)^m$ durch $(y-b)^m$ und bringt den Quotienten auf die Form $(y-b)^{-m}\frac{dy}{dx} - K = 0$, so ist die Stammgleichung davon:

$$\frac{(y-b)^{1-m}}{1-m} - Kx = a,$$

wo a eine willkürliche Constante ist. Daraus folgt

$$y = b + [(m-1)(a+Kx)]^{\frac{1}{1-m}}.$$

Damit also $y = b$ sein kann, muss die Grösse $(a+Kx)^{\frac{1}{1-m}}$ Null sein. Wenn aber $m > 0$ und < 1, so ist der Exponent $\frac{1}{1-m}$ positiv, folglich ist es unmöglich, der Grösse a einen Werth zu geben, welcher die Grösse $a + Kx$ verschwinden macht. Ist aber $m > 1$, so ist der Exponent $\frac{1}{1-m}$ negativ, und die Grösse $(a+Kx)^{\frac{1}{1-m}}$ ist Null, für a Unendlich. Denn, macht man $a = \frac{1}{c}$, so geht die Grösse $(a+Kx)^{\frac{1}{1-m}}$ in $\frac{c^{\frac{1}{m-1}}}{1+Kcx^{\frac{1}{m-1}}}$ über, [*Es ist nemlich* $(a+Kx)^{\frac{1}{1-m}} = a^{\frac{1}{1-m}}\left(1+Kx.\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{1-m}}$

$$= \frac{1}{c^{\frac{1}{1-m}}} (1 + Kxc)^{\frac{1}{1-m}} = \frac{c^{\frac{1}{m-1}}}{1 + Kxc^{\frac{1}{m-1}}} \Big],$$

welches Null ist, für $c = 0$.

Eben das ist der Fall für $m = 1$. Alsdann enthält die Stammgleichung, Logarithmen oder Exponential-Grössen. Denn, dann ist

$$\frac{dy}{dx} = K(y - b),$$

und wenn man durch $y - b$ dividirt,

$$\frac{dy}{dx} : (y - b) - K = 0,$$

wovon die Stammgleichung $\overset{e}{log}(y-b) - Kx = \overset{e}{log}\, a$ ist, und woraus folgt $y = b + ae^{Kx}$, wenn a die willkürliche Constante bedeutet. Hier ist offenbar $y = b$, für $a = 0$.

Man setze noch $Fy = \sqrt{Y}$, wo Y eine Function von y ist, die Null wird für $y = 1$, so erhält man

$$\frac{dFy}{dx} = \frac{dY}{dx} : 2\sqrt{Y};$$

also ist $\frac{dFy}{dx}$ unendlich gross, weil Y Null für $y = b$ ist, im Fall nicht etwa $\frac{dY}{dx}$ zugleich verschwindet, und der Werth $y = b$ ist nur ein singulairer Werth. Damit also dieser Werth blos particulair sey, muss $\frac{dY}{dx}$, für $y = b$, mit Y zugleich, Null sein.

Diese Theorie der singulairen Stammgleichungen, findet man auf eine allgemeinere Weise, und mit neuen

Details

Details in der 14. 15. 16 und 17. Vorlesung über die Functionen-Rechnung entwickelt, auf welche wir die Leser verweisen, welche diesen Gegenstand weiter ergründen wollen. [*Alle die obigen Particularitäten erläutern den Gegenstand wenig und lassen ihn noch so dunkel, dass man sogar an der Existenz der singulairen Stammgleichungen gezweifelt hat. In den angezeigten Vorlesungen wird die Theorie der singulairen Stammgleichungen deutlicher.*]

Zehnter Abschnitt.

Vom Gebrauch der Ableitungen in der Analysis und von Bestimmung der willkürlichen Constanten. Anwendung auf die Summirung der Reihen und die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

64.

Aus dem, was wir über die willkürlichen Constanten gefunden haben, sieht man, dass diese Constanten zur Verbindung der Stammgleichungen mit ihren abgeleiteten Gleichungen dienen. Letztere sind im Ganzen einfacher als erstere, wegen der Constanten, die verschwanden, oder verschwinden können. Sie entsprechen allen Stammgleichungen, die um nichts weiter als den Werth dieser Constanten von einander verschieden sind.

Man kann also immer von einer, als Stammgleichung angenommenen Gleichung, zu ihrer abgeleiteten irgend einer Ordnung, und umgekehrt, von dieser zu jener übergehen, in so fern man nur bei der Zurückleitung die willkürlichen Constanten einführt und ihre Werthe, der Stammgleichung angemessen, bestimmt, wie wir davon in (49. etc.) Beispiele gegeben haben. Beobachtet man Dieses, so kann man, in der Analysis, mit den Functionen eben so operiren, wie mit einfachen Grössen in der Algebra.

Hat man also eine Gleichung zwischen x und y so kann man daraus unmittelbar die abgeleitete Gleichung irgend einer Ordnung finden; aber, um von dieser zu der Gleichung zwischen x und y zurück zu gelangen, müssen die willkürlichen Constanten in Rechnung gebracht und so bestimmt werden, dass die Werthe von y und dessen Ableitungen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.... für einen gegebenen Werth von x, z. B. für $x = 0$ die nemlichen sind, wie die, welche aus der gegebenen Gleichung folgen.

Ist die gegebene Gleichung nur von der ersten Ordnung in x, y, $\frac{dy}{dx}$, so würden die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.... in x und y, weil aus der gegebenen Gleichung nur diese gefunden werden können, für $x = 0$, noch das unbestimmte y enthalten, folglich würden die willkürlichen Constanten von diesem y, welches selbst eine willkürliche Constante ist, abhängen, so dass sich alle willkürliche Constanten auf eine einzige reducirten. Sie würden sich auf zwei

reduciren, wenn die gegebene Gleichung von der zweiten Ordnung wäre, oder $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ enthielte u. s. w.

65.

Um die Eigenthümlichkeit und den Gebrauch dieser Operationen deutlicher zu zeigen, wollen wir einige Beispiele geben, die zugleich zur Uebung in der Rechnung dienen können.

Es werde die Summe der Reihe

$$1 + \frac{m}{n}x + \frac{m.m+1}{n.n+1}x^2 + \frac{m.m+1.m+2}{n.n+1.n+2}x^3 \ldots$$

verlangt.

Man setze diese Reihe $= y$, so erhält man dadurch eine Gleichung zwischen x und y. Man multiplicire selbige mit x^{n-1}, so erhält man

$$yx^{n-1} = x^{n-1} + \frac{m}{n}x^n + \frac{m.m+1}{n.n+1}x^{n+1} \ldots$$

Nun nehme man von allen Gliedern die ersten Ableitungen, so erhält man

$$\frac{dy}{dx}.x^{n-1} + (n-1)yx^{n-2} = (n-1)x^{n-2} + mx^{n-1}$$

$$+ \frac{m.m+1}{n}x^n + \frac{m.m+1.m+2}{n.n+1}x^{n+1} \ldots$$

wo ein Factor in den Nennern der verschiedenen Glieder verschwunden ist.

Man multiplicire die Gleichung mit x^{m-n}, so erhält man

$$\frac{dy}{dx}x^{m-1} + n-1.yx^{m-2} = (n-1)x^{m-2} + mx^{m-1}$$

$$+\frac{m.m+1}{n}x^m+\frac{m.m+1.m+2}{n.n+1}x^{m+1}\ldots.$$

Man bezeichne das erste Glied durch $\frac{dp}{dx}$ und nehme die Stammgleichung, so erhält man

$$p=\frac{n-1}{m-1}x^{m-1}+x^m+\frac{m}{n}x^{m+1}+\frac{m.m+1}{n.n+1}x^{m+2}\ldots.$$

Ich füge keine Constante hinzu, weil sie in p mit einbegriffen sein kann.

Vergleicht man nun diese neue Reihe mit der gegebenen, die gleich y gesetzt wurde, so ist leicht zu sehen, dass

$$p=\frac{n-1}{m-1}x^{m-1}+x^m y.$$

Man nehme hiervon die erste Ableitung und setze für $\frac{dp}{dx}$ seinen obigen Werth $\frac{dy}{dx}x^{m-1}+(n-1)yx^{m-2}$, so erhält man folgende, nach y lineäre, Gleichung der ersten Ordnung:

$$(n-1)x^{m-2}+x^m\frac{dy}{dx}+mx^{m-1}y=\frac{dy}{dx}x^{m-1}+(n-1)yx^{m-2},$$

welche Gleichung sich auf die Gestalt

$$\frac{dy}{dx}+\frac{n-1-mx}{x(1-x)}y=\frac{n-1}{x(1-x)},$$

bringen lässt. [*Nemlich es ist* $\frac{dy}{dx}(x^m-x^{m-1})$ $=-((n-1)x^{m-2}+mx^{m-1})y-(n-1)x^{m-2}$, *folglich, wenn man durch* $x^{m-1}(1-x)$ *dividirt*:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{n-1-mx}{x(1-x)}=\frac{n-1}{x(1-x)}.]$$

Mit dieser Gleichung kann man nach (55.) verfah-

ren und folglich den Werth von y in x finden, der dann die Summe der gegebenen Reihe ist. Die willkürliche Constante, welche dieser Werth enthalten muss, findet sich daraus, dass $y = 1$ für $x = 0$ ist, wie es die gegebene Reihe verlangt.

Enthielte die Reihe blos einfache Factoren, wie

$$1 + \frac{m}{n}x + \frac{m+1}{n+1}x^2 + \frac{m+2}{n+2}x^3 \ldots,$$

so würde man auf dem nemlichen Wege

$$p = \frac{n-1}{m-1}x^{m-1} + x^m + x^{m+1} + x^{m+2} \ldots$$

erhalten. [*Denn* $y = 1 + \frac{m}{n}x + \frac{m+1}{n+1}x^2 + \frac{m+2}{n+2}x^3 \ldots$, *giebt* $yx^{n-1} = x^{n-1} + \frac{m}{n}x^n + \frac{m+1}{n+1}x^{n+1} + \frac{m+2}{n+2}x^{n+2} \ldots$, *also* $\frac{dy}{dx}x^{n-1} + y \,.\, \overline{n-1}\, x^{n-2} = (n-1)x^{n-2} + mx^{n-1} + (m+1)x^n + (m+2)x^{n+2} \ldots$ *und, wenn man mit* x^{m-n} *multiplicirt,* $\frac{dy}{dx}x^{m-1} + y \,.\, \overline{n-1} \,.\, x^{m-2} = \frac{dp}{dx} = (n-1)x^{m-2} + mx^{m-1} + (m+1)x^m + (m+2)x^{m+2}$; *also, wenn man die Stammgleichung nimmt,*

$$p = \frac{n-1}{m-1}x^{m-1} + x^m + x^{m+1} + x^{m+2} \ldots]$$

Bekanntlich ist aber $1 + x + x^2 \ldots = \frac{1}{1-x}$ [*nemlich, wenn die Reihe ohne Ende fortläuft*] also ist

$$p = \frac{n-1}{m-1}x^{m-1} + \frac{x^m}{1-x}.$$

Nimmt man hiervon die erste Ableitung und substituirt den obigen Werth von $\frac{dp}{dx}$, so erhält man

$$\frac{dy}{dx}x^{m-1}+(n-1)yx^{m-2}=(n-1)x^{m-2}+\frac{mx^{m-1}}{1-x}$$

$$+\frac{x^m}{(1-x)^2},\text{ oder}$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{(n-1)y}{x}=\frac{n-1}{x}+\frac{m}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^2},$$

welche Gleichung ebenfalls von der ersten Ordnung und lineär ist.

Die Methode lässt sich auf mehr zusammengesetzte Reihen anwenden, und kann lineäre Gleichungen höherer Ordnung geben. Ich glaubte ihrer erwähnen zu müssen, da sie beinahe die einzige allgemeine Methode für die Summation der Reihen ist.

66.

Es sey ferner die Gleichung

$$y=Ax+Bx^2+x^3,$$

gegeben, aus welcher der Ausdruck von x in y verlangt wird. Derselbe kann, wie bekannt, durch die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades gefunden werden. Allein man kann ihn auch durch die Functionen-Theorie finden, wie folgt.

Nimmt man nemlich die erste und zweite Ableitung, so erhält man

$$\frac{dy}{dx}=A+2Bx+3x^2 \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2}=2B+6x.$$

Setzt man nun eine Grösse von der Form

$$y + (m + nx)\frac{dy}{dx} + (p + qx + rx^2)\frac{d^2y}{dx^2}$$

zusammen, wo m, n, p, q, r willkürliche Coefficienten sind, so hat man eine viergliedrige Grösse, welche die Potenzen x, x^2 und x^3 enthält und kann die Glieder, welche diese Potenzen enthalten, einzeln Null setzen. [*Was übrig bleibt und kein x enthält, heisse C.*] Man erhält auf die Weise die Gleichung zweiter Ordnung

$$y + (m + nx)\frac{dy}{dx} + (p + qx + rx^2)\frac{d^2y}{dx^2} = C.$$

wo C eine Constante ist. Diese Gleichung enthält noch zwei unbestimmte Coefficienten. [*Denn drei von den 5 Coefficienten m, n, p, q, r sind schon durch das Gleich-Null setzen der drei Glieder mit x, x^2, x^3 bestimmt.*]

Man kann also machen, dass die Gleichung, wenn man sie mit $2\frac{dy}{dx}$ multiplicirt, eine Stammgleichung hat. Denn zu dem Ende darf man nur $q = 2m$, $r = n$ setzen, so erhält man die Stammgleichung

$$y^2 + (p + 2mx + nx^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2Cy + a.$$

[*Denn, wenn man mit $2\frac{dy}{dx}$ multiplicirt, und $q = 2m$, $r = n$ setzt, so erhält man*

$$y\frac{dy}{dx} + (m + nx)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (p + 2mx + nx^2)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx} = C\frac{dy}{dx}.$$

Davon ist die Stammgleichung

$$y^2 + (p + 2mx + nx^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2Cy + a,$$

wie leicht zu sehen, wenn man von dieser Stammgleichung wieder die erste abgeleitete nimmt]. Die Grösse a ist constant und erhält ihren Werth für $x = 0$, wenn man die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$, aus der gegebenen Gleichung setzt. Dieses giebt $y = 0$, $\frac{dY}{dx} = A$. Substituirt man Dieses in die zuletzt gefundene Gleichung, so erhält man $a = pA^2$. [*Nemlich weil* $y = 0$, *und* $\frac{dy}{dx} = A$ *ist, für* $x = 0$.]

Man erhält also folgende Gleichung der ersten Ordnung in y

$$y^2 + (p + 2mx + nx^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2Cy + pA^2,$$

wo x nur auf den zweiten Grad steigt. Ohne diesen Umstand würde man zur Bestimmung von x durch y Nichts gewonnen haben.

Ehe man aber weiter geht, muss der Bedingung genug gethan werden, dass die Grösse $y + (m + nx)\frac{dy}{dx} + (p + 2mx + nx^2)\frac{d^2y}{dx^2}$, nach der Substitution der Werthe von y, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, blos einer Constante gleich sein soll. Diese Substitution giebt

$$\begin{aligned}&Ax + Bx^2 + x^3\\ &+ (A + 2Bx + 3x^2)(m + nx)\\ &+ (2B + 6x)(p + 2mx + nx^2).\end{aligned}$$

Entwickelt und ordnet man die Glieder nach

Potenzen von x und setzt C dem Gliede ohne x gleich, so erhält man

$$mA + 2pB = C,$$
$$(1+n)A + 6mB + 6p = 0,$$
$$(1+4n)B + 15m = 0,$$
$$1 + 9n = 0,$$

woraus folgt:

$$n = -\frac{1}{9},\ m = -\frac{B}{27},\ p = \frac{B^2 - 4A}{27} \text{ und } C = \frac{2B^3 - 9AB}{27}.$$

Der Kürze wegen behalte man die Grössen p und C bei, und setze blos die Werthe von m und n in die obige Gleichung, so erhält man, wenn man daraus $\frac{dy}{dx}$ nimmt,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^2)}}{\sqrt{(9p - \frac{2}{3}Bx - x^2)}}.$$

Hiervon muss nun die Stammgleichung zwischen x und y gesucht werden. Um aber die unmöglichen Grössen zu vermeiden, muss man die beiden Fälle unterscheiden, wenn die Wurzelgrössen reell, und wenn sie imaginair sind. Denn, weil jeder reelle Werth von x, reelle Werthe für y und $\frac{dy}{dx}$ giebt, so müssen nothwendig die beiden Wurzelgrössen der obigen Gleichung zugleich reell oder imaginair sein.

Man setze also, erstlich: $\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^2)}$ sey eine reelle Grösse, so muss $pA^2 + C^2 > (y-C)^2$ sein, also kann man setzen

$$y - C = \sin z \sqrt{(pA^2 + C^2)}.$$

Dieses giebt

$$\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^2)} = \cos z \sqrt{(pA^2 + C^2)}.$$

[*Denn, quadrirt man beides und addirt, so erhält man*

$$(y-C)^2 + pA^2 + 2Cy - y^2 = (\sin z^2 + \cos z^2)(pA^2 + C^2)$$
$$= pA^2 + C^2,$$

welches identisch ist; denn der erste Theil der Gleichung giebt $y^2 - 2Cy + C^2 + pA^2 + 2Cy - y^2 = pA^2 + C^2$, *wie der zweite.*] Nimmt man die erste Ableitung, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(pA^2 + C^2)}\, \frac{dz}{dx} \cos z.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die vorige Gleichung und dividirt mit 3, so erhält man

$$(9p - \tfrac{2}{3}Bx - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}\frac{dz}{dx},$$

wovon die Stammgleichung

$$x + \tfrac{1}{3}B = \sin(\tfrac{1}{3}z + \alpha)\sqrt{(9p + \tfrac{1}{9}B^2)},$$

und wo α eine Constante ist, die aus der gegebenen Gleichung dadurch bestimmt werden muss, dass $x = 0$ ist für $y = 0$. [*Dass Dieses die Stammgleichung sey, davon kann man sich am bequemsten überzeugen, wenn man rückwärts wieder die Ableitung nimmt. Dieses giebt*

$$1 = \tfrac{1}{3}\frac{dz}{dx}\cos(\tfrac{1}{3}z + \alpha)\sqrt{(9p + \tfrac{1}{9}B^2)}, \text{ oder}$$

$$3 : \frac{dz}{dx} = \cos(\tfrac{1}{3}z + \alpha)\sqrt{(9p + \tfrac{1}{9}B^2)}.$$

Quadrirt man in dieser und in der Stammgleichung auf beiden Seiten, und rechnet die Quadrate zusammen, so erhält man, weil $\sin\tfrac{2}{3}(z+\alpha)^2 + \cos(\tfrac{1}{3}z + \alpha)^2 = 1$,

$$x^2 + \tfrac{2}{3}xB + \tfrac{1}{9}B^2 + 9 : \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 9p + \tfrac{1}{9}B^2,$$

oder

$$9:\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 9p - \tfrac{2}{3}Bx - x^2, \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{3}\frac{dz}{dx} = (9p - \tfrac{2}{3}Bx - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

welches die Ableitungs-Gleichung war.] Es sey $z = a$ für $y = 0$, so erhält man die beiden Gleichungen

$$-C = \sin a\sqrt{(pA^2 + C^2)} \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{3}B = \sin(\tfrac{1}{3}a + \alpha)\sqrt{(9p + \tfrac{1}{9}B^2)},$$

woraus sich a und hernach α finden lässt. Hierauf lässt sich z durch die Gleichung

$$\sin z = \frac{y - C}{\sqrt{(pA^2 + C^2)}}$$

bestimmen, und endlich erhält man

$$x = -\tfrac{1}{3}B + \sin(\tfrac{1}{3}z + \alpha)\sqrt{\left(9p + \frac{B^2}{9}\right)}.$$

Und da der Sinus von z auch dem, um einen oder zwei Umfänge vermehrten, Bogen z entspricht, so erhält man 3 Werthe für x, wenn man z die drei Werthe z, $z + 2\pi$ und $z + 4\pi$ giebt, wo 2π den Umfang bezeichnet.

Dieser Fall ist der sogenannte irreductible, in welchem die drei Wurzeln reell sind.

Man setze, zweitens, die Wurzelgrösse $\sqrt{(pA^2 + 2Cy - y^2)}$ sey imaginair, so darf man nur Zähler und Nenner des Ausdrucks von $\frac{dy}{dx}$ mit $\sqrt{-1}$ multipliciren, welches giebt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sqrt{(-pA^2 - 2Cy + y^2)}}{\sqrt{(-9p + \tfrac{2}{3}Bx + x^2)}},$$

welche Grösse reell ist.

Setzt man hier

$$\tfrac{1}{3}B + x + \sqrt{(-9p + \tfrac{2}{3}Bx + x^2)} = X \text{ und}$$
$$-C + y + \sqrt{(-pA^2 - 2Cy + y^2)} = Y,$$

und nimmt die erste Ableitung, wobei immer y als Function von x betrachtet wird, so erhält man

$$\frac{dX}{dx} = X(-9p + \tfrac{2}{3}Bx + x^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ und}$$

$$\frac{dY}{dx} = Y\frac{dy}{dx}(-pA^2 - 2Cy + y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

[*Denn es ist* $\dfrac{dX}{dx} = 1 + \dfrac{\frac{1}{3}B + x}{\sqrt{(-9p + \frac{2}{3}Bx + x^2)}}$

$$= \frac{\sqrt{(-9p + \frac{2}{3}Bx + x^2)} + \frac{1}{3}B + x}{\sqrt{(-9p + \frac{2}{3}Bx + x^2)}} =$$

$$X(-9p + \tfrac{2}{3}Bx + x^2)^{-\frac{1}{2}}, \textit{ und}$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{y - 2C}{\sqrt{(-pA^2 - 2Cy + y^2)}} \cdot \frac{dy}{dx}, \textit{ oder}$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{\sqrt{(-pA^2 - 2Cy + y^2)} + y - 2C}{\sqrt{(-pA^2 - 2Cy + y^2)}}\right),$$

oder

$$\frac{dY}{dx} = Y\frac{dy}{dx}(-pA^2 - 2Cy + y^2)^{-\frac{1}{2}}].$$

Die obige Gleichung lässt sich also auf die Gestalt

$$\frac{dX}{dx} : X = \frac{dY}{dx} : 3Y \text{ bringen.}$$

[*Nemlich, die beiden obigen Gleichungen geben*

$$\frac{dX}{dx} : X = (-9p + \tfrac{2}{3}Bx + x^2)^{-\frac{1}{2}} \textit{ und}$$

$$\frac{dY}{dx} : 3Y = \tfrac{1}{3}\frac{dy}{dx}(-pA^2 - 2Cy + y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nun war $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\sqrt{-(pA^2 - 2Cy + y^2)}}{\sqrt{(-9p + \frac{2}{3}Bx + x^2)}}$, *also ist*

$$\tfrac{1}{3}\cdot\frac{dy}{dx}(-pA^2-2Cy+y^2)^{-\frac{1}{2}}=(-9p+\tfrac{2}{3}Bx+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

und folglich $\frac{dX}{dx}:X=\frac{dY}{dx}:3Y.$] Die Stammgleichung hiervon ist $\log X=\frac{1}{3}\log Y+\log b$, $\log b$ die willkürliche Constante bedeutet. Geht m von den Logarithmen zu den Zahlen über, so ist

$$X=b\sqrt[3]{Y}.$$

Um b zu bestimmen, mache man wieder $x=0$ und $y=0$. Dadurch wird $X=\frac{1}{3}B+\sqrt{-9p}$ und $Y=-C+\sqrt{-pA^2}$, also erhält man

$$b=\frac{\frac{1}{3}B+\sqrt{-9p}}{\sqrt[3]{(-C+\sqrt{-pA^2})}}.$$

Da nun der Werth von X in x bekannt ist, so ist es leicht, daraus x zu finden. Denn, quadrirt man die Gleichung

$$X-\tfrac{1}{3}B-x=\sqrt{(-9p+\tfrac{2}{3}Bx+x^2)},$$

so erhält man

$$x=\frac{(X-\frac{1}{3}B)^2+9p}{2X},$$

folglich, wenn man für X den gefundenen Werth von y setzt, nemlich $b\sqrt[3]{Y}$,

$$x=\frac{(b\sqrt[3]{Y}-\frac{1}{3}B)^2+9p}{2b\sqrt[3]{Y}}.$$

Dieser Ausdruck kann, wie man sieht, nur einen einzigen reellen Werth von x geben. Der Fall ist derjenige, in welchem die Gleichung zwei imaginaire Wurzeln hat.

Setzt man $B=0$, so vereinfachen sich die gefundenen Formeln in beiden Fällen sehr und redu-

ciren sich auf die bekannten Ausdrücke der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades, ohne zweites Glied. Wir wollen nicht länger bei dieser Aufgabe verweilen, weil sie ganz der Algebra angehört und hier nur im Vorbeigehen, und um an verschiedenen Beispielen die Anwendungen des Functionen-Algorithmus zu zeigen, vorgetragen worden ist. [*Die obigen Ausdrücke zur Auflösung der Gleichungen dritten Grades, können bekanntlich leichter gefunden werden, indessen ist der Fall, als Beispiel der Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Grössen auf eine rein algebraischen Aufgabe, dass heisst, auf eine Aufgabe wo es darauf ankommt, den bestimmten Werth einer unbekannten Grösse zu finden, allerdings interessant.*]

Eilfter Abschnitt.

Von der Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, in welcher die veränderlichen Grössen gesondert sind, in welcher man aber direct die Stammgrösse jedes einzelnen Gliedes nicht finden kann. Merkwürdige Eigenschaften dieser Stammgrössen.

67.

Als letztes Beispiel wollen wir die Ableitungs-Gleichung der ersten Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}},$$

nehmen. Dividirt man mit der Wurzelgrösse, welche y enthält, so erhält man eine Gleichung, in welcher die veränderlichen Grössen abgesondert sind. Aber die Stammgleichung davon lässt sich nicht finden, weil die beiden Glieder einzeln nicht auf Ableitungen reducirt werden können.

Dagegen erreicht man den Zweck auf folgende Weise. Man setze zuförderst, x und y wären Functionen einer andern veränderlichen Grösse t, so muss man $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ statt $\frac{dy}{dx}$ setzen. (50.) [*Nemlich, weil jetzt* $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.] Ist nun x eine beliebige Function von t, so giebt die Gleichung für y eine unbestimmte Function von t. Also kann man setzen, dass x so von t abhänge, dass

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}.$$

[*Dieses ist nichts anders, als: man setzt t gleich der unbekannten Stammgrösse von*

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}}.]$$

Alsdann giebt die obige Gleichung, in welcher $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ statt $\frac{dy}{dx}$ gesetzt worden, eben so, $\frac{dy}{dt} = \sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}$. [*Denn, setzt man in* $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$, *die Werthe von* $\frac{dy}{dt}$ *und* $\frac{dx}{dt}$, *so erhält man die gegebene Gleichung.*]

Man quadrire die Gleichungen für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ und nehme dann die erste Ableitung [*nach t*], so erhält man, nachdem die erste durch $\frac{dx}{dt}$, die andere durch $\frac{dy}{dt}$ dividirt worden,

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 \text{ und}$$

$$2\frac{d^2y}{dt^2} = B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3.$$

[*Denn, wenn, der Kürze wegen,* $\sqrt{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4)} = Y$ *und* $\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + E^4)} = X$, *so dass die gegebene Gleichung* $\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$ *ist, so ist* $\frac{dx}{dt} = X$ *und* $\frac{dy}{dt} = Y$, *also*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dX}{dt} = \frac{B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3}{2X} \cdot \frac{dx}{dt}$$
$$= \tfrac{1}{2}(B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dY}{dt} = \frac{B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3}{2Y} \cdot \frac{dy}{dt}$$
$$= \tfrac{1}{2}(B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3).]$$

Man setze $x + y = p$ und $x - y = q$, so dass

$$x = \tfrac{1}{2}(p + q), y = \tfrac{1}{2}(p - q),$$

so geben die beiden obigen Gleichungen, addirt und subtrahirt,

$$\frac{d^2p}{dt^2} = p + Cp + \tfrac{3}{4}D(p^2 + q^2) + \tfrac{1}{2}E(p^3 + 3pq^2),$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = Cq + \tfrac{3}{2}Dpq + \tfrac{1}{2}E(3p^2q + q^3).$$

[*Nemlich* $\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{d^3x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = B + C(x + y)$

$+ \tfrac{3}{2}D$

$+\frac{3}{2}D(x^2+y^2)+2E(x^3+y^3)=B+Cp+\frac{3}{2}D[\frac{1}{4}(p+q)^2$
$+\frac{1}{4}(p-q)^2]+2E[\frac{1}{4}(p+q)^3+\frac{1}{4}(p-q)^3]=B+Cp$
$+\frac{3}{4}D(p^2+q^2)+\frac{1}{2}E(p^3+3pq^2)$ *und*

$$\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2y}{dt^2}=C(x-y)+\frac{3}{2}D(x^2-y^2)+2E(x^3-y^3)$$

$$=Cq+\frac{3}{2}Dpq+2E(\frac{1}{8}(p+q)^3-\frac{1}{8}(p-q)^3)$$
$$=Cq+\frac{3}{2}Dpq+\frac{1}{2}E(q^3+3p^2q).]$$

Da ferner $\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, [*weil* $\frac{dp}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}$ *und* $\frac{dq}{dt}=\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}$], so erhält man, wenn man die Werthe von $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ aus den obigen Gleichungen substituirt,

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=Bq+Cpq+\frac{1}{4}D(3p^2q+q^3)+\frac{1}{2}E(p^3q+pq^3).$$

[*Denn es ist* $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$

und $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4$,

also $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=B(x-y)+C(x^2-y^2)+D(x^3-y^3)+E(x^4-y^4)$

$$=Bq+Cpq+D(\frac{1}{8}(p+q)^3-\frac{1}{8}(p-q)^3)+E(\frac{1}{16}(p+q)^4-\frac{1}{16}(p-q)^4)$$
$$=Bp+Cpq+\frac{1}{4}D(3p^2q+q^3)+\frac{1}{2}E(p^3q+pq^3)].$$

Nun mache man die Combination

$$q\frac{d^2p}{dt^2}-\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=\frac{1}{2}Dq^3+Epq^3.$$

[*Nemlich*: $q\frac{d^2p}{dt^2}$ *ist gleich* $Bq + Cpq + \frac{3}{4}D(p^2q + q^3)$
$+ \frac{1}{2}E(p^3q + 3pq^3)$ *und*

$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}$ *ist gleich* $Bq + Cpq + \frac{1}{4}D(3p^3q + q^3)$
$+ \frac{1}{2}E(p^3q + pq^3)$,

also ist $q\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}Dq^3 + Epq^3$].

Man multiplicire die beiden Glieder mit $2\frac{dp}{dt} : q^3$, so sind sie die vollständigen Ableitungen von $\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 : q^2$ und von $Dp + Ep^2$. [*Denn die Ableitungen hiervon sind* $2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{d^2p}{dt^2} : q^2 - 2\left(\frac{dp}{dt}\right)^2\frac{dq}{dt} : q^3 = D\frac{dp}{dt} + 2Ep\frac{dp}{dt}$, *also, wenn man mit* $2\frac{dp}{dt}$ *dividirt und mit* q^3 *multiplicirt*, $q\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}Dq^3 + Epq^3$, *wie oben.*] Man hat also jetzt schon eine Stammgleichung erster Ordnung, nemlich

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 : q^2 = Dp + Ep^2 + a,$$

wo a die willkürliche Constante ist.

Um a zu bestimmen, sey m der Werth von y, für $x = 0$, so erhält man, für diesen Fall, vermöge der anfänglichen Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{A} \text{ und}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{(A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Em^4)},$$

welche letzte Grösse, der Kürze wegen, n heissen

soll. Da also nun $p = x + y$, $q = x - y$, $\frac{dp}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$, $\frac{dq}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$ war, so ist, für $x = 0$,

$$p = m,\ q = -m,\ \frac{dp}{dt} = n + \sqrt{A},\ \frac{dq}{dt} = -n + \sqrt{A}.$$

Substituirt man Dieses in die obige Gleichung $\left[\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 : q^2 = Dp + Ep^2 + a\right]$, so erhält man

$$a = \frac{(n + \sqrt{A})^2}{m^2} - Dm - Em^2,$$

welche Constante a unbestimmt bleibt, weil m unbestimmt ist; aber die vorigen Bestimmungen sind für den Fall nützlich, wenn man, durch andere Combinationen, neue Stammgleichungen mit willkürlichen Constanten fände.

Wir haben also jetzt die Gleichung

$$\frac{dp}{dt} = q\sqrt{(a + Dp + Ep^2)},$$

welche, obgleich von der ersten Ordnung, dennoch schon sogleich die Stammgleichung in x und y von der gegebenen Gleichung giebt, weil man den Werth von $\frac{dp}{dt}$, der $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$ ist, schon in x und y kennt. Man erhält also, wenn man die Werthe von p, q und $\frac{dp}{dt}$ substituirt,

$$\begin{aligned} &\sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)} \\ &+ \sqrt{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4)} \\ &= (x - y)\sqrt{[a + D(x + y) + E(x + y)^2]}, \end{aligned}$$

wo a die willkürliche Constante ist.

Diese Gleichung zwischen x und y ist, wie man sieht, recht einfach, und die Methode, durch welche wir sie gefunden haben, ist merkwürdig; aber die Gleichung ist nicht die einzige, welche man aus den gefundenen Formeln erhalten kann.

Denn, substituirt man den obigen Werth von $\frac{dp}{dt}$ in die weiter oben gefundene Gleichung für $\frac{dp}{dt} : \frac{dq}{dt}$, so erhält man

$$\frac{dq}{dt} = \frac{B + Cp + \frac{3}{4}D(3p^2 + q^2) + \frac{1}{2}E(p^3 + pq^2)}{\sqrt{(a + Dp + Ep^2)}}.$$

Setzt man hierin für p und q wieder ihre Werthe $x + y$ und $x - y$, und für $\frac{dq}{dt}$, seinen Werth
$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \sqrt{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)} - \sqrt{(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4)}$, so erhält man eine neue Gleichung zwischen x und y, mit der willkürlichen Constante a, die ebenfalls die Stammgleichung der gegebenen ist. Sie ist eine blosse Verwandlung der vorigen, [*wie es auch nothwendig sein muss*].

68.

Die gegebene Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, von welcher wir die Stammgleichung gefunden haben, kann durch passende Verwandlungen auf die Form

$$\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{(A + B\cos z)}}{\sqrt{(A + B\cos u)}},$$

gebracht werden, wo z eine Function von u ist.

[*Man sehe deshalb z. B.* Lacroix *traité du calcul diff. et int. tom. 2.* §. 697.] Da diese Gleichung, auf die nemliche Weise behandelt, einer einfacheren und eleganteren Analyse fähig ist, so, glaube ich, wird man dieselbe nicht ungern hier finden.

Man betrachte u und z als Functionen einer neuen veränderlichen Grösse t und, nachdem man, dem gemäss, $\frac{dz}{dt} : \frac{du}{dt}$ statt $\frac{dz}{du}$ substituirt hat (50.), setze man die beiden einzelnen Gleichungen

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{(A + B\cos u)} \text{ und } \frac{dz}{dt} = \sqrt{(A + B\cos z)}.$$

Man quadrire sie und nehme davon die erste Ableitung, so erhält man, wenn man die eine durch $\frac{du}{dt}$, die andere durch $\frac{dz}{dt}$ dividirt, die beiden Ableitungs-Gleichungen zweiter Ordnung,

$$2\frac{d^2u}{dt^2} = -B\sin u \text{ und } 2\frac{d^2z}{dt^2} = -B\sin z.$$

[*Es ist* $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{2}(A + B\cos u)^{-\frac{1}{2}} \times \left(-B\sin u \frac{du}{dt}\right)$, *welches, weil* $(A + B\cos u)^{\frac{1}{2}} = \frac{du}{dt}$ *ist*, $2\frac{d^2u}{dt^2} = -B\sin u$ *giebt. Eben so*, $2\frac{d^2z}{dt^2}$.] Nun sey $z + u = 2p$ und $z - u = 2q$, so geben die beiden obigen Gleichungen, addirt und subtrahirt, nach bekannten Formeln

$$2\frac{d^2p}{dt^2} = -B\sin p\cos q \text{ und } 2\frac{d^2q}{dt^2} = -B\cos p\sin q.$$

[*Denn*, $2\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{d^2u}{dt^2} = B(\sin u - \sin z)$

$= B(\sin(p-q) - \sin(p+q)) = - B \sin p \cos q.$

Aehnlicherweise $2\frac{d^2 q}{dt^2}$.]

Nun ist leicht zu sehen, dass, wenn man die beiden Gleichungen zusammen rechnet, nachdem man die erste mit $\frac{dq}{dt}$, die andere mit $\frac{dp}{dt}$ multiplicirt hat, das erste Glied die vollständige erste Ableitung von $2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}$, und das zweite Glied die vollständige erste Ableitung von $-B \sin p \sin q$ ist, so dass man die Stammgleichuug erster Ordnung,

$$2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt} = -B \sin p \sin q + a$$

erhält, wo a die willkürliche Constante ist. [*Die erste Ableitung davon ist* $2\frac{d^2 p}{dt^2}\cdot\frac{dq}{dt} + 2\frac{d^2 q}{dt^2}\cdot\frac{dp}{dt}$ $= -B \cos p \sin q \frac{dp}{dt} - B \sin p \cos q \frac{dq}{dt}$, *was man erhält, wenn man, wie oben gesagt, mit den beiden Gleichungen* $2\frac{d^2 p}{dt^2} = -B \sin p \cos q$ *und* $2\frac{d^2 q}{dt^2} = -B \cos p \sin q$ *verfährt.*]

Um die Constante a zu bestimmen, wollen wir $z = m$, für $u = 0$, setzen, so ist in diesem Fall

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{(A+B)},\ \frac{dz}{dt} = \sqrt{(A+B \cos m)},$$

$$p = q = \tfrac{1}{2} m,\quad \frac{dp}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt} + \frac{du}{dt}\right),$$

$$\frac{dq}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt} - \frac{u}{dt}\right),$$

folglich:

$$2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt} = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - \left(\frac{du}{dt}\right)^2\right]$$
$$= \tfrac{1}{2} B(\cos m - 1),$$

$$\sin p \sin q = \sin \tfrac{1}{2} m^2 = \tfrac{1}{2}(1 - \cos m), \text{ also}$$

$$a = 2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt} + B \sin p \sin q = 0.$$

Mithin ist blos

$$2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt} = -B \sin p \sin q.$$

Da diese Stammgleichung keine willkürliche Constante enthalt, so muss sie in den Gleichungen erster Ordnung zwischen z und u, von welchen wir ausgingen, enthalten sein. In der That geben diese Gleichungen, wenn man die Werthe von p und q substituirt,

$$2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt} = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - \left(\frac{du}{dt}\right)^2\right]$$
$$= \tfrac{1}{2} B(\cos z - \cos u) = -B \sin p \sin u.$$

[*Nemlich* $2p = z + u$ *und* $2q = z - u$ *giebt* $2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt} + \frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dt} - \frac{du}{dt}\right)$ $= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - \left(\frac{du}{dt}\right)^2\right)$, *und weil* $\frac{dz}{dt} = \sqrt{(A + B\cos z)}$ *und* $\frac{du}{dt} = \sqrt{(A + B\cos u)}$ *ist*,

$$2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt} = A + B\cos z - A - B\cos u$$
$$= B(\cos z - \cos u) = B(\cos(p+q) - \cos(p-q))$$
$$= -B \sin p \sin u.]$$

Man dividire nun mit dieser Ableitungs-Gleichung erster Ordnung die beiden obigen Gleichungen der zweiten Ordnung für p und q, [*nemlich die*

Gleichungen $2\frac{d^2 p}{dt^2} = - B \sin p \cos q$ *und* $2\frac{d^2 q}{dt^2} = - B \cos p \sin q$], so erhält man

$$\frac{d^2 p}{dt^2} : \frac{dp}{dt} . \frac{dq}{dt} = \frac{\cos q}{\sin q} \text{ und } \frac{d^2 q}{dt^2} : \frac{dp}{dt} . \frac{dq}{dt} = \frac{\cos p}{\sin p}.$$

Man multiplicire die erste mit $\frac{dq}{dt}$, die andere mit $\frac{dp}{dt}$, so sind, von den Resultaten, die Stammgleichungen

$$\overset{e}{\log} \frac{dp}{dt} = \overset{e}{\log} \sin q + \overset{e}{\log} a \text{ und}$$

$$\overset{e}{\log} \frac{dq}{dt} = \overset{e}{\log} \sin p + \overset{e}{\log} b.$$

[*Denn rückwärts die Ableitungen von diesen Stammgleichungen sind* $\frac{d^2 p}{dt^2} : \frac{dp}{dt} = \frac{\cos q}{\sin q} . \frac{dq}{dt}$ *und* $\frac{d^2 q}{dt^2} : \frac{dq}{dt} = \frac{\cos p}{\sin p} . \frac{dp}{dt}$, *welches mit dem Vorigen übereinstimmt.*] Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erhält man

$$\frac{dp}{dt} = a \sin q \text{ und } \frac{dq}{dt} = b \sin p,$$

wo a und b willkürliche Constanten sind, die sich, wie oben, bestimmen lassen. Man erhält [*auf eine ähnliche Weise, wie dort*]

$$a = \frac{\sqrt{(A + B \cos m)} + \sqrt{(A + B)}}{2 \sin \frac{1}{2} m},$$

$$b = \frac{\sqrt{(A + B \cos m)} - \sqrt{(A + B)}}{2 \sin \frac{1}{2} m}.$$

Die beiden gefundenen Gleichungen geben, jede, eine Stammgleichung zwischen u und z, wenn man die

Werthe von $p \left[= \frac{1}{2}(z+u)\right]$, $q \left[= \frac{1}{2}(z-u)\right]$, $\frac{dp}{dt} \left[= \frac{1}{2}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{2}\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{(A+B\cos z)} + \frac{1}{2}\sqrt{(A+B\cos u)}\right]$ und $\frac{dq}{dt} \left[= \frac{1}{2}\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2}\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{(A+B\cos z)} - \frac{1}{2}\sqrt{(A+B\cos u)}\right]$ substituirt. Man erhält

$$\sqrt{(A+B\cos z)} + \sqrt{(A+B\cos u)} = 2a\sin\tfrac{1}{2}(z-u)$$
$$\sqrt{(A+B\cos z)} - \sqrt{(A+B\cos u)} = 2b\sin\tfrac{1}{2}(z+u)$$

Da die Werthe von a und b die unbestimmte Grösse m enthalten, so können sie ebenfalls als unbestimmt angesehen werden. Man kann also in diesen beiden Gleichungen a und b als Constanten betrachten. Wollte man aber die beiden Gleichungen auf irgend eine Weise mit einander verbinden, so müsste man die obigen Ausdrücke für a und b gebrauchen. Dann wäre m allein die willkürliche Constante.

Da die beiden zuletzt gefundenen Gleichungen Wurzelgrössen enthalten, so wird es gut sein, aus den nemlichen Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dp}{dt} = a\sin q \text{ und } \frac{dq}{dt} = b\sin p,$$

noch eine andere Stammgleichung zu suchen. Dividirt man eine durch die andere, so erhält man $\frac{dp}{dt} : \frac{dq}{dt} = \frac{a\sin q}{b\sin p}$, und wenn man kreuzweise multiplicirt,

$$b\frac{dp}{dt}\sin p = a\frac{dq}{dt}\sin q.$$

[*Dieses folgt auch unmittelbar, weil* $b \sin p \,.\, a \sin q = a \sin q \,.\, b \sin p$ ist.] Hiervon ist die Stammgleichung

$$b \cos p = a \cos q + c,$$

[*wie leicht zu sehen, wenn man wieder die Ableitungen nimmt,*] c ist immer eine willkürliche Constante, die, wie oben, bestimmt werden muss. Setzt man $u = 0$ und $z = m$, so erhält man

$$p = q = \tfrac{1}{2} m,$$

also giebt die gefundene Gleichung

$$c = (b - a) \cos \tfrac{1}{2} m = - \frac{\sqrt{(A+B)} \cos \frac{1}{2} m}{\sin \frac{1}{2} m}.$$

Setzt man die Werthe von a, b, c und von $p = \frac{1}{2}(z+u)$ und $q = \frac{1}{2}(z-u)$ in die nemliche Gleichung und reducirt die Sinus und Cosinus, so erhält man folgenden sehr einfachen Ausdruck

$$\cos \tfrac{1}{2} z \,.\, \cos \tfrac{1}{2} u + \sin \tfrac{1}{2} z \,.\, \sin \tfrac{1}{2} u \,.\, \frac{\sqrt{(A + B \cos m)}}{\sqrt{(A+B)}} = \cos \tfrac{1}{2} m,$$

welcher die Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen u, z und $\frac{dz}{du}$ $\left[\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{(A + B \cos z)}}{\sqrt{(A + B \cos u)}}\right]$ ist. Der Winkel m ist hier die unbestimmte Constante. [*Nemlich, wenn man, in die gefundene Stammgleichung* $b \cos p = a \cos q + c$, *die gefundenen Werthe von* a, b, c, p *und* q *setzt, so erhält man*

$$\frac{\sqrt{(A + B \cos m)} - \sqrt{(A+B)}}{2 \sin \frac{1}{2} m} \cos \tfrac{1}{2}(z + u) =$$

$$\frac{\sqrt{(A + B \cos m)} + \sqrt{(A + B)}}{2 \sin \frac{1}{2} m} \cos \tfrac{1}{2}(z - u)$$

$$- \frac{\sqrt{(A+B)} \cos \frac{1}{2} m}{\sin \frac{1}{2} m},$$ *oder* $\sqrt{(A + B \cos m)} (\cos(z + u)$

$-\cos\frac{1}{2}(z-u)) = \sqrt{(A+B)}((\cos\frac{1}{2}(z+u)+\cos\frac{1}{2}(z-u))$
$-2\sqrt{(A+B)}\cos\frac{1}{2}m$, *oder* $-\sqrt{(A+B\cos m)}.2\sin\frac{1}{2}z$
$\sin\frac{1}{2}u = \sqrt{(A+B)}.2\cos\frac{1}{2}z\cos\frac{1}{2}u - 2\sqrt{(A+B)}\cos\frac{1}{2}m$,
oder

$$\cos\tfrac{1}{2}z\cos\tfrac{1}{2}u + \sin\tfrac{1}{2}z\sin\tfrac{1}{2}u\frac{\sqrt{(A+B\cos m)}}{\sqrt{(A+B)}} = \cos\tfrac{1}{2}m,$$

wie oben.]

69.

Man kann die Winkel $\frac{1}{2}z$, $\frac{1}{2}u$ und $\frac{1}{2}m$ als die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks betrachten. Alsdann ist die Grösse $\frac{\sqrt{(A+B\cos m)}}{\sqrt{(A+B)}}$, nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie [$\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos C = \cos\gamma$], der Cosinus des, zwischen den Seiten $\frac{1}{2}z$ und $\frac{1}{2}u$, der Seite $\frac{1}{2}m$ gegenüber liegenden Winkels. Diese Grösse ist der Werth von $\frac{dz}{du}$, für $u = 0$ und $z = m$. [*wie aus der gegebenen Ableitungs-Gleichung* $\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{(A+B\cos z)}}{\sqrt{(A+B\cos u)}}$ *leicht zu sehen.*] Also ist dieser Winkel constant, so wie die Seite $\frac{1}{2}m$; während die beiden andern Seiten sich verändern.

Der constante Winkel heisse M, so ist

$$\frac{\sqrt{(A+B\cos m)}}{\sqrt{(A+B)}} = \cos M,$$

woraus folgt

$$\frac{A}{B} = \frac{\cos M^2 - \cos m}{\sin M^2} = 2\left(\frac{\sin\frac{1}{2}m}{\sin M}\right)^2 - 1.$$

[*Nemlich,* $\frac{\sqrt{(A+B\cos m)}}{\sqrt{(A+B)}} = \cos M$ *giebt* $\frac{A}{B} + \cos m$

$= \cos M^2 \left(\frac{A}{B} + 1\right)$, oder $\frac{A}{B} \sin M^2 = \cos M^2 - \cos m = 1 - \sin M^2 - \cos \frac{1}{2} m^2 + \sin \frac{1}{2} m^2 = 2 \sin \frac{1}{2} m^2 - \sin M^2$, also

$$\frac{A}{B} = 2\left(\frac{\sin \frac{1}{2} m}{\sin M}\right)^2 - 1.]$$

Substituirt man Dieses in die gegebene Gleichung, zwischen u, z und $\frac{dz}{du}\left[\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{(A+B\cos z)}}{\sqrt{(A+B\cos u)}}\right]$ und schreibt, der Kürze wegen, μ statt $\frac{\sin M}{\sin \frac{1}{2} m}$, so erhält man

$$\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{(1-\mu^2 \sin \frac{1}{2} z^2)}}{\sqrt{(1-\mu^2 \sin \frac{1}{2} u^2)}}.$$

[*Denn die gegebene Gleichung giebt* $\frac{dz}{du} =$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{A}{B} + \cos z\right)}}{\sqrt{\left(\frac{A}{B} + \cos u\right)}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{A}{B} + \cos \frac{1}{2} z^2 - \sin \frac{1}{2} z^2\right)}}{\sqrt{\left(\frac{A}{B} + \cos \frac{1}{2} u^2 - \sin \frac{1}{2} u^2\right)}},$$

also, wenn man den Werth von $\frac{A}{B} = 2\left(\frac{\sin \frac{1}{2} m}{\sin M}\right)^2 - 1$

substituirt: $\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{\left(2\left(\frac{\sin \frac{1}{2} m}{\sin M}\right)^2 - 1 + \cos \frac{1}{2} z^2 - \sin \frac{1}{2} z^2\right)}}{\sqrt{\left(2\left(\frac{\sin \frac{1}{2} m}{\sin M}\right)^2 - 1 + \cos \frac{1}{2} u^2 - \sin \frac{1}{2} u^2\right)}}$

$$= \frac{\sqrt{\left(2\left(\frac{\sin \frac{1}{2} m}{\sin M}\right)^2 - 2 \sin \frac{1}{2} z^2\right)}}{\sqrt{\left(2\left(\frac{\sin \frac{1}{2} m}{\sin M}\right)^2 - 2 \sin \frac{1}{2} u^2\right)}} = \frac{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\sin M}{\sin \frac{1}{2} m}\right)^2 \sin \frac{1}{2} z^2\right)}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\sin M}{\sin \frac{1}{2} m}\right)^2 \sin \frac{1}{2} u^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1-\mu^2 \sin \frac{1}{2} z^2)}}{\sqrt{(1-\mu^2 \sin \frac{1}{2} u^2)}}.]$$

Die Stammgleichung hiervon giebt also das Verhältniss zwischen den Seiten $\frac{1}{2} z$, $\frac{1}{2} u$ und $\frac{1}{2} m$ eines

Kugeldreiecks, in welchem μ das Verhältniss der Sinus der Winkel zu den Sinus der gegenüberstehenden Seiten ausdrückt. [*Nemlich* μ *war* $= \frac{\sin M}{\sin \frac{1}{2} m}$, *und* $\frac{1}{2} m$ *war die eine Seite*, M *der gegenüberliegende Winkel.*] Da dieses Verhältniss, wie bekannt, für alle Seiten und Winkel constant ist, [*denn die Sinus der Winkel eines Kugeldreiecks verhalten sich, bekanntlich, wie die Sinus der gegenüberliegenden Seiten,*] so bleibt, im Fall das Verhältniss allein gegeben wäre, der Winkel, oder die Seite selbst, willkürlich.

Das sphärische Dreieck zeigt deutlicher, wie die Gleichung zwischen seinen drei Seiten der gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung genug thut. Die Gleichung war

$$\cos \tfrac{1}{2} z \cos \tfrac{1}{2} u + \cos M \sin \tfrac{1}{2} z \sin \tfrac{1}{2} u = \cos \tfrac{1}{2} m.$$

Nimmt man die ersten Ableitungen und sieht z als eine Function von u, und m und M als Constanten an, so erhält man

$$(\cos M . \cos \tfrac{1}{2} z \sin \tfrac{1}{2} u - \sin \tfrac{1}{2} z \cos \tfrac{1}{2} u) \frac{dz}{du}$$
$$+ (\cos M \sin \tfrac{1}{2} z \cos \tfrac{1}{2} u - \cos \tfrac{1}{2} z \sin \tfrac{1}{2} u) = 0.$$

Man substituire hierin den Werth von $\cos M$, aus der nemlichen Gleichung, [*also* $\cos M = \frac{\cos \frac{1}{2} m - \cos \frac{1}{2} z \cos \frac{1}{2} u}{\sin \frac{1}{2} z \sin \frac{1}{2} u}$,] so erhält man

$$\left[\left(\frac{\cos \frac{1}{2} m - \cos \frac{1}{2} z \cos \frac{1}{2} u}{\sin \frac{1}{2} z} \cos \tfrac{1}{2} z - \sin \tfrac{1}{2} z \cos \tfrac{1}{2} u\right) \frac{dz}{du}\right.$$
$$+ \left(\frac{\cos \frac{1}{2} m - \cos \frac{1}{2} z \cos \frac{1}{2} u}{\sin \frac{1}{2} u} \cos \tfrac{1}{2} u - \cos \tfrac{1}{2} z \sin \tfrac{1}{2} u\right)$$
$$= 0, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{\cos\frac{1}{2}m\cos\frac{1}{2}z - \cos\frac{1}{2}z^2\cos\frac{1}{2}u - \sin\frac{1}{2}z^2\cos\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}z}\right)\frac{dz}{du}$$

$$+\left(\frac{\cos\frac{1}{2}m\cos\frac{1}{2}u - \cos\frac{1}{2}u^2\cos\frac{1}{2}z - \sin\frac{1}{2}u^2\cos\frac{1}{2}z}{\sin\frac{1}{2}u}\right)$$

$= 0$, *oder*]

$$\frac{\cos\frac{1}{2}z\cos\frac{1}{2}m - \cos\frac{1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}z}\cdot\frac{dz}{du} + \frac{\cos\frac{1}{2}u\cos\frac{1}{2}m - \cos\frac{1}{2}z}{\sin\frac{1}{2}u} = 0.$$

Nun hat man, wenn, in dem nemlichen Kugeldreieck, in welchem die drei Seiten $\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{2}z$ und $\frac{1}{2}m$ sind und der der Seite $\frac{1}{2}m$ gegenüberliegende Winkel M ist, die, den Seiten $\frac{1}{2}u$ und $\frac{1}{2}z$ gegenüberliegenden, Winkel durch V und Z bezeichnet werden, eben so:

$$\cos\tfrac{1}{2}u = \cos\tfrac{1}{2}z\cos\tfrac{1}{2}m + \cos V\sin\tfrac{1}{2}z\sin\tfrac{1}{2}m$$

$$\cos\tfrac{1}{2}z = \cos\tfrac{1}{2}u\cos\tfrac{1}{2}m - \cos Z\sin\tfrac{1}{2}u\sin\tfrac{1}{2}m.$$

Ich gebe $\cos Z$ das Zeichen —, weil ich den Winkel Z stumpf annehme. Substituirt man Dieses und dividirt die ganze Gleichung durch $\sin\frac{1}{2}m$, so erhält man [*weil* $\cos\frac{1}{2}z\cos\frac{1}{2}m = \cos\frac{1}{2}u - \cos V\sin\frac{1}{2}z\sin\frac{1}{2}m$ *und* $\cos\frac{1}{2}u\cos\frac{1}{2}m = \cos\frac{1}{2}z + \cos Z\sin\frac{1}{2}u\sin\frac{1}{2}m$ *ist*, $\frac{-\cos V\sin\frac{1}{2}z\sin\frac{1}{2}m}{\sin\frac{1}{2}z\sin\frac{1}{2}m}\cdot\frac{dz}{du} + \frac{\cos Z\sin\frac{1}{2}u\sin\frac{1}{2}m}{\sin\frac{1}{2}u\sin\frac{1}{2}m}$ $= 0$, *oder*]

$$\frac{dz}{du}\cdot\cos V - \cos Z = 0, \text{ woraus folgt}$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{\cos Z}{\cos V}.$$

Nach der allgemeinen Eigenschaft der Kugeldreiecke [*dass sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten*] ist aber

$$\frac{\sin V}{\sin\frac{1}{2}u} = \frac{\sin Z}{\sin\frac{1}{2}z} = \frac{\sin M}{\sin\frac{1}{2}m} = \mu,$$

also ist $\sin V = \mu \sin \frac{1}{2} u$, $\sin Z = \mu \sin \frac{1}{2} z$, und hieraus

$$\cos V = \sqrt{(1 - \mu^2 \sin \tfrac{1}{2} u^2)}$$
$$\cos Z = \sqrt{(1 - \mu^2 \sin \tfrac{1}{2} z^2)}.$$

Substituirt man diese Werthe [*in die obige Gleichung* $\frac{dz}{du} = \frac{\cos Z}{\cos V}$], so erhält man die nemliche Ableitungs-Gleichung erster Ordnung [*wie oben*: $\frac{dz}{du} = \frac{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin \frac{1}{2} z^2)}}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin \frac{1}{2} u^2)}}$].

Wäre der Winkel Z, welcher stumpf angenommen wurde, spitz, wie V, so hätte man, statt der Gleichung $\frac{dz}{du} = \frac{\cos Z}{\cos V}$, die Gleichung $\frac{dz}{du} + \frac{\cos Z}{\cos V} = 0$, die von der vorigen nur in dem Zeichen von $\frac{dz}{du}$ verschieden, deren Stammgleichung aber die nemliche ist.

70.

Noch ist folgende wesentliche Bemerkung über diese Art von Gleichungen zu machen. Man bringe nemlich die Gleichung (68.) auf die Gestalt

$$\frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{(A + B \cos z)}} = \frac{1}{\sqrt{(A + B \cos u)}},$$

und nenne die erste Stammgrösse von $\frac{1}{\sqrt{(A + B \cos u)}}$, fu; so ist eben so fz die erste Stammgrösse von $\frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{(A + B \cos z)}}$, weil z eine Function von u, und $\frac{dz}{du}$ die erste Ableitung von z ist. Geht man also

zu den Stammgrössen, über, so erhält man, auf der Stelle, die Stammgleichung

$$fz = fu + k,$$

wo k die willkürliche Constante ist.

Diese Gleichung muss also mit der Stammgleichung, welche wir in (68.) fanden, übereinkommen, wo die Constante m war. Die Constante k kann also nur eine Function von m sein. Es sey daher $k = Fm$, so erhält man

$$fz = fu + Fm.$$

Aber m ist der Werth von z, für $u = 0$. Setzt man also, der Kürze wegen: fu sey so genommen, dass es für $u = 0$ verschwindet, so muss man für $u = 0$, $z = m$, folglich $fm = Fm$ haben. [*Nemlich, wenn für* $u = 0$, $z = m$ *und* $fu = u$ *sein soll, so giebt die Gleichung* $fz = fu + k$, *für* $u = 0$, $fm = k$, *also, weil* $k = Fm$ *war*, $Fm = fm$.] Die gefundene Stammgleichung ist also

$$fz = fu + fm,$$

welcher nachstehende algebraische Gleichung genughut:

$$\cos\tfrac{1}{2}z \cos\tfrac{1}{2}u + \sin\tfrac{1}{2}z \sin\tfrac{1}{2}u \sqrt{\left(\frac{A + B\cos m}{A+B}\right)} = \cos\tfrac{1}{2}m.$$

[*Doch ist diese algebraische Gleichung nur eine von den Gleichungen, die der Gleichung* $fz = fm + fm$ *genug thun; denn diese letztere ist allgemein und gilt nicht blos für die bestimmte Gleichung* $\frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{(A + B\cos z)}} = \frac{1}{\sqrt{(A+B\cos u)}}$, *sondern allgemein für die Gleichung* $\frac{\frac{dz}{du}}{\varphi z} = \frac{1}{\varphi u}$,

denn

denn auch auf diese allgemeine Gleichung passt die Herleitung von $fz = fu + fm$.] Obgleich man also den algebraischen Ausdruck der Grössen fu, fz, fm, nicht angeben kann, lässt sich gleichwohl zwischen den drei Grössen z, u, m die algebraische Gleichung

$$fz = fu + fm,$$

finden. Man hat also auch, wenn man in diese Gleichung y statt z, und z statt u setzt,

$$\cos\tfrac{1}{2}y\cos\tfrac{1}{2}z + \sin\tfrac{1}{2}y\sin\tfrac{1}{2}z\sqrt{\left(\frac{A+B\cos m}{A+B}\right)} = \cos\tfrac{1}{2}m$$

$$\text{und } fy = fz + fm.$$

Eben so, wenn man x statt y, und y statt z setzt,

$$\cos\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}y + \sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{2}y\sqrt{\left(\frac{A+B\cos m}{A+B}\right)} = \cos\tfrac{1}{2}m$$

$$\text{und } fx = fy + fm$$

u. s. w. Man hat also, der Reihe nach,

$$fz = fu + fm,\ fy = fu + 2fm,\ fx = fu + 3fm.$$

[*Nemlich, weil $fy = fz + fm$, so ist $fy = fu + fm + fm = fu + 2fm$, wenn man $fz = fu + fm$ statt fz setzt; ferner $fx = fu + 2fm + fm = fu + 3fm$, wenn man $fy = fu + 2fm$ statt fy setzt u. s. w.*] Aus diesen Gleichungen findet man die Verhältnisse zwischen y, u und m, und zwischen x, u und m *etc.* wenn man erst z, dann y u. s. w. eliminirt.

Man kann diese Rechnung auf die, in (67.) untersuchte allgemeine Gleichung anwenden und daraus ähnliche Folgerungen ziehen. Wendet man die vorstehenden Formeln auf Kugeldreiecke an, so erhält man folgende elegante Construction.

Es sey ein Kugeldreieck beschrieben, dessen drei Seiten [*MB. Fig.* 1 =] z, [MA =] u, [AB =] m sind, (um die Brüche zu vermeiden, setze ich in die obige Formeln $2z$, $2u$, $2m$ statt z, u, m) und in welchem der Winkel [MBA] zwischen u und m stumpf ist. Der Winkel zwischen u und z bleibe constant und man lege die Basis m wechselsweise längs den Seiten u und z, [*wie die Figur zeigt, in* AB, BC, CD....] so dass eine Reihe von Dreiecken [MAB, MBC, MCD....] entsteht, deren jedes eine Seite mit dem vorigen gemein hat, und die alle die Basis m und den Winkel M am Scheitel gemeinschaftlich haben. Sind dann die Seiten, welche diesen Winkel einschliessen, für die verschiedene Dreiecke, u, z; z, y; y, x *etc.* [*also*

$$AM = u,\ BM = z$$
$$BM = z,\ CM = y$$
$$CM = y,\ DM = x \text{ etc.}]$$

so ist [*wie oben gefunden*]

$$fz = fu + fm,\ fy = fu + 2fm,\ fx = fu + 3fm.....,$$

wo fu die Stammgrösse von $\frac{1}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin u^2)}}$ ist, wenn $\mu = \frac{\sin M}{\sin m}$; und so bei den ähnlichen Functionen in z, y *etc.* [*Nemlich, z. B.* fz *ist die Stammgrösse von* $\frac{1}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin z^2)}}$, fy *die Stammgrösse von* $\frac{1}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin y^2)}}$ *etc.*]

Vermittelst dieser Construction kann man leicht die Werthe der Seiten y, x.... der neuen Dreiecke finden. Denn, betrachtet man die gleichschenkligen

Dreiecke [*ABC*, *BCD*, *CDE*....], welche die wechselseitig gelegte Basis *m* zu Seiten haben, so theilen die Perpendikel [*BB'*, *CC'*, *DD'*....] aus ihren Scheiteln [*zwischen den gleichen Seiten*], auf ihre respective Grundlinien, letztere in zwei gleiche Theile, und die, durch diese Perpendikel und die, den gemeinschaftlichen Winkel *M* einschliessenden, Seiten entstehende, rechtwinklige Dreiecke geben, vermöge der bekannten Gleichungen für rechtwinklige Kugeldreiecke:

$$tang\,\tfrac{1}{2}(u+y) = cos\,M\,tang\,z$$

[*nemlich* $tang\,MB' = cos\,M\,tang\,MB$]

$$tang\,\tfrac{1}{2}(x+z) = cos\,M\,tang\,y$$

[*nemlich* $tang\,MC' = cos\,M\,tang\,MC$] *etc.*

Setzt man $u = m$, so dass das erste Dreieck [*MAB*] gleichschenklig ist und *z* zur Basis hat, so erhält man

$$tang\,\frac{z}{2} = cos\,M\,tang\,m,$$

[*nemlich* $tang\,MA' = cos\,M\,tang\,MA$],

$$fz = 2fm,\; fy = 3fm,\; fx = 4fm\ldots.$$

Die Construction ist eben das für Kugeldreiecke, was die Construction der neun und zwanzigsten geometrischen Aufgabe in Newtons allgemeiner Arithmetik für gradelinige Dreiecke ist. [*Diese Newtonsche Aufgabe besteht darin, die Vielfachen eines gegebenen Winkels zu construiren. Dieses geschieht dadurch, dass man, wie in Figur* 1. *wo jetzt die Linien nicht Bogen, sondern grade Linien, alle in einer Ebene, bedeuten sollen, in den verlängerten einen Schenkel des gegebenen Winkels, vom Scheitel ab, eine beliebige grade Linie MA,*

von ihrem Endpunct nach dem anderen Schenkel hinüber, also in AB dieselbe Linie; wiederum dieselbe Linie aus ihrem Endpunkte, von dem anderen Schenkel nach dem ersten hinüber legt, also nach BC u. s. w. Die gleichen Winkel an den, sämmtlich in den verlängerten Schenkeln des gegebenen Winkels liegenden Grundlinien der entstehenden gleichschenkligen Dreiecke sind, als die äusseren, der Reihe nach, wie leicht zu sehen, die zwei, drei, vierfachen etc. des gegebenen Winkels.]

Denn, macht man aus den Kugeldreiecken, deren Seiten u, z, y *etc.* und deren Grundlinien m sind, gradlinige Dreiecke, so geben die obigen Gleichungen $z = 2m \cos M$, $u+y = 2z \cos M$, $x+z = 2y \cos M$ [*nemlich, dies geben die Gleichungen* $\tang \frac{1}{2} z = \cos M \tang m$, $\tang \frac{1}{2}(u+y) = \cos M \tang z$, $\tang \frac{1}{2}(x+y) = \cos M \tang y$ *etc. weil die Tangenten jetzt statt der Bogen genommen werden können und also* $\tang \frac{1}{2} z = \frac{1}{2} z$, $\tang \frac{1}{2}(u+y) = \frac{1}{2}(u+y)$, $\tang \frac{1}{2}(x+z) = x+z$, $\tang m = m$, $\tang z = z$, $\tang y = y$ *ist etc.*] *etc.* und es ist leicht zu zeigen, dass alsdann die Function fu dem Winkel proportinal ist, dessen Sinus $\frac{u \sin M}{m}$; weil sich $\sin u$ und $\sin m$ in u und m verwandeln, [*denn es war* fu *gleich der Stammgrösse von* $\frac{1}{\sqrt{(1-\mu^2 \sin u^2)}}$, *oder, weil* $\mu = \frac{\sin M}{\sin m}$ *ist, von* $\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\sin M}{\sin m}.\sin u\right)^2\right)}}$, *welches jetzt, weil* $\sin u$ *und* $\sin m$ *in* u *und* m

übergehen, $\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{u}{m}\sin M\right)^2\right)}}$ *ist. Die Stammgrösse hiervon ist bekanntlich dem, zum Sinus* $\frac{u}{m}\sin M$ *gehörigen, Bogen proportional,*] so, dass wenn man die Grundlinie m statt das Sinus der gegenüberstehenden Seite M setzt, wegen $u = m$,

$$z = \sin 2\,M,\ y = \sin 3\,M \text{ etc. ist.}$$

[*Nemlich, da* fu*, wie oben gefunden, den Bogen, oder, was dasselbe ist, dem Winkel proportional ist, dessen Sinus* $\frac{u}{m}\sin M$*, so ist* u *selbst dem Sinus* $\frac{u}{m}\sin M$ *proportional und folglich, wenn man* $u = m$ *setzt,* $u = m = \sin M$*. Nun giebt* $z = 2m \cos M$*, wenn man* $\sin M$ *statt* m *setzt,* $z = 2 \sin M \cos M = \sin 2\,M$*; ferner* $u + y = 2z\cos M$*, wegen* $u = m$*, also* $y = 2z \cos M - u$*, oder* $y = 4 \sin M \cos M^2 - \sin M = 3\sin M \cos M^2 - \sin M(1 - \cos M^2) = 2 \sin M \cos M^2 + \sin M \cos M^2 - \sin M^3 = 2 \sin M \cos M . \cos M + \sin M(\cos M^2 - \sin M^2) = \sin 2\,M \cos M + \cos 2\,M \sin M = \sin 3\,M$ *etc.*

Ohne Figur und Erläuterung ist Lagrange's Vortrag an dieser Stelle etwas schwer verständlich. So unnöthig und schädlich Figuren bei allgemeinen Demonstrationen sind, so nöthig sind sie in einzelnen Fällen.]

71.

Wir sind über die Eigenschaften der Functionen von der Form fu ein wenig ausführlich gewesen, weil sich die Mathematiker mit ihnen viel beschäftigt haben und diese Functionen häufig vorkommen.

Wenn man z. B. die Bewegung eines Pendels untersucht, welches auf irgend eine Weise schwingt, und man nennt r die Länge des Pendels, Ψ den Winkel, um welchem es sich in irgend einem Augenblick von der Verticale entfernt, α den grössten Werth von Ψ, β den kleinsten, so ist, wenn die Schwere der Einheit gleich, und

$$\sin u = \sqrt{\left(\frac{\cos\beta - \cos\Psi}{\cos\beta - \cos\alpha}\right)}$$

$$\mu = \sqrt{\left[\frac{\cos\beta^2 - \cos\alpha^2}{(\cos\beta + \cos\alpha)^2 + \sin\alpha^2}\right]}$$

$$\lambda = \sqrt{\left[\frac{2(\cos\beta + \cos\alpha)}{(\cos\beta + \cos\alpha)^2 + \sin\alpha^2}\right]}$$

gesetzt wird, $\lambda fu \sqrt{r}$ der Ausdruck der Zeit vom untersten Punkt an, worin, wie oben,

$$\frac{dfu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu^2 \sin u^2)}}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Bewegung um die Verticale ist

$$\frac{\sqrt{2}\,.\sin\alpha\sin\beta}{\sin\Psi^2\sqrt{r}\sqrt{(\cos\alpha + \cos\beta)}},$$

die also Null ist, wenn das Pendel durch die Verticale geht, in welchem Fall $\beta = 0$, welches der Fall der gewöhnlichen Schwingungen ist.

72.

Die Methode, Ableitungen und Ableitungs-Gleichungen von gegebenen Grössen und Gleichungen zu finden, wozu nur directe Operationen und nur Rechnungen nöthig sind, die sich nach den obigen Regeln immer ausführen lassen, [*also die Differential-Rechnung*] kann man: directe Functions-Rechnung nennen. Hingegen, das Verfahren, von den Ableitungen und Ableitungs-Gleichungen zu den Grössen und Gleichungen zurückzukommen, aus welchen sie entstanden sein können, und welche man als ihre Stammgrössen ansehen kann, macht den zweiten Theil der Analysis der Functionen aus, den man: zurückleitende Analysis *(Analyse inverse)* nennen kann, weil derselbe von den nemlichen, aber umgekehrten, Methoden und Regeln abhängt. Dieser Theil lässt sich nicht mit der nemlichen Leichtigkeit und dem nemlichen Erfolge ausüben. [*Er ist die sogenannte Integral-Rechnung.*] Es verhält sich mit diesen beiden Theilen [*vergleichungsweise*], wie in der Arithmetik und Algebra mit den directen Operationen der Multiplication und Potenziirung und den umgekehrten Operationen der Division und Wurzel-Ausziehung. Die Operationen der ersten Art sind, wie bekannt, immer ausführbar und geben immer genaue Resultate; hingegen die Operationen der zweiten Art sind, wenigstens genau, nur in gewissen Fällen ausführbar, und geben in allen übrigen Fällen nur näherungsweise Resultate.

Die directe Functionen-Rechnung ist in den obigen Regeln für die Entwickelung der Ableitungen

enthalten, wenigstens für eine einzelne veränderliche Grösse. Die zurückleitende Rechnung hängt von den nemlichen Regeln ab, aber die Schwierigkeit liegt in der Anwendung auf die verschiedenen Fälle.

Wir haben die bekannten Methoden für die vorzüglichsten Arten von Functionen und Gleichungen angegeben und haben uns bemüht, besonders die allgemeinen Grundsätze der Zurückleitungs-Rechnung festzustellen.

Da wir kein vollständiges Lehrbuch schreiben wollen, so werden wir hier nicht weiter ins Detail gehen. Wer mit der Differential-Rechnung bekannt ist, wird leicht die Uebereinstimmung der Functionen-Rechnung mit diesem Calcul, und diejenige der ableitenden und zurückleitenden Rechnung mit dem Differential- und Integral-Calcul, wahrnehmen. Man kann also leicht, wenn man will, auf die Functionen, die verschiedenen, bis jetzt bekannten Integrations-Methoden übertragen.

Zwölfter Abschnitt.

Von der Entwickelung der Functionen zweier veränderlichen Grössen. Von ihren Ableitungen. Bezeichnung dieser Functionen, und Bedingungen, welchen sie entsprechen müssen. Allgemeines Gesetz zwischen den Gliedern der Entwickelung einer Function von mehreren veränderlichen Grössen und den Gliedern, die wieder aus der Entwickelung der ersten Glieder entstehen.

73.

Wir haben bis jetzt erst von Functionen einer veränderlichen Grösse gehandelt. Die Ausdehnung der Theorie dieser Functionen auf Grössen mit zwei, und mehreren veränderlichen Elementen, hat keine Schwierigkeit.

Es sey fxy eine beliebige Function zweier veränderlichen Grössen x und y, die man als unabhängig von einander betrachtet. Setzt man in diese Function $x + k$ statt x, und $y + \lambda$ statt y, wo k und λ unbestimmte Grössen sind, und entwickelt die neue Function $f(x + k,\ y + \lambda)$ nach steigenden Potenzen von k und λ, so ist klar, dass das erste Glied der Entwickelung, ohne k und λ, fxy selbst ist und dass die übrigen Glieder Functionen von x und y sind, die, der Reihe nach, k, λ, k^2, $k\lambda$, λ^2, k^3, *etc.* zu Factoren haben. Diese Functionen hängen nothwendig von

der Stammgrösse fxy ab und die Bestimmung derselben ist es, worauf es ankommt.

Um selbige leicht zu bewerkstelligen, setze man zuförderst, dass nur x allein in $x + k$ sich verwandele, y aber unverändert bleibe. Bezeichnet man, in diesem Fall, durch $\frac{dfxy}{dx}$, $\frac{d^2fxy}{dx^2}$, $\frac{d^3fxy}{dx^3}$ *etc.* die erste, zweite, dritte Ableitung von fxy nach x allein, so erhält man

$$f(x+k,y) = fxy + k\frac{dfxy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fxy}{dx^2} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^3fxy}{dx^3} \ldots\ldots$$

[*Lagrange schreibt:* $f'xy$, $f''xy$ *etc. Der Uebersetzer bezeichnet* $\frac{dfxy}{dx}$, $\frac{d^2fxy}{dx^2}$ *durch* $\frac{d}{x}fxy$, $\frac{d^2}{x^2}fxy$ *etc. oder, bessser, durch* $\frac{d}{x}u$, $\frac{d^2}{x^2}u \ldots$, *wenn* $fxy = u$ *gesetzt wird.*] Nun setze man überall $y + \lambda$ statt y, so erhält man

$$f(x+k, y+\lambda) = f(x, y+\lambda) + k\frac{df(x, y+\lambda)}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2f(x,y+\lambda)}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3f(x,y+\lambda)}{dx^3} \ldots\ldots$$

Man bezeichne durch $\frac{dfxy}{dy}$, $\frac{d^2fxy}{dy^2}$, $\frac{d^3fxy}{dy^3}$ die erste, zweite, dritte etc. Ableitung, nach y. [*Lagrange schreibt* $f_{,}f_{,,}f_{,,,}$ *Er hilft sich, bei zwei veränderlichen Grössen, durch eine andere Stelle des Strichs. Auch bei drei veränderlichen Grössen könnte man sich dadurch allenfalls noch helfen z.B. dass man den Strich links, oben, und bei vieren, den Strich links, unten, wie* $'f$, $''f$, $'''f$.... *und* $_{,}f$ $_{,,}f$, $_{,,,}f$.... *setzte; allein offenbar hat das Hülfsmittel*

seine Grenzen. Bei fünf Grössen z. B. wäre es beinahe schon unzureichend und die Ableitung nach einer beliebigen Grösse aus vielen, kann durch die Striche gar nicht angedeutet werden. Der Uebersetzer bezeichnet die Ableitung nach einer beliebigen Grösse dadurch, dass er die Grösse unter dem d bemerkt, wie $\frac{d}{y} fxy$, $\frac{d^2}{y} fxy$ *etc.*]

Dann ist klar, dass die Function $f(x, y+\lambda)$, als Function von $y+\lambda$ und unabhängig von x betrachtet,

$$= fxy + \lambda \frac{dfxy}{dy} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2fxy}{dy^2} + \frac{\lambda^3}{2.3} \frac{d^3fxy}{dy^3} \ldots,$$

ist. Eben so ist

$$\frac{df(x, y+\lambda)}{dx} = \frac{dfxy}{dx} + \lambda \frac{d\frac{dfxy}{dx}}{dy} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2\frac{dfxy}{dx}}{dy^2} \ldots$$

$$\frac{d^2f(x, y+\lambda)}{dx^2} = \frac{d^2fxy}{dx^2} + \lambda \frac{d\frac{d^2fxy}{dx^2}}{dy} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2\frac{d^2fxy}{dx^2}}{dy^2} \ldots,$$

u. s. w. Substituirt man diese Ausdrücke und ordnet die Glieder nach den Potenzen und Producten von k und λ, so erhält man

$$\Big[f(x+k, y+\lambda) = fxy + \lambda \frac{dfxy}{dy} + \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2fxy}{dy^2} + \frac{\lambda^3}{2.3} \frac{d^3fxy}{dy^3} \ldots$$

$$+ k \frac{dfxy}{dx} + k\lambda \frac{d\frac{dfxy}{dx}}{dy} + \frac{k\lambda^2}{2} \frac{d^2\frac{dfxy}{dx}}{dy^2} \ldots$$

$$+ \frac{k^2}{2} \frac{d^2fy}{dx^2} + \lambda \frac{d\frac{d^2fxy}{dx^2}}{dy^2} \ldots$$

oder]

$$f(x+k,y+\lambda)=fxy+k\frac{dfxy}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2fxy}{dx^2}+\frac{k^3}{2}\frac{d^3fxy}{dx^3}\ldots$$

$$+\lambda\frac{dfxy}{dy}+k\lambda\frac{d\frac{dfxy}{dx}}{dy}+\frac{k^2\lambda}{2}\frac{d\frac{d^2fxy}{dx^2}}{dy}\ldots$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2fxy}{dy^2}+\frac{k\lambda^2}{2}\frac{d\frac{d^2fxy}{dx}}{dy^2}\ldots$$

$$+\frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3fxy}{dy^3}\ldots$$

Die allgemeine Form der Glieder ist

$$\ldots\frac{k^m\lambda^n}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}\cdot\frac{d^n\frac{d^mfxy}{dx^m}}{dy^n}.$$

74.

Hier haben wir, um $f(x+k,y+\lambda)$ zu finden, zuerst, in fxy, $x+k$ statt x gesetzt und nach k entwickelt. Hernach haben wir in alle Glieder $y+\lambda$ statt y gesetzt und [*die Glieder*] nach λ entwickelt. Es ist klar, dass man identisch das nemliche Resultat erhalten würde, wenn man, umgekehrt, mit der Substitution von $y+\lambda$ statt y und der Entwickelung nach λ angefangen, und hernach erst $x+k$ statt x gesetzt, und die Glieder nach k entwickelt hätte. Dann würde man erst die Ableitungen nach y, nemlich $\frac{dfxy}{dy}$, $\frac{d^2fxy}{dy^2}$.... und hernach die Ableitungen von diesen, nach x, gefunden haben, welche $\frac{d\frac{dfxy}{dy}}{dx}$, $\frac{d^2\frac{dfxy}{dy}}{dx^2}$.... $\frac{d\frac{d^2fxy}{dy^2}}{dx}$ *etc.* sind. Der Werth des Resultats würde der nemliche gewesen sein. Auf

dem ersten Wege aber erhält man $\frac{d\frac{dfxy}{dx}}{dy}$, wenn man zuerst die Ableitung von fxy nach x nimmt, welches $\frac{dfxy}{dx}$ giebt, hernach aber die erste Ableitung von dieser nach y. Auf dem zweiten Wege erhält man das Nemliche, wenn man erst die erste Ableitung von fxy nach y nimmt, welches $\frac{dfxy}{dy}$ giebt, und darauf die erste Ableitung von dieser nach x.

Daraus folgt, dass es einerlei ist, in welcher Ordnung die beiden Operationen, durch welche man die Ableitung von fxy nach x uud nach y findet, auf einander folgen; und da sich eben das von den übrigen Ableitungen sagen lässt, so folgt allgemein, dass die Ableitungs-Operationen nach den verschiedenen einfachen veränderlichen Grössen, von einander völlig unabhängig sind und immer die nemlichen Resultate geben, in welcher Ordnung man, nach x und nach y, ableitet. So erhält man das Nemliche, man mag erst die zweite Ableitung von fxy nach x und darauf die erste nach y, oder erst die erste Ableitung nach y und dann die zweite nach x, oder auch zuerst die erste Ableitung nach x, dann die erste Ableitung nach y und dann noch einmal die erste Ableitung nach x nehmen u. s. w. Auch bleibt Alles das Nemliche, die Grössen mögen von einander unabhängig sein, oder nicht. [*Um diesen, für die sogenannte Rechnung mit partiellen Differentialen wichtigen Umstand vollständig und deut-*

lich zu übersehen, darf man nur die beiden Entwickelungen von $f(x+k, y+\lambda)$, die eine erst nach x und dann nach y, die andere erst nach y und dann x, neben einander stellen und einander gleich setzen, nemlich

$$f(x+k,y+\lambda)=fxy+k\frac{dfxy}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2fxy}{dx^2}+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fxy}{dx^3}\ldots$$

$$+\lambda\frac{dfxy}{dy}+k\lambda\frac{d\frac{dfxy}{dx}}{dy}+\frac{k^2\lambda}{2}\frac{d\frac{d^2fxy}{dx^2}}{dy}\ldots$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2fxy}{dy^2}+\frac{k\lambda^2}{2}\frac{d^2\frac{dfxy}{dx}}{dy^2}\ldots$$

$$+\frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3fxy}{dy^3}\ldots$$

und

$$f(x+k,y+\lambda)=fxy+\lambda\frac{dfxy}{dy}+\frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2fxy}{dy^2}+\frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3fxy}{dy^3}\ldots$$

$$+k\frac{dfxy}{dx}+k\lambda\frac{d\frac{dfxy}{dy}}{dx}+\frac{\lambda^2k}{2}\frac{d\frac{d^2fxy}{dy^2}}{dx}\ldots$$

$$+\frac{k^2}{2}\frac{d^2fxy}{dx^2}+\frac{\lambda k^2}{2}\frac{d^2\frac{dfxy}{dy}}{dx^2}\ldots$$

$$+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fxy}{dx^3}\ldots$$

Da hier die Coefficienten zu den willkürlichen Grössen k, k^2, k^3 λ, λ^2, λ^3 $k\lambda$, $k\lambda^2$ $k^2\lambda$ einzeln gleich sein müssen, so folgt, dass

$$\frac{d\frac{dfxy}{dx}}{dy}=\frac{d\frac{dfxy}{dy}}{dx},\quad \frac{d\frac{d^2fxy}{dx^2}}{dy}=\frac{d^2\frac{dfxy}{dy}}{dx^2},\quad \frac{d^2\frac{dfxy}{dx}}{dy^2}=\frac{d\frac{d^2fxy}{dy^2}}{dx}$$

ist etc., wie oben behauptet wurde. Ferner folgt

daraus, dass man z. B. statt $\frac{d\frac{dfxy}{dx}}{dy}$, $\frac{d^2fxy}{dx\,dy}$, *oder* $\frac{d^2fxy}{dy\,dx}$; *statt* $\frac{d^2\frac{dfxy}{dy}}{dx^2}$, $\frac{d^3fxy}{dx^2\,dy}$, *oder* $\frac{d^3fxy}{dy\,dx^2}$; *statt* $\frac{d^2\frac{dfxy}{dy}}{dx^2}$, $\frac{d^3fxy}{dx^2\,dy}$ *oder* $\frac{d^3fxy}{dy\,dx^2}$ *etc. schreiben darf. Alles dieses wird zuweilen stillschweigend angenommen, bedarf aber des Beweises. Die Entwickelung von* $f(x+k, y+\lambda)$ *lässt sich also, wie folgt, ausdrücken*

$$f(x+k, y+\lambda) = fxy + k\frac{dfxy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fxy}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fxy}{dx^3} \ldots$$
$$+ \lambda\frac{dfxy}{dy} + k\lambda\frac{d^2fxy}{dx\,dy} + \frac{k^2\lambda}{2}\frac{d^3fxy}{dx^2\,dy} \ldots$$
$$+ \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2fxy}{dy^2} + \frac{k\lambda^2}{2}\frac{d^3fxy}{dx\,dy^2} \ldots$$
$$+ \frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3fxy}{dy^3} \ldots$$

Auch bei mehreren veränderlichen Grössen ist die Folgereihe der Ableitungs-Operationen, wie sich durch ein ähnliches Verfahren zeigen lässt, völlig willkürlich.]

75.

Es sey, um ein Beispiel zu geben,

$$fxy = x\sqrt{(2xy + y^2)},$$

so ist die erste Ableitung nach x

$$\frac{dfxy}{dx} = \sqrt{(2xy+y^2)} + \frac{xy}{\sqrt{(2xy+y^2)}},$$

und die erste Ableitung nach y

$$\frac{dfxy}{dy} = \frac{x^2 + xy}{\sqrt{(2xy + y^2)}}.$$

Sodann ist die erste Ableitung von $\frac{dfxy}{dx}$, nach y,

$$\frac{d\frac{dfxy}{dx}}{dy} = \frac{x+y}{\sqrt{(2xy+y^2)}} + \frac{x^2 y}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

[*Nemlich* $\frac{d\frac{dfxy}{dx}}{dy} = \frac{x+y}{\sqrt{(2xy+y^2)}} + \frac{x}{\sqrt{(2xy+y^2)}}$ $- \frac{(x+y)xy}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x+y}{\sqrt{(2xy+y^2)}} + \frac{2x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ $= \frac{x+y}{\sqrt{(2xy+y^2)}} + \frac{x^2y}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.] Die erste Ableitung von $\frac{dfxy}{dy}$, nach x ist

$$\frac{d\frac{dfxy}{dy}}{dx} = \frac{2x+y}{\sqrt{(2xy+y^2)}} - \frac{(x^2+xy)y}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese beiden Ausdrücke von $\frac{d^2fxy}{dx\,dy}$ scheinen verschieden zu sein, aber sie sind identisch die nemlichen denn; beide lassen sich auf

$$\frac{3x^2y + 3xy^2 + y^3}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

bringen. [*nemlich der erste giebt* $\frac{(x+y)(2xy+y^2)+x^2y}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ $= \frac{2x^2y + xy^2 + 2xy^2 + y^3 + x^2y}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3x^2y + 3xy^2 + y^3}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, *der andere giebt* $\frac{(2x+y)(2xy+y^2) - y(x^2+xy)}{(2xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

=

$$= \frac{4x^2y + 2xy^2 + 2x^2y + y^3 - yx^2 - xy^2}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$= \frac{3x^2y + 3xy^2 + y^3}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, *also das Nemliche.*] Nimmt man hierauf weiter die erste Ableitung von $\frac{dfxy}{dx}$ nach x, welches die zweite Ableitung von fxy nach x giebt, so erhält man

$$\left[\frac{d^2fxy}{dx^2} = \frac{y}{\sqrt{(2xy + y^2)}} + \frac{y}{\sqrt{(2xy + y^2)}} - \frac{xy^2}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left.= \frac{4x^2y + 2xy^3 - xy^2}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ oder}\right]$$

$$\frac{d^2fxy}{dy^2} = \frac{3xy^2 + 2y^3}{\sqrt{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}}.$$

Nimmt man ferner hiervon die Ableitung nach y, so erhält man, nach gehöriger Reduction,

$$\frac{d^3fxy}{dx^2\,dy} = \frac{3x^2y^2 + 3xy^3}{(2xy + y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Eben so findet man, wenn man die erste Ableitung von $\frac{d^2fxy}{dx\,dy}$ nach x nimmt,

$$\frac{d^3fxy}{dx^3\,dy} = \frac{3x^2y^2 + 3xy^3}{(2xy + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

u. s. w.

Hieraus folgt, dass gegebene Functionen von x und y, wenn es möglich sein soll dass sie Ableitungen einer und derselben Stammgrösse sind, gewisse Bedingungen erfüllen müssen.

Sind z. B. Fxy und φxy gegebene Functionen

von x und y, so muss, wenn $Fxy = \frac{dfxy}{dx}$ und $\varphi xy = \frac{dfxy}{dy}$ sein soll,

$$\frac{d^2 fxy}{dx\,dy} = \frac{dFxy}{dy} = \frac{d\varphi xy}{dx}$$

sein. Ueberhaupt muss, im Fall $Fxy = \frac{d^{m+n} fxy}{dx^m\,dy^n}$ und $\varphi xy = \frac{d^{p+q} fxy}{dx^p\,dy^q}$ sein soll,

$$\frac{d^{m+n+p+q} fxy}{dx^{m+p}\,dy^{n+q}} = \frac{d^{p+q} Fxy}{dx^p\,dy^q} = \frac{d^{m+n} \varphi xy}{dx^m\,dy^n}$$

sein. [*Diese Ausdrücke enthalten sogenannte Bedingungen der Integrabilität, welche Benennung aber unpassend ist; denn die Bedingungen beziehen sich nicht so wohl auf die Integrabilität oder Möglichkeit der Zurückleitung die vielmehr immer möglich ist, wenn nicht für, von einander unabhängige, so doch für, von einander abhängige Elemente; sondern vielmehr auf die Unabhängigkeit der Elemente von einander, in der Stammgrösse.*]

Wäre z. B. $Fxy = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\varphi xy = -\frac{x}{x^2+y^2}$, so könnte man wirklich setzen $Fxy = \frac{dfxy}{dx}$ und $\varphi xy = \frac{dfxy}{dy}$. Denn es ist $\frac{dFxy}{dy} \left[= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{d\varphi xy}{dx}$. [*Denn letzteres ist* $\frac{d\varphi xy}{dx} = -\frac{1}{x^2+y^2}$

$$+\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{x^2-y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

wie $\frac{dFxy}{dy}$.] Aber man könnte nicht setzen: $Fxy = \frac{d^2fxy}{dx\,dy}$ und $\varphi xy = \frac{d^2fxy}{dx^2}$; denn, alsdann müsste $\frac{dFxy}{dx} = \frac{d\varphi xy}{dy}$ sein, welches nicht der Fall ist.

76.

Wenn, allgemein, eine Function von einer beliebigen Zahl veränderlicher Grössen abhängt und man legt jeder derselben eine Veränderung bei, entwickelt darauf die Functionen nach den Abmessungen der verschiedenen Veränderungen und hierauf die, durch die erste Entwickelung entstandenen Functionen auf die nemliche Weise u. s. w., so sind diese verschiedenen Entwickelungen einem gewissen Gesetze unterworfen, welcheswir allgemein untersuchen wollen, da es öfters nützlich sein kann.

Es sey $fxyz\ldots.$ eine Function mehrerer von einander unabhängiger Grössen $x, y, z\ldots..$ Man nehme an, die Function gehe, wenn man darin $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma\ldots.$ statt $x, y, z\ldots.$ setzt, und sie nach den Potenzen und Producten von $\alpha, \beta, \gamma\ldots.$ entwickelt, in

$$fxyz\ldots. + f(1) + f(2) + f(3)\ldots.$$

über, wo $f(1)$ die Summe der Glieder bezeichnet, welche $\alpha, \beta, \gamma\ldots.$ in einer, $f(2)$ die Summe der Glieder, welche $\alpha, \beta, \gamma\ldots.$ in zwei Abmessungen, enthalten u. s. w.

Man nehme ferner an, dass die Functionen $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, wenn man darin von Neuem die nemlichen Substitutionen macht, in

$$\begin{array}{l} f(1) + f(1,1) + f(1,2) + f(1,3) \ldots . \\ f(2) + f(2,1) + f(2,2) + f(2,3) \ldots . \\ f(3) + f(3,1) + f(3,2) + f(3,3) \ldots . \\ etc. \end{array}$$

übergehen, wo $f(1,1)$, $f1,2)$ die verschiedenen Summen der Glieder der Entwickelung von $f(1)$ bezeichnen, nemlich so, dass, weil die Grössen in $f(1)$ selbst in einer Abmessung vorkommen, die Grösse $f(1,1)$ selbige in zwei, die Grösse $f(1,2)$ in drei Abmessungen enthält u. s. w. Auf diese Weise bedeutet $f(m,n)$ die Summe der Glieder der Entwickelung von $f(m)$, in welchen die Grössen α, β, γ in $m+n$ Abmessungen vorkommen.

Setzt man nun zunächst $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$.... in $fxyz$.... statt x, y, z, so erhält man

$$fxyz \ldots . + f(1) + f(2) + f(3) \ldots .$$

Setzt man hierin $x+m\alpha$, $y+m\beta$, $z+m\gamma$.... statt x, y, z...., so ist klar, dass man

$$\begin{array}{llll} fxyz \ldots . + & f(1) & + \; f(2) & + \; f(3) \ldots . \\ & + mf(1) & + m^2f(2) & + m^3f(3) \ldots . \\ & + mf(1,1) & + m^2f(1,2) & + m^3f(1,3) \ldots . \\ & + mf(2,1) & + m^2f(1,2) & + m^3f(2,3) \ldots . \\ & + mf(3,1) & + m^2f(3,2) & + m^3f(3,3) \ldots . \\ & etc. & & \end{array}$$

erhält. [*$fxyz$.... und die zweite Reihe kommen von $fxyz$...., die übrigen Reihen kommen von den Gliedern $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.... her.*] Auf der andern Seite ist klar, dass die beiden Substitutionen

eben das geben müssen, was die einzige giebt, wenn man in $fxyz\ldots$

$$x+(1+m)\alpha,\ y+(1+m)\beta,\ z+(1+m)\gamma\ldots$$

statt x, y, $z\ldots$ setzt, welches

$$fxyz\ldots+(1+m)f(1)+(1+m)^2f(2)+(1+m)^3f(3)\ldots$$

ausmacht.

Beide Resultate müssen also identisch und folglich die Glieder, welche einerlei Abmessungen von α, β, $\gamma\ldots$ enthalten, nothwendig auf beiden Seiten gleich sein, was auch m sein mag. Man erhält also folgende Gleichungen:

$$f(1)+mf(1)=(1+m)f(1)$$

$$f(2)+m^2f(2)+mf(1,1)=(1+m)^2f(2)$$

$$f(3)+m^3f(3)+m^2f(1,2)+mf(2,1)=(1+m)^3f(3)$$

$$f(4)+m^4f(4)+m^3f(1,3)+m^2f(2,2)+mf(3,1)=(1+m)^4f(4)$$

und so weiter.

Vergleicht man die Glieder mit gleichen Potenzen von m, so erhält man

$$f(1,1)=2f(2)$$

$$f(1,2)=3f(3),\ f(2,1)=3f(3)$$

$$f(1,3)=4f(4),\ f(2,2)=6f(4),\ f(3,1)=4f(4).$$

Aus den Gliedern der ersten allgemeinen Entwickelung kann man also unmittelbar die Glieder aller einzelnen folgenden Entwickelungen finden.

77.

[*Diese Nummer 77 handelt von der Bezeichnung deren sich der Verfasser bedient, wenn für eine Grösse, wie fxy, ein einzelner Buchstabe gesetzt wird; z. B. für fxy der einzelne Buchstabe z. Da dieses in den alten Zeichen keinen Un-*

terschied macht, so kann dass was des Verfassers Zeichen betrifft, hier wegbleiben. Ferner wird von den neuen Benennungen gesprochen was ebenfalls nicht hierher gehöret. Am Schlusse heisst es: Man werde in der 19. Vorlesung über die Functionen Rechnung mehrere Details über diesen Gegenstand finden.]

Dreizehnter Abschnitt.

In welchem die Mittel angegeben werden, die Function einer beliebigen Zahl veränderlicher Grössen in endliche Reihen von so vielen Gliedern als man will, zu entwickeln und den Werth der Reste auszudrücken.

78.

Eben wie im 6. Abschnitte, kann man auch eine beliebige Function von x und y nach Potenzen von x und y entwickeln und die Reste der Reihe hinter beliebigen Gliedern ausdrücken. Setzt man in den Ausdruck (73.) $x-k$ und $y-\lambda$ statt x und y und hernach xz, yz statt k und λ, [*also* $x-xz$ *und* $y-yz$ *statt* x *und* y], so erhält man

$$fxy = f(x-xz, y-yz) + xz\frac{df(x-xz, y-yz)}{d(x-xz)}$$

$$+ yz\frac{df(x-xz, y-yz)}{d(y-yz)}$$

$$+ \frac{x^2z^2}{1\,2}\frac{d^2f(x-xz, y-yz)}{d(x-xz)^2}$$

$$+ xyz^2 \frac{d^2 f(x - xz, y - yz)}{d(x-zz)\, d(y-yz)}$$

$$+ \frac{y^2 z^2}{2} \frac{d^2 f(x - xz, y - yz)}{d(y - yz)^2} \text{ etc.}$$

wo z eine unbestimmte beliebige Grösse ist. Setzt man dieselbe gleich Null, so ist die Gleichung identisch; setzt man sie $= 1$, so erhält man

$$fxy = foxy + x \frac{dfoxy}{dx} + y \frac{dfoxy}{dy}$$

$$+ \frac{x^2}{2} \frac{d^2 foxy}{dx^2} + xy \frac{d^2 foxy}{dx\, dy} + \frac{y^2}{2} \frac{d^2 foxy}{dy^2} \ldots.$$

welche Formel, allgemein, die Entwickelung von fxy nach Potenzen von x und y giebt, und in welcher $foxy$, $\frac{dfoxy}{dx}$ etc. die Grössen fxy, $\frac{dfxy}{dx}$ etc. bedeuten, wenn man darin $x = 0$ und $y = 0$ setzt.

Nun setze man, die Entwickelung solle nur theilweise Statt finden, und man wolle schon bei dem ersten Gliede stehen bleiben. Es sey

$$fx, y = f(x - xz, y - yz) + P,$$

wo P irgend eine Function von z ist, die für $z = 0$ verschwinden muss. Da die Grösse z willkürlich ist, so findet von dieser Gleichung auch die erste abgeleitete nach z Statt. Also ist [*weil* $\frac{dfxy}{dz} = 0$]

$$0 = -x. \frac{df(x - xz, y - yz)}{d(x - xz)} - y. \frac{df(x - xz, y - yz)}{d(y - yz)} + \frac{dP}{dz},$$

also

$$\frac{dP}{dz} = x. \frac{df(x - xz, y - yz)}{d(x - xz)} + y. \frac{df(x - xz, y - yz)}{d(y - yz)},$$

welche abgeleitete Gleichung erster Ordnung zur Bestimmung von P dient. [*Diese Stelle ist, wegen*

der veränderten Zeichen, nicht wörtlich übersetzt.]

Man nehme, zweitens, die drei ersten Glieder der Entwickelung von fxy und setze,

$$fxy = f(x-xz, y-yz) + xz\frac{df(x-xz, y-yz)}{d(x-xz)} + yz\frac{df(x-xz, y-yz)}{d(y-yz)} + Q.$$

so ist Q eine Function von z, die für $z=0$ verschwindet. Wegen der Willkürlichkeit von z kann man wieder die erste Ableitung nach z nehmen. Man findet zur Bestimmung von Q, wenn man die Glieder, welche sich aufheben, weglässt, folgende Ableitungs-Gleichung erster Ordnung:

$$\frac{dQ}{dz} = x^2z\frac{d^2f(x-xz, y-yz)}{d(x-xz)^2} + 2xyz\frac{d^2f(x-xz, y-yz)}{d(x-xz)d(y-yz)} + y^2z\frac{d^2f(x-xz, y-yz)}{d(y-yz)^2}$$

u. s. w. [*Nemlich, weil* $\frac{dfxy}{dz} = 0$, *so ist*

$$-x\frac{df(x-xz, y-yz)}{d(x-xz)} - y\frac{df(x-xz, y-yz)}{d(y-yz)} + x\frac{df(x-xz, y-yz)}{d(x-xz)} + y\frac{df(x-xz, y-yz)}{d(y-yz)} + x^2z\frac{df(x-xz, y-yz)}{d(x-xz)^2} + yxz\frac{d^2f(x-xz, y-yz)}{d(y-yz)\,d(x-xz)} + xyz\frac{d^2f(x-xz, y-yz)}{d(x-xz)d(y-yz)} + y^2z\frac{d^2f(x-xz, y-yz)}{d(y-yz)^2} + \frac{dQ}{dz} = 0,$$

welches, zusammengezogen das, Obige giebt.]

Um aus diesen Gleichungen P und Q zu finden,

müsste man die Stammgrösse der Grössen $\frac{dP}{dz}$ und $\frac{dQ}{dz}$ nach z suchen und sie für $z = 0$ nehmen. Da wir aber nicht der allgemeinen Ausdrücke dieser Grössen, sondern nur ihrer relativen Werthe für $z = 1$, und selbst nur der Grenzen dieser Werthe bedürfen, so kann man die Methode des oben erwähnten Abschnitts anwenden und wie in (39.) verfahren.

Bezeichnet man also durch τ irgend eine unbestimmte, oder vielmehr unbekannte Zahl, die aber immer zwischen 0 und 1 liegt, und die in der nemlichen Function immer dieselbe sein muss, in verschiedenen Functionen aber verschieden sein kann, so findet man folgende Ausdrücke

$$P = x\frac{df(\tau x, \tau y)}{d\tau x} + y\frac{df(\tau x, \tau y)}{d\tau y}$$

$$Q = \tfrac{1}{2}x^2\frac{d^2f(\tau x, \tau y)}{(\tau x)^2} + 2xy\frac{d^2f(\tau x, \tau y)}{d\tau x \,.\, d\tau y} + y^2\frac{d^2f(\tau x, \tau y)}{d\tau y^2}$$

u. s. w. [*vermöge* 39. *und* 40. *weil es hier blos auf die Zurückleitung nach z ankommt.*]

Substituirt man diese Werthe von P und Q in die Entwickelung von fxy und setzt $z = 1$, so erhält man folgende allgemeine Ausdrücke, die eine Erweiterung des Satzes in (40.) enthalten,

$$fxy = foxy + x\frac{df(\tau x, \tau y)}{d\tau x} + y\frac{df(\tau x, \tau y)}{d\tau y}$$

$$= foxy + x\frac{dfoxy}{dx} + y\frac{dfoxy}{dy}$$

$$+ \frac{x^2}{2}\frac{d^2f(\tau x, \tau y)}{d(\tau x)^2} + xy\frac{d^2f(\tau x, \tau y)}{d\tau x \,.\, d\tau y}$$

$$+ \frac{y^2}{2}\frac{d^2f(\tau x, \tau y)}{d(\tau y)^2}$$

$$= foxy + x\frac{dfoxy}{dx} + y\frac{dfoxy}{dy}$$

$$+\frac{x^2}{2}\frac{d^2foxy}{dx^2} + xy\frac{d^2foxy}{dx\,dy} + \frac{y^2}{2}\frac{d^2foxy}{dy^2}$$

$$+\frac{x^3}{2.3}\frac{d^3f(\tau x, \tau y)}{d(\tau x)^3} + \frac{x^2y}{2}\frac{d^3f(\tau x, \tau y)}{d(\tau x)^2 . d\tau y}$$

$$+\frac{xy^2}{2}\frac{d^3f(\tau x, \tau y)}{d\tau x . d(\tau y)^2} + \frac{y^3}{2.3}\frac{d^3f(\tau x, \tau y)}{d(\tau y)^3}$$

$$\cdots\cdots$$

Hat man also die Function $f(x+k, y+\lambda)$ nach Potenzen von k und λ zu entwickeln, so darf man nur in die obigen Ausdrücke $x+k$ und $y+\lambda$ statt x und y setzen. Die Grössen $foxy$, $\frac{dfoxy}{dx}$, $\frac{dfoxy}{dy}$ gehen dadurch in fxy, $\frac{dfxy}{dx}$, $\frac{dfxy}{dy}$ *etc.* über, wo die Ableitungen nach x und y genommen werden können, weil die Grösse $f(x+k, y+\lambda)$ von der Art ist, dass ihre Ableitungen nach x und y die nemlichen sind, wie die nach k und λ. [*Eigentlich also werden die gleich Null gesetzten x und y durch k und λ wieder hergestellt und darauf wird x und y mit k und λ verwechselt.*] Man erhält also

$$f(x+k; y+\lambda) = fxy + k\frac{df(x+\tau k, y+\tau\lambda)}{d(\tau k)} + \lambda\frac{df(x+\tau k, y+\tau\lambda)}{d(\tau\lambda)}$$

$$= fxy + k\frac{dfxy}{dx} + \lambda\frac{dfxy}{dy}$$

$$+\frac{k^2}{2}\frac{d^2f(x+\tau k, y+\tau\lambda)}{d(\tau k)^2} + k\lambda\frac{d^2f(x+\tau k, y+\tau\lambda)}{d(\tau k)\, d(\tau\lambda)}$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2f(x+\tau k, y+\tau\lambda)}{d(\tau\lambda)^2}$$

$$=fxy+k\frac{dfxy}{dx}+\lambda\frac{dfxy}{dy}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2fxy}{dx^2}+k\lambda\frac{d^2fxy}{dx\,dy}+\frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2fxy}{dy^2}$$

$$+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3f(x+\tau k,y+\tau\lambda)}{d(\tau k)^3}+\frac{k^2\lambda}{2}\frac{d^3fx+\tau k,y+\tau\lambda)}{d(\tau k)^2\,d(\tau\lambda)},$$

$$+\frac{k\lambda^2}{2}\frac{d^3f(x+\tau k,y+\tau\lambda)}{d(\tau k)\,d(\tau\lambda)^2}+\frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3f(x+\tau k,y+\tau\lambda)}{d(\tau\lambda)^3}$$

etc.

Die Grösse τk ist hier, wie man sieht, einerlei mit der Grösse, welche wir oben in (40.) durch u bezeichnet haben. Wir ziehen aber die Bezeichnung τk vor, weil der nemliche Coefficient τ auch in der Grösse $\tau\lambda$ vorkommt. Aus diesen Ausdrücken, die, nach Belieben, auch auf Functionen von drei und mehreren veränderlichen Grössen ausgedehnt werden können, lässt sich Folgendes schliessen.

Wenn man bei der Entwickelung einer Function nach Potenzen und Producten gewisser Grössen bei Gliedern einer gegebenen Ordnung, oder in welchen jene Grössen in Abmessungen vorkommen, deren Grad dem Exponenten der Ordnung gleich ist, stehen bleiben will, so kann man den Rest der Entwickelung den Gliedern der folgenden Ordnung allein gleich setzen, wenn man in diesen Gliedern die Grössen beibehält, sie aber sämmtlich mit einem Coefficienten λ multiplicirt, dessen Werth zwischen 0 und 1 liegt, und der in der nemlichen Function immer der nemliche ist, in verschiedenen Functionen aber verschieden sein kann.

79.

Uebrigens könnte man auch die Methode von (37.) auf die Entwickelung von $f(x+k, y+\lambda)$ anwen-

den, wenn man die Ableitungen nach k und λ nähme. Denn es sey

$$f(x+k, y+\lambda) = fx,y + kP + \lambda Q,$$

so erhält man, wenn man die Ableitungen nach x und y nimmt,

$$\frac{df(x+k, y+\lambda)}{dx} = \frac{dfxy}{dx} + k\frac{dP}{dx} + \lambda\frac{dQ}{dx} \text{ und}$$

$$\frac{df(x+k, y+\lambda)}{dy} = \frac{dfxy}{dy} + k\frac{dP}{dy} + \lambda\frac{dQ}{dy}.$$

[*Das k, welches in der ersten und das λ, welches in der zweiten Gleichung, in allen Gliedern, noch als Factor hinzu kommt, ist sogleich durch die Division weggeschafft.*] Nimmt man ferner die Ableitungen nach k und λ, so erhält man

$$\frac{df(x+k, y+\lambda)}{dk} = P + k\frac{dP}{dk} + \lambda\frac{dQ}{d\lambda} \text{ und}$$

$$\frac{df(x+k, y+\lambda)}{d\lambda} = Q + k\frac{dP}{d\lambda} + \lambda\frac{dQ}{d\lambda}.$$

Da nun $\frac{df(x+k, y+\lambda)}{dx} = \frac{df(x+k, y+\lambda)}{dk}$ und

$$\frac{df(x+k, y+\lambda)}{dy} = \frac{df(x+k, y+\lambda)}{d\lambda},$$

indem es einerlei ist, ob man von $f(x+k, y+\lambda)$ die Ableitungen nach x und y, oder nach k und λ nimmt, so ist

$$\frac{dfxy}{dx} + k\frac{dP}{dx} + \lambda\frac{dQ}{dx} = P + k\frac{dP}{dk} + \lambda\frac{dQ}{d\lambda},$$

$$\frac{dfxy}{dy} + k\frac{dP}{dy} + \lambda\frac{dQ}{dy} = Q + k\frac{dP}{d\lambda} + \lambda\frac{dQ}{d\lambda},$$

oder

$$P = \frac{dfxy}{dx} + k\left(\frac{dP}{dx} - \frac{dP}{dk}\right) + \lambda\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{d\lambda}\right),$$

$$Q = \frac{dfxy}{dy} + k\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dP}{d\lambda}\right) + \lambda\left(\frac{dQ}{dy} - \frac{dQ}{d\lambda}\right).$$

[*Diese Stelle konnte wieder nicht wörtlich übersetzt werden. Das Original ist hier wegen der unbestimmten Bezeichnung etwas schwer verständlich.*]

Setzt man also

$$\frac{dP}{dx} - \frac{dP}{dk} = R,\ \frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{d\lambda} + \frac{dP}{dy} - \frac{dP}{d\lambda} = S,$$

$$\frac{dQ}{dy} - \frac{dQ}{d\lambda} = T,$$

so erhält man

$$f(x+k, y+\lambda) = fxy + k\frac{dfxy}{dx} + \lambda\frac{dfxy}{dy}$$
$$+ k^2 R + k\lambda S + \lambda^2 T,$$

wo man die Entwickelung wieder so weit, als man will, fortsetzen kann und die Ausdrücke der Reste durch blosse Ableitung findet, sobald man die ersten Reste P und Q kennt.

80.

Da die Ableitungen nach zwei veränderlichen Grössen auf die nemliche Weise und nach den nemlichen Regeln gefunden werden, wie die Ableitungen nach einer einzelnen Grösse, sobald man jede Grösse für sich, und eine nach der anderen in Betracht zieht; so folgt, dass Alles was oben von einer einzelnen veränderlichen Grösse gezeigt worden, auch auf Functionen zweier Grössen Anwendung findet.

Also können auch die Bemerkungen des fünften Abschnittes, über die Entwickelung der Functionen

für bestimmte Werthe der veränderlichen Grössen, leicht auf Functionen zweier Grössen ausgedehnt und daraus ähnliche Folgerungen und Resultate gezogen werden.

Endlich ist leicht zu sehen, dass auch Functionen dreier oder mehrerer veränderlichen Grössen auf dieselbe Weise behandelt werden können, weil nichts weiter nöthig ist, als die nemlichen Operationen für jede einzelne Grösse zu wiederholen.

Vierzehnter Abschnitt.

Von den abgeleiteten Gleichungen mit drei veränderlichen Grössen. Von den willkürlichen Functionen in den vollständigen Stammgrössen zwischen drei veränderlichen Grössen.

81.

Wenn eine Grösse z durch eine Gleichung zwischen x, y und z gegeben ist, so findet diese Gleichung auch Statt, wenn $x+k$ und $y+\lambda$ statt x und y gesetzt wird, wo k und λ willkürlich sind, weil die Gleichung, nach der Voraussetzung, für jeden beliebigen Werth von x und y gilt. Entwickelt man also die Gleichung, nachdem $x+k$ und $y+\lambda$ statt x und y gesetzt worden, nach Potenzen und Producten von k und λ, so geben die Glieder, welche in einerlei Potenzen oder Producte von k und λ mul-

tiplicirt sind, eben so viele einzelne Gleichungen. Nun machen aber die in k multiplicirten Glieder der Entwickelung einer Function von x und y die erste Ableitung von z nach x, die Glieder mit λ die erste Ableitung nach y, die Glieder mit $\frac{k^2}{2}$, die zweite Ableitung nach x u. s. w. aus. Hat man also irgend eine Gleichung zwischen x, y und z und betrachtet z als eine, durch diese Gleichung gegebene, Function von x und y, so kann man daraus, wenn man die Ableitung aller ihrer Glieder nimmt, eben so viel Ableitungs-Gleichungen verschiedener Ordnungen finden, welche **Ableitungs-Gleichung der ersten, zweiten** etc. **Ordnung** heissen sollen. Diese Gleichungen dienen, die Werthe von $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$.... zu finden.

Bezeichnet man durch

$$u = 0$$

die, zur Bestimmung von z in x und y gegebene, Gleichung $Fxyz = 0$, so ist leicht zu sehen, dass das Glied mit k in der Entwickelung von $Fxyz = u = 0$, wenn man darin $x + k$ statt x, $y + \lambda$ statt y setzt und z als Function von x und y betrachtet, $k\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right)$, das Glied mit λ, $\lambda\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}\right)$ ist. [*Nemlich weil z von x und y abhängt, so hängt u, in Hinsicht auf x und z, von z, und darauf z von x; in Hinsicht auf y, von z, und darauf z von y ab. In Hinsicht auf z ist u*

mittelbar von x und y abhängig, oder, wie man es nennen könnte, eine Function zweiter Ordnung von x und y. Die vorstehende Stelle konnte, wegen der veränderten Zeichen wieder nicht wörtlich übersetzt werden. Doch ist der wesentliche Sinn immer getreu überliefert worden. Der Kürze wegen ist für Fxyz der einzelne Buchstabe u gesetzt worden.]

$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$, ist also die erste Ableitung von u nach x, $\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}$, die erste Ableitung von u nach y, so dass folgende zwei Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung Statt finden:

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{du}{dx} : \frac{du}{dz} \text{ und } \frac{dz}{dy} = -\frac{du}{dy} : \frac{du}{dz}.$$

Aus diesen Ausdrücken von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ kann man weiter die Werthe von $\frac{d^2z}{dz}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ *etc.* finden, wenn man von Neuem die ersten Ableitungen nach x und y nimmt u. s. w. [*Man sehe auch hierüber den oben erwähnten Versuch des Uebersetzers „über die Rechnung mit veränderlichen Grössen" 1. Theil, S. 213. etc.*]

82.

Man kann diese Sätze auch unmittelbar auf diejenigen, von den Functionen einer veränderlichen

Grösse

Grösse bringen, wenn man z als gegeben in x und y, [*vermöge der Gleichung* $u = Fxyz = 0$,] und y als eine unbestimmte Function von x betrachtet. [*Eine unbestimmte Abhängigkeit kann gesetzt werden, wo gar keine Statt findet, wie hier zwischen* x *und* y, *weil eine unbestimmte Abhängigkeit willkürlich ist.*] Betrachtet man also sogleich y und z als Functionen von x, [*nemlich* y *als Function erster,* z *als Function zweiter Ordnung von* x *durch* y, *oder, mit anderen Worten,* y *als unmittelbar,* z *als mittelbar, durch* y, *von* x *abhängig,*] so ist die erste Ableitung von u

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right).$$

[*Durch die Klammern um* $\frac{dz}{dx}$ *mag einstweilen die mittelbare Abhängigkeit der Grösse* z *von* x, *angedeutet werden.*] Da aber z als Function von x betrachtet wird, so ist die erste Ableitung von z, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Substituirt man, oben, diesen Ausdruck von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, so erhält man für die erste Ableitung von u:

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}\right).$$

Hat man also die Gleichung $u = 0$, so ist die erste abgeleitete davon:

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Da aber y als willkürliche Function von x betrach-

tet wird, so muss diese abgeleitete Gleichung Statt finden, was auch $\frac{dy}{dx}$ sey. Sie zerfällt also in folgende beide:

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0,$$

wie oben. [*Denn, weil die Abhängigkeit der Grösse y von der Grösse x willkürlich ist, so ist auch* $\frac{dy}{dx}$ *willkürlich und kann folglich auch* $= 0$ *gesetzt, oder, überhaupt, wie sonst ein unbestimmter oder willkürlicher Coefficient behandelt werden.*] Auf dieselbe Weise kann man die Ableitungs-Gleichungen höherer Ordnungen finden.

83.

Nun betrachte man im Allgemeinen die Gleichung

$$u = 0.$$

Sie giebt die beiden Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} : \frac{dz}{dy} = 0.$$

Die folglich mit der gegebenen Gleichung gleichzeitig Statt finden. Also findet auch eine Verbindung der drei Gleichungen Statt und kann folglich an die Stelle der Stammgleichung treten.

a und b mögen zwei beliebige, in der Grösse $u = Fxyz$ enthaltene, Constanten bedeuten, so sind diese Constanten die nemlichen auch in den Ableitungen $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ und $\frac{du}{dz}$. Man kann also, ver-

mittelst der drei Gleichungen, diese beiden Constanten eliminiren. Die entstehende Gleichung wird eine Gleichung erster Ordnung zwischen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ sein, welche zwei Constanten weniger enthält, als die Stammgleichung. Umgekehrt also, wenn man zur Bestimmung von z in x und y nur eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen x, y, z, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ hat, so muss die Stammgleichung zwischen x, y und z zwei willkürliche Constanten enthalten.

Dieses ist dem ähnlich, was wir in (46.) für Functionen einer einzelnen veränderlichen Grösse fanden. Wir sahen aber dort, in (60.) dass die willkürliche Grösse auch nicht constant sein, und wenn man sie wegschafft, gleichwohl die nemliche Ableitungs-Gleichung erster Ordnung entstehen kann. Etwas Aehnliches findet auch hier Statt und es ist leicht zu sehen, dass man noch die nemliche Ableitungs-Gleichung erster Ordnung durch Wegschaffung der beiden willkürlichen Grössen a und b erhält, wenn diese Grössen auch nicht constant sind, so lange nur die beiden Ableitungs-Gleichungen die nemliche Form haben.

Betrachtet man die, in u enthaltenen, beiden Grössen a und b als veränderlich und zwar als Functionen von x und y, so ist leicht zu sehen, dass, von Seiten der Grössen a und b, zu der ersten Ableitung von u nach x, noch die Grösse $\frac{du}{da}\cdot\frac{da}{dx}+\frac{du}{db}\cdot\frac{db}{dx}$,

und zu der ersten Ableitung von u nach y, noch die Grösse $\frac{du}{da}\cdot\frac{da}{dy}+\frac{du}{db}\cdot\frac{db}{dy}$, hinzu kommt. [*Wieder, wegen der Zeichen, nicht wörtlich.*]

Man setze b einer Function von a gleich, z. B. $b=fa$, so erhält man, wenn man die ersten Ableitungen nach x und y nimmt,

$$\frac{db}{dx}=\frac{db}{da}\cdot\frac{da}{dx} \text{ und } \frac{db}{dy}=\frac{db}{da}\cdot\frac{da}{dy}.$$

Die zu den beiden ersten Ableitungen [*von u*] hinzuzufügenden Grössen sind also

$$\left(\frac{du}{da}+\frac{du}{db}\cdot\frac{db}{da}\right)\frac{da}{dx} \text{ und } \left(\frac{du}{da}+\frac{du}{db}\cdot\frac{db}{da}\right)\frac{da}{dy},$$

folglich verschwinden sie beide zugleich, wenn man die Grösse a so annimmt, dass sie der Gleichung

$$\frac{du}{da}+\frac{du}{db}\cdot\frac{db}{da}=0,$$

genugthut, wobei die durch $fa=b$ ausgedrückte Abhängigkeit der Grösse b von a immer noch völlig willkürlich ist. [*Denn die Gleichung* $\frac{du}{da}+\frac{du}{db}\cdot\frac{db}{da}=0$ *ist noch immer zur Bestimmung des Werthes von a nöthig und kann dadurch erfüllt werden, wenn auch schon die Art der Abhängigkeit der Grösse b von a, ihre Bestimmung erhalten hat.*]

Daraus folgen nachstehende wichtige Umstände:

Erstlich, dass die Stammgleichung, welche, allgemein, einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung genugthut, nothwendig eine willkürliche Function enthalten muss.

Zweitens, dass man, wenn man eine Stammgleichung $Fxyz = u = 0$ gefunden hat, welche einer gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung im Allgemeinen genugthut, und zwei willkürliche Constanten a und b enthält, nur $b = fa$ setzen und a so annehmen darf, dass es der Gleichung

$$\frac{du}{da} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} = 0$$

genugthut. Diese Function $b = fa$ ist dann die willkürliche Function.

Drittens, dass man, wenn man eine beliebige Gleichung zwischen x, y und z hat, die eine gegebene Fuuction enthält, daraus allemal eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung finden kann, in welcher diese Function nicht mehr vorkommt. Denn, wenn φp die Function wäre, welche man wegschaffen will und p eine gegebene Function von x, y und z ist, so darf man nur die beiden ersten Ableitungen nach x und y von der gegebenen Gleichung nehmen. Man erhält drei Gleichungen welche φp und $\frac{d\varphi p}{dp}$ enthalten. Schafft man zwischen denselben φp und $\frac{d\varphi p}{dp}$ weg, so erhält man eine Gleichung erster Ordnung in welcher die Function φp nicht mehr vorkommt.

84.

Es sey z. B. $z - ax - by - c = 0$ die gegebene Gleichung; so sind die beiden abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{dz}{dx} - a = 0 \text{ und } \frac{dz}{dy} - b = 0.$$

Eliminirt man a und b zwischen diesen drei Gleichungen, so erhält man folgende Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy} - c = 0,$$

von welcher $z - ax - by - c = 0$ die Stammgleichung und wo a und b willkürliche Constanten sind.

Nun ist, wenn man $z - ax - by - 0 = Fxyz = u$ setzt,

$$\frac{du}{da} = -x, \quad \frac{du}{db} = -y.$$

Setzt man also $b = fa$, so ist die Gleichung, welche a bestimmt, $\left[\frac{du}{da} + \frac{du}{db}\cdot\frac{db}{da} = 0, \textit{ hier}\right]$

$$-x - y\frac{db}{da} = 0,$$

woraus folgt $\frac{db}{da} = -\frac{x}{y}$ und folglich

$$a = \varphi\frac{x}{y},$$

wenn φ die Umkehrung der Abhängigkeit der Grösse $\frac{db}{da}$ von a bezeichnet. Da also nun die Function $f\,[\text{in } b = fa]$ willkürlich ist, so ist es φ auch; also sind a und b zwei unbestimmte Functionen von x und y, oder vielmehr zwei, von einer und derselben unbestimmten Function von $\frac{x}{y}$, abhängende Functionen; die Grösse $b + \frac{ax}{y}$ ist folglich eine unbe-

stimmte Function von $\frac{x}{y}$. Bezeichnet man sie, der Kürze wegen, selbst durch $\varphi\frac{x}{y}$ [*anstatt dass vorhin a durch* $\varphi\frac{x}{y}$ *bezeichnet wurde, welche Veränderung der Bedeutung von* $\varphi\frac{x}{y}$ *angeht, weil b von a abhängt*], so ist die Stammgleichung [$z-ax-by-c=0$, *oder* $z-y\left(b+\frac{ax}{y}\right)-c=0$]

$$z-y\varphi\frac{x}{y}-c=0.$$

Nimmt man von dieser Gleichung die erste abgeleitete, so erhält man

$$\frac{dz}{dx}-y\frac{d\varphi\frac{x}{y}}{d\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=0 \text{ und}$$

$$\frac{dz}{dy}-\varphi\frac{x}{y}+y\frac{d\varphi\frac{x}{y}}{d\frac{x}{y}}\cdot\frac{x}{y^2}=0.$$

[*Im Original steht hier durch Druckfehler* $-\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=0$ *und* $z-\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)\times\frac{x}{y}=0$ *statt* $z'-y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\times\frac{1}{y}=0$ *und* $z_{,}-\varphi\frac{x}{y}+y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\times\frac{x}{y^2}=0$.] Eliminirt man zwischen diesen drei Gleichungen die beiden unbekannten Grössen $\varphi\frac{x}{y}$ und $\frac{d\varphi\frac{x}{y}}{d\frac{x}{y}}$, so erhält man, für die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ohne $\varphi\frac{x}{y}$, wie oben,

$$z-x\frac{dz}{dx}-y\frac{dz}{dy}-c=0.$$

[Nemlich die zweite und dritte Gleichung geben, wenn man die zweite mit $\frac{x}{y}$ *multiplicirt und sie zu der dritten rechnet,*

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{x}{y}+\frac{dz}{dy}-\varphi\frac{x}{y}=0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit y *und rechnet sie von der ersten ab, so erhält man*

$$z-c-x\frac{dz}{dx}-y\frac{dz}{dy}=0,\ \textit{oder}$$

$$z-x\frac{dz}{dx}-y\frac{dz}{dy}-c=0,\ \textit{wie oben.}$$

Man sehe wegen der Ableitungs-Gleichungen mit mehreren unabhängig veränderlichen Grössen, die zwanzigste Vorlesung im zweiten Bande.]

Funfzehnter Abschnitt.

Merkwürdiger Ausdruck für die Entwickelung einer beliebigen Function der in der Gleichung $z = x + yfz$ enthaltenen unbekannten Grösse z in eine Reihe.

85.

Die Eigenschaft der Ableitungs-Gleichungen, dass man durch sie beliebige Functionen wegschaffen kann, ist in vielen Fällen nützlich, besonders bei den Entwickelungen gegebener Funktionen in Reihen.

Es sey z. B. die Gleichung

$$z = x + y f z,$$

zur Bestimmung von z gegeben, wo fz eine beliebige Function von z ist. Man setze, es werde der Werth von z in einer Reihe nach Potenzen von y verlangt, so ist klar, dass die ersten beiden Glieder $x + y f x$ sind. Setzt man nun, um die folgende Glieder zu finden, $z = x + y f x + y^2 A + y^3 B \ldots.$ so muss man die Function z nach Potenzen von y entwickeln und dann die Glieder vergleichen, um A und B zu finden. Auf diesem Wege aber würde man nicht das Fortschreitungs-Gesetz für A, $B \ldots.$ erhalten. Es ist also besser, wenn man, statt der gegebenen Gleichung, die Ableitungs-Gleichungen der ersten Ordnung in Rechnung bringt, welche fz nicht enthalten.

Man nehme daher die ersten abgeleiteten Gleichungen nach x und y, so erhält man

$$\frac{dz}{dx} = 1 + y \frac{dfz}{dz} . \frac{dz}{dx} \text{ und } \frac{dz}{dy} = fz + y \frac{dfz}{dz} . \frac{dz}{dy}.$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen $\frac{dfz}{dz}$, [*indem man die erste mit* $\frac{dz}{dy}$, *die zweite mit* $\frac{dz}{dx}$ *multiplicirt und eine von der anderen abzieht,*] so erhält man $\left[\frac{dz}{dx} . \frac{dz}{dy} - \frac{dz}{dy} . \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} - fz \frac{dz}{dx}\text{, oder}\right]$

$$\frac{dz}{dy} - fz \frac{dz}{dx} = 0.$$

Nun aber giebt die gegebene Stammgleichung $[z = x + y f z]$

$$fz = \frac{z-x}{y}.$$

Substituirt man Dieses, so erhält man folgende Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ohne fz: $\left[\frac{dz}{dy} - \frac{z-x}{y} \cdot \frac{dz}{dx} = 0, \textit{ oder}\right]$

$$(z-x)\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy} = 0.$$

Da das erste Glied der Entwickelung von z nach y offenbar x ist, so wollen wir, allgemein,

$$z = x + Ay + By^2 + Cy^2 \ldots.$$

setzen, wo $A, B, C \ldots.$ Functionen von x sind. Dann ist

$$\frac{dz}{dx} = 1 + y\frac{dA}{dx} + y^2\frac{dB}{dx} + y^3\frac{dC}{dx} \ldots. \text{ und}$$

$$\frac{dz}{dx} = A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 \ldots.$$

also, wenn man substituirt,

$$\left(1 + y\frac{dA}{dx} + {}^2\frac{dB}{dx} + y^3\frac{dC}{dx} \ldots.\right)(A + By + Cy^2 \ldots.)$$
$$- A - 2By - 3Cy^2 \ldots. = 0,$$

$$\Big[\textit{oder } A + By + Cy^2 + Dy^3 \ldots.$$
$$+ Ay\frac{dA}{dx} + By^2\frac{dA}{dx} + Cy^3\frac{dA}{dx} \ldots.$$
$$+ Ay^2\frac{dB}{dx} + By^3\frac{dB}{dx} \ldots.$$
$$+ Ay^3\frac{dC}{dx} \ldots.$$
$$= A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 \ldots.\Big]$$

oder

$$\left(A\frac{dA}{dx} - B\right)y + \left(B\frac{dA}{dx} + A\frac{dB}{dx} - 2C\right)y^2$$

$$+\left(C\frac{dA}{dx}+B\frac{dB}{dx}+A\frac{dC}{dx}-3D\right)y^3\ldots;=0,$$

woraus folgt

$$B=A\frac{dA}{dx},$$

$$C=\tfrac{1}{2}\left(A\frac{dB}{dx}+B\frac{dA}{dx}\right),$$

$$D=\tfrac{1}{3}\left(A\frac{dC}{dx}+B\frac{dB}{dx}+C\frac{dA}{dx}\right)\ \text{etc.}$$

Hier bleibt zwar die Grösse A unbestimmt, aber wir haben schon gesehen, dass die beiden ersten Glieder von z, in der gegebenen Gleichung, $x+\gamma fx$ sind; folglich ist $A=fx$ und mithin

$$\frac{dA}{dx}=\frac{dfx}{dx},\ B=fx\frac{dfx}{dx},\ \frac{dB}{dx}=fx\frac{d^2fx}{dx^2}+\left(\frac{dfx}{dx}\right)^2,$$

$$C=\tfrac{1}{2}\left[2fx\left(\frac{dfx}{dx}\right)^2+fx^2\frac{d^2fx}{dx^2}\right]\ \text{etc.}$$

Es ist leicht zu sehen, dass sich die Grössen B, C *etc.* auf folgende Gestalt bringen lassen.

$$B=\frac{d(\frac{1}{2}A^2)}{dx},\ C=\frac{d(\frac{1}{2}AB)}{dx},$$

$$D=\frac{d(\frac{1}{3}(AC+\frac{1}{2}B^2))}{dx},\ E=\frac{d(\frac{1}{4}(AD+BC))}{dx}\ \text{etc.}$$

[*Denn* $\frac{d(\frac{1}{2}A^2)}{dx}$ *giebt* $A\frac{dA}{dx}=B$,

$\frac{d(\frac{1}{2}AB)}{dx}$ *giebt* $\frac{1}{2}\left(A\frac{dB}{dx}+B\frac{dA}{dx}\right)=C$,

$\frac{d(\frac{1}{3}AC+\frac{1}{6}B^2)}{dx}$ *giebt* $\frac{1}{3}A\frac{dC}{dx}+\frac{1}{3}C\frac{dA}{dx}+\frac{1}{3}B\frac{dB}{dx}=D$

u. s. w.]

Substituirt man diese Ausdrücke, der Reihe nach, in einander, so erhält man die noch einfacheren Ausdrücke

$$B = \tfrac{1}{2}\frac{d(A^2)}{dx},\ C = \frac{1}{2.3}\frac{d^2(A^3)}{dx^2},\ D = \frac{1}{2.3.4}\frac{d^3(A^4)}{dx^3} \ldots$$

[*Denn es war, wenn man einstweilen, um den Raum zu sparen, dx im Nenner weglässt,*

$$B = A\,dA,$$
$$C = \tfrac{1}{2}(A\,dB + B\,dA),$$
$$D = \tfrac{1}{3}(A\,dC + B\,dB + C\,dA) \text{ etc.}$$

Dieses giebt

$$B = \tfrac{1}{2}d(A^2).$$

Ferner: $dB = dA^2 + A\,d^2A$, *also, wenn man B und dB in C substituirt,*

$$C = \tfrac{1}{2}(A\,dA^2 + A^2d^2A + A\,dA^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(2A\,dA^2 + A^2d^2A)$$
$$= \tfrac{1}{2}d(A^2dA).$$
$$= \frac{1}{2.3}d^2(A^3),$$

Ferner:

$$dC = \tfrac{1}{2}(2dA^3 + 4A\,dA\,d^2A + 2A\,dA\,d^2A + A^2d^3A)$$
$$= (dA^3 + 3A\,dA\,d^2A + \tfrac{1}{2}A^2d^3A),$$

also, wenn man B, C, dB und dC in D substituirt,

$$D = \tfrac{1}{3}\Big(A\,dA^3 + 3A^2dA\,d^2A + \tfrac{1}{2}A^3d^3A$$
$$+ A\,dA^3 + A^2dA\,d^2A$$
$$+ \tfrac{1}{2}(2A\,dA^3 + A^2dA\,d^2A)\Big)$$
$$= \tfrac{1}{3}(3A\,dA^3 + 4\tfrac{1}{2}A^2dA\,d^2A + \tfrac{1}{2}A^3d^3A)$$
$$= \frac{1}{2.3}(6A\,dA^3 + 6A^2dA\,d^2A + 3A^2dA\,d^2A + A^3d^3A)$$
$$= \frac{1}{2.3}d(3A^2dA^2 + A^3d^2A)$$
$$= \frac{1}{2.3}d^2(A^3dA)$$
$$= \frac{1}{2.3.4}d^3A^4 \text{ u. s. w.}$$

also, wenn man das einstweilen weggelassene dx herstellt:

$$B = \frac{1}{2}\frac{d(A^2)}{dx},\ C = \frac{1}{2.3}\frac{d^2(A^3)}{dx^2},\ D = \frac{1}{2.3.4}\frac{d^3(A^4)}{dx^3} \ldots$$

wie oben. Dieses einfache Fortschreitungs-Gesetz ist aber hier nicht allgemein nachgewiesen.] Substituirt man also noch den Werth von A [$= fx$], so erhält man

$$z = x + yfx + \frac{y^2}{2}\frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^3}{2.3}\frac{d^2(fx^3)}{dx^2} + \frac{y^4}{2.3.4}\frac{d^3(fx^4)}{dx^3} \ldots$$

86.

Nun setze man, es solle der Werth einer beliebigen Function φz von z nach Potenzen von z entwickelt werden, so sey $\varphi z = u$. Nimmt man die ersten Ableitungen, um φ wegzuschaffen, so erhält man

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\varphi z}{dz}.\frac{dz}{dx} \text{ und } \frac{du}{dy} = \frac{d\varphi z}{dz}.\frac{dz}{dy},$$

woraus folgt:

$$\frac{du}{dx} : \frac{du}{dy} = \frac{dz}{dx} : \frac{dz}{dy}.$$

Substituirt man den Werth von $\frac{dz}{dx} : \frac{dz}{dy}$, aus der Gleichung $\frac{dz}{dx}(z-x) - y\frac{dz}{dy} = 0$, in (85.), so erhält man folgende Ableitungs-Gleichung erster Ordnung: [$\frac{y}{z-x} = \frac{du}{dx} : \frac{du}{dy}$, *oder*]

$$(z-x)\frac{du}{dx} - y\frac{du}{dy} = 0.$$

Man setze

$$u = P + Qy + Ry^2 + Sy^3 \ldots$$

wo P, Q, R.... Functionen von x sind. Substituirt man diesen Werth von u, nebst dem oben gefundenen von z, so erhält man [*weil* $\frac{du}{dx} = \frac{dP}{dx} + y\frac{dQ}{dx} + y^2\frac{dR}{dx} \ldots$, $\frac{du}{dy} = Q + 2Ry \ldots$ *und* $z - x = yfx + \frac{y^2}{2}\frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^3}{2.3}\frac{d^2(fx^3)}{dx^2} \ldots$ ist.

$$\left(\frac{dP}{dx} + y\frac{dQ}{dx} + y^2\frac{dR}{dx} \ldots\right)\left(yfx + \frac{y^2}{2}\frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^3}{2}\frac{d^2(fx^3)}{dx^2} \ldots\right)$$
$$-y(Q + 2Ry + 3Sy^2 \ldots = 0,$$

oder, mit y dividirt,]

$$\left(\frac{dP}{dx} + y\frac{dQ}{dx} + y^2\frac{dR}{dx} + y^3\frac{dS}{dx} \ldots\right)\left(fx + \frac{y}{2}\frac{d(fx^2)}{dx}\right.$$
$$\left. + \frac{y^2}{2.3}\frac{d^2(fx^3)}{dx^2} \ldots\right) - Q - 2Ry - 3Sy^2 - \ldots = 0,$$

woraus folgt

$$\left[\frac{dP}{dx}fx + \frac{y}{2}\frac{dP}{dx}\frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^2}{2.3}\frac{dP}{dx}\frac{d^2(fx^3)}{dx^2} + \frac{y^3}{2.3.4}\frac{dP}{dx}\frac{d^3(fx^4)}{dx^3} \ldots\right.$$
$$+ y\frac{dQ}{dx}fx + \frac{y^2}{2}\frac{dQ}{dx}\frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{y^3}{2.3}\frac{dQ}{dx}\frac{d^2(fx^3)}{dx^2} \ldots$$
$$+ y^2\frac{dR}{dx}fx + \frac{y^3}{2}\frac{dR}{dx}\frac{d(fx^2)}{dx} \ldots$$
$$+ y^3\frac{dS}{dx}fx \ldots$$
$$= Q + 2yR + 3y^2S + 4y^3T \ldots;$$

also]

$$Q = \frac{dP}{dx}fx$$

$$2R = \frac{dQ}{dx}fx + \frac{1}{2}\frac{dP}{dx}\frac{d(fx^2)}{dx}$$

$$2S = \frac{dR}{dx}fx + \frac{1}{2}\frac{dQ}{dx}\frac{d(fx^2)}{dx} + \frac{1}{2.3}\frac{dP}{dx}\frac{d^2(fx^3)}{dx}\ldots$$

etc.

Substituirt man, der Reihe nach, diese Werthe von Q, R...., so ist leicht zu sehen, dass die Ausdrücke auf folgende einfache Gestalt gebracht werden können:

$$Q = \frac{dP}{dx}fx$$

$$R = \frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{dP}{dx}fx^2\right)}{dx}$$

$$S = \frac{1}{2.3}\frac{d^2\left(\frac{dP}{dx}fx^3\right)}{dx^2} \text{ etc.}$$

[*Um dies zu übersehen, lasse man wieder einstweilen die* dx *weg und setze, der Kürze wegen,* $fx = v$, *so ist oben:*

$$Q = v\,dP,\ 2R = v\,dQ + \tfrac{1}{2}d(v^2)\,dP$$

$$3S = vdR + \tfrac{1}{2}d(v^2)\,dQ + \frac{1}{2.3}d^2(v^3)dP \text{ etc.}$$

Dieses giebt $dQ = dv\,dP + v\,d^2P$, *also*

$$\begin{aligned} 2R &= v\,dv\,dP + v^2\,d^2P + v\,dv\,dP \\ &= 2v\,dv\,dP + v^2\,d^2P \\ &= d(v^2\,dQ), \text{ also} \end{aligned}$$

$$R = \frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{dP}{dx}fx^2\right)}{dx},$$

$$3S = v\,dR + \tfrac{1}{2}d(v^2)(dvdP + vd^2P) + 1\,d^2(v^3)\,dP$$

und da $dR = dv^2\,dP + v\,d^2v\,dP + v\,dv\,d^2P + \tfrac{1}{2}v^2\,d^3P + v\,dv\,d^2P$ *und*

$$d^2(v^3) = d(3v^2\,dv) = 6v\,dv^2 + 3v^2\,d^2v,$$

$$3S = vdv^2dP + v^2d^2vdP + 2v^2dvd^2P + \tfrac{1}{2}v^3d^3P$$
$$+ vdv^2dP + v^2dvd^2P + vdv^2dP + \tfrac{1}{2}v^2d^2vdP$$
$$= 3vdv^2dP + \tfrac{3}{2}v^2d^2vdP + 3v^2dvd^2P + \tfrac{1}{2}v^3d^3P,$$

oder $$S = \frac{1}{2.3}(6vdv^2dP + 3v^2d^2vdP + 3v^2dvd^2P + 3v^2dvd^2P + v^3d^3P)$$

$$= \frac{1}{2.3}d(3v^2dvdP + v^3d^2P)$$

$$= \frac{1}{2.3}d^2(v^3dP), \text{ also}$$

$$S = \frac{1}{2.3}\frac{d^2\left(\frac{dP}{dx}fx^3\right)}{dx^2} \text{ u. s. w.}$$

Der allgemeine Beweis des Fortschreitungs-Gesetzes fehlt auch hier.]

Die Function P bleibt unbestimmt, wegen der Elimination der Function φ. Weil aber $u = \varphi z = \varphi(x + yfx + \ldots)$, so ist klar, dass $\varphi x = P$, [*nemlich für* $y = 0$ *ist* $u = P$ *und für* $y = 0$ *auch* $u = \varphi z = \varphi x$, *also ist* $\varphi x = P$], folglich $\frac{dP}{dx} = \frac{d\varphi x}{dx}$. Mithin ist

$$\varphi z = \varphi x + y\frac{d\varphi x}{dx}fx + \frac{y^2}{2}\frac{d\left(\frac{d\varphi x}{dx}fx^2\right)}{dx^2} + \frac{y^3}{2.3}\frac{d^2\left(\frac{d\varphi x}{dx}fx^3\right)}{dx^3}\ldots$$

ein sehr merkwürdiger und in der ganzen Analysis, besonders bei Umkehrung der Reihen, sehr nützlicher Ausdruck.

87.

Man könnte dieses letzte Resultat auch unmittelbar, vermittelst des Ausdrucks (33.) erhalten. Denn man dürfte nur u als eine Function von y betrachten, und die ersten, zweiten etc. Ableitungen von u nach

u nach y, das heisst $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ suchen. Setzte man darauf $y = o$, so würde man für die Coefficienten P, Q, R, S *etc.* die Reihe

$$u, \frac{dou}{dy}, \frac{d^2ou}{dy^2}, \frac{d^3ou}{dy^3}$$

erhalten.

Alles kommt also darauf an, diese Ableitungen zu finden und ihnen eine einfache und regelmässige Form zu geben. Zu dem Ende wollen wir die beiden, in (85. und 86.) gefundenen Formeln wieder vornehmen, nemlich

$$\frac{dz}{dy} - \frac{dz}{dx} fz = o \text{ und } \frac{du}{dx} : \frac{du}{dy} = \frac{dz}{dx} : \frac{dz}{dy},$$

welche folgende geben

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx} fz \text{ und } \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} fz$$

[*weil aus der ersten Gleichung* $\frac{dz}{dy} : \frac{dz}{dx} = fz$, *also* $\frac{du}{dx} : \frac{du}{dy} = fz$ *folgt*]. Man hat also, erstlich:

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dx} fz.$$

Zweitens. Nimmt man die erste Ableitung nach y, so erhält man

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dx\,dy} fz + \frac{du}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} \frac{dfz}{dz},$$

hingegen, wenn man die erste Ableitung nach x nimmt,

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dx^2} fz + \frac{du}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dfz}{dz}.$$

Substituirt man Dieses in die vorige Gleichung [*für*

$\frac{d^2u}{dy}$], so erhält man

$$\left[\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dx^2}fz^2 + \frac{du}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}\frac{dfz}{dz}fz + \frac{du}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\frac{dfz}{dz},\right.$$

oder, weil $\left.\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}fz \textit{ war,}\right]$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dx^2}fz^2 + 2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dfz}{dz}fz, \text{ oder}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{du}{dx}fz^2\right)}{dx}.$$

Drittens. Nimmt man abermals die erste Ableitung nach y, so erhält man

$$\frac{d^3u}{dy^3} = \frac{d^2\left(\frac{du}{dx}fz^2\right)}{dx\,dy}.$$

Aber $\frac{d\left(\frac{du}{dx}fz^2\right)}{dy} = \frac{d^2u}{dx\,dy}fz^2 + 2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dfz}{dz}.fz.$

Setzt man hierin den obigen Werth von $\frac{d^2u}{dx\,dy}$

$\left[= \frac{d^2u}{dx^2}fz + \frac{du}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dfz}{dz}\right]$, und $\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}fz$,

so erhält man

$$\frac{d\left(\frac{du}{dx}fz^2\right)}{dy}\left[= \frac{d^2u}{dx^2}fz^3 + \frac{du}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}\frac{dfz}{dz}fz^2 + 2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}fz^2\frac{dfz}{dz}\right]$$

$$= \frac{d^2u}{dx^2}fx^3 + 3\frac{du}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dfz}{dz}fz^2 = \frac{d\left(\frac{du}{dx}fz^3\right)}{dx},$$

also, wenn man die erste Ableitung nach x nimmt,

$$\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}fz^2\right)}{dx\,dy} = \frac{d^2\left(\frac{du}{dx}fz^3\right)}{dx^2} = \frac{d^3u}{dy^3}$$

u. s. w.

Da also nun $u = \varphi z$, so ist $\frac{du}{dx} = \frac{d\varphi z}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$, folglich

$$\frac{du}{dy} = fz\frac{d\varphi z}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \left[\textit{denn } \frac{du}{dy} \textit{ war } = \frac{du}{dx}fz\right]$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d\left(fz^2\frac{d\varphi z}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right)}{dx}, \left[\textit{denn } \frac{d^2u}{dy^2} \textit{ war } = \frac{d\left(\frac{du}{dx}fz^2\right)}{dx}\right]$$

$$\frac{d^3u}{dy^3} = \frac{d^2\left(fz^3\frac{d\varphi z}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\right)}{dx^2} \left[\textit{denn } \frac{d^3u}{dy^3} \textit{ war } = \frac{d^2\left(\frac{du}{dx}fz^3\right)}{dx^2}\right]$$

u. s. w.

Nun setze man $y = 0$, so geht die gegebene Gleichung $z = x + yfx$ in $z = x$ über, also ist [*für* $y = 0$]

$$\frac{dz}{dx} = 1, \ \varphi z = \varphi x, \ \frac{d\varphi z}{dz} = \frac{d\varphi x}{dx} \text{ und } fz = fx,$$

also endlich

$$P = \varphi x, \ Q = fx\frac{d\varphi x}{dx}, \ R = \frac{1}{2}\frac{d\left(fx^2\frac{d\varphi x}{dx}\right)}{dx}, \ S = \frac{1}{2 \cdot 3}\frac{d\left(fx^3\frac{d\varphi x}{dx}\right)}{dx^2}$$

u. s. w. wie oben [*in* 86. *Nemlich es wurde angenommen*, $u = P + Qy + Ry^2 + Sy^3 \ldots$ (86.), *wo* $u = \varphi z = \varphi(x + yfz)$, *also ist* P *der Werth von* u *für* $y = 0$, *welches* $P = \varphi x$ *giebt*; Q *ist der Werth von* $\frac{du}{dy}$ *für* $y = 0$, *welches, weil* $\frac{du}{dy} = fz\frac{d\varphi z}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$ *ist, für* $y = 0$, *wo* $fz = fx$, $\frac{d\varphi z}{dz}$

$= \frac{d\varphi x}{dx}$ *und* $\frac{dz}{dx} = 1$ *ist*, $Q = fx \frac{d\varphi x}{dx}$ *giebt u. s. w.*]

Um den Gebrauch dieser Formel an einem Beispiel zu zeigen, sey die Gleichung

$$z = x + yz^m,$$

gegeben, wo x und y gegebene Grössen sind und man den Werth von z^n in eine Reihe nach Potenzen von y verlangt. Hier ist

$$fz = z^m.\ \varphi z = z^n,$$

also auch $fx = x^m$, $\varphi x = x^n$, $\frac{d\varphi x}{dx} = nx^{m-1}$, folglich

$$P = x^n$$

$$Q = nx^{m+n-1}$$

$$R = \frac{n}{2} \frac{d(x^{2m+n-1})}{dx} = \frac{n(2m+n-1)}{2} x^{2m+n-2}$$

$$S = \frac{n}{2.3} \frac{d^2(x^{3m+n-1})}{dx^2} = \frac{n(3m+n-1)(3m+n-2)}{2.3} x^{3m+n-3}$$

etc.

so, dass

$$z^n = x^n + nx^{m+n-1}y + \frac{n(2m+n-1)}{2} x^{2m+n-2} y^2 + \frac{n(3m+n-1)(3m+n-2)}{2.3} x^{3m+n-3} y^3 \ldots$$

etc.

Man sehe auch über diesen Gegenstand die eilfte Anmerkung in der zweiten Auflage der Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen.

[*Der in diesem Abschnitt vorgetragene all-*

gemeine wichtige Satz, hat **Lagrange** *zum Erfinder und führt seinen Namen.* **Laplace** *hat den Satz noch erweitert, auch lässt sich das Ganze noch einfacher abhandeln. Hier wurde gesetzt* $z = x + yfz$ *und* $u = \varphi z$, *also*

$$u = \varphi(x + yfz).$$

Man kann allgemein $z = F(x + yfz)$ *und* $u = \varphi z$, *also*

$$u = \varphi F(x + yfz)$$

setzen und u, *in eine Reihe nach Potenzen von* y *entwickelt, verlangen.*

Um diese Entwickelung zu bewerstelligen, sey

$$fz = w \text{ und } x + yfz = v, \text{ so, dass}$$

$z = F(x + yw) = Fv$ *und* $u = \varphi Fv = \varphi F(x + yw)$; *so ist*

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dv}\left(w + y\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\right)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dv}\left(1 + y\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right),$$

also

$$\frac{\frac{dz}{dy}}{\frac{dz}{dx}} = \frac{w + y\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}}{1 + y\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}},$$

oder

$$\frac{dz}{dy} + y\frac{dw}{dz}\,\frac{dz}{dx}\,\frac{dz}{dy} = w\frac{dz}{dx} + y\frac{dw}{dz}\,\frac{dz}{dx}\,\frac{dz}{dy}, \text{ also}$$

$$\frac{dz}{dy} = w\frac{dz}{x}.$$

Nun ist $\frac{du}{dy} = \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}$ *und* $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$,

also

$$\frac{du}{dy} : \frac{du}{dx} = \frac{dz}{dy} : \frac{dz}{dx}, \text{ oder } \frac{du}{dy}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dz}{dy},$$

oder, weil vorhin $\frac{dz}{dy} = w\frac{dz}{dx}$ war,

$$\frac{du}{dy} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot w\frac{dz}{dx}, \text{ oder}$$

$$1. \quad \frac{du}{dy} = w \cdot \frac{du}{dx}.$$

Hieraus folgt weiter $\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d\left(w\frac{du}{dx}\right)}{dy}$. Aber, weil $w = fz$ und $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$, so ist

$$2. \quad w\frac{du}{dx} = fz \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Man setze $fz\frac{du}{dz} = \frac{d\overset{1}{u}}{dz}$, wo also $\overset{1}{u}$ auf irgend eine Weise von z abhängt, so ist

$$3. \quad w\frac{du}{dx}\,(2) = \frac{d\overset{1}{u}}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{d\overset{1}{u}}{dx}, \text{ also}$$

$$4. \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d\frac{d\overset{1}{u}}{dx}}{dy} = \frac{d^2\overset{1}{u}}{dx\,dy} = \frac{d\frac{d\overset{1}{u}}{dy}}{dx}.$$

Da $\overset{1}{u}$ eben sowohl von z abhängt, als u, so muss, wenn man $\overset{1}{u}$ statt u setzt, eben wie $\frac{du}{dy} = w\frac{du}{dx}$ war (1.), auch

$$5. \quad \frac{d\overset{1}{u}}{dy} = w\frac{d\overset{1}{u}}{dx} \text{ sein.}$$

Setzt man also in $\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d\frac{d\overset{1}{u}}{dy}}{dx}$ (4.) $w\frac{d\overset{1}{u}}{dx}$ statt

$\frac{d\overset{1}{u}}{dy}$, *so erhält man* $\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d\left(w \frac{d\overset{1}{u}}{dx}\right)}{dx}$, *oder, weil*

$\frac{d\overset{1}{u}}{dx} = w \frac{du}{dx}$ (3.), *also* $w \frac{d\overset{1}{u}}{dx} = w^2 \frac{du}{dx}$ *ist,*

$$6.\quad \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d\left(w^2 \frac{du}{dx}\right)}{dx}.$$

Man erhält weiter: $\frac{d^3 u}{dy^3} = \frac{d^2\left(w^2 \frac{du}{dx}\right)}{dx\, dy}$

$= \frac{d\left(\frac{d\left(w^2 \frac{du}{dx}\right)}{dy}\right)}{dx}$. *Man setze*

$$7.\quad w^2 \frac{du}{dx} = \frac{d\overset{2}{u}}{dx}, \text{ so ist}$$

$$8.\quad \frac{d^3 u}{dy^3} = \frac{d^2\left(w^2 \frac{du}{dx}\right)}{dx\, dy} = \frac{d^3 \overset{2}{u}}{dx^2 dy}.$$ *Aber, wie oben*

(5.) *ist wiederum*

$$9.\quad \frac{d\overset{2}{u}}{dy} = w \frac{d\overset{2}{u}}{dx},$$

also ist $\frac{d\overset{2}{u}}{dy} = w^3 \frac{du}{dx}$, *weil* $\frac{d\overset{2}{u}}{dx} = w^2 \frac{du}{dx}$

war (7.), *also ist aus* (8.)

$$10.\quad \frac{d^3 u}{dy^3} = \frac{d^2\left(w^3 \frac{du}{dx}\right)}{dx^2}$$

u. s. w. Es ist leicht zu sehen, dass allgemein

$$\frac{d^n u}{dy^n} = \frac{d^{n-1}\left(w^n \frac{du}{dx}\right)}{dx^{n-1}} \text{ ist.}$$

Nun ist allgemein

$$11.\quad u = \overset{0}{u} + y\frac{d\overset{0}{u}}{dy} + \frac{y^2}{2}\frac{d^2\overset{0}{u}}{dy^2} + \frac{y^3}{2.3}\frac{d^3\overset{0}{u}}{dy^3}\ldots$$

wenn man rechterhand überall $y = 0$ *setzt; also ist aus* (1. 6. 10 *etc.*)

$$12.\quad u = \overset{0}{u} + y.\overset{0}{w}\frac{d\overset{0}{u}}{dx} + \frac{y^2}{2}\frac{d\left(\overset{0}{w}{}^2\frac{d\overset{0}{u}}{dx}\right)}{dx} + \frac{y^3}{2.3}\frac{d^2\left(w^3\frac{d\overset{0}{u}}{dx}\right)}{dx^2}\ldots$$

$$\ldots + \frac{y^n}{2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}\left(\overset{0}{w}{}^n\frac{d\overset{0}{u}}{dx}\right)}{dx^{n-1}}\ldots$$

wo rechterhand überall $y = 0$ *gesetzt werden muss, welches giebt,*

$$z = Fx,\ \textit{also}\ w = fx,\ u = \varphi Fx.$$

Diese Entwickelungs-Art hat den Vorzug, dass sie die Allgemeinheit des Fortschreitungs-Gesetzes der Reihe sichtbar macht.]

Sechzehnter Abschnitt.

Allgemeine Methode, die Stammgleichung einer linearen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen mehreren veränderlichen Grössen, desgleichen die Stammgleichung einer beliebigen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen drei veränderlichen Grössen zu finden.

88.

Wir haben gesehen, wie sich eine beliebige, in einer gegebenen Gleichung vorkommende Function, vermittelst der Ableitungs-Gleichungen der gegebenen, erster Ordnung, wegschaffen lässt. Die Wegschaffung ist noch auf eine andere, in gewisser Art, nach einfachere, Weise möglich, die sich auf Betrachtungen gründet, wie in (82.).

Man nehme im Allgemeinen die Gleichung

$$F(xyz\varphi p) = 0$$

an, in welcher

$$p = fxyz$$

ist. Die beiden durch F und f bezeichneten Functionen sind gegeben, und die durch φ bezeichnete Function sey willkürlich, so kann man setzen, y sey eine solche Function von x, dass die erste Ableitung von p Null ist, [*nemlich, weil die Abhängigkeit der Grösse y von x durch die gegebene eine Gleichung zwischen drei veränderlichen Grössen, nicht völlig bestimmt wird,*] p kann also alsdann,

in $F(xyz\varphi p)$, als constant behandelt werden, sobald man nur $\frac{dy}{dx}$ so bestimmt, dass die erste Ableitung von $F(xyz)$ [$= p$ *nach* x] Null ist.

Wie in (82.) [*wegen der veränderten Zeichen nicht wörtlich übersetzt*] sind die ersten Ableitungs-Gleichungen der Gleichungen $F(xyz\varphi p) = o$ und $fxyz = p = o$, wenn man, der Kürze wegen, $F(xyz\varphi p) = u$ setzt,

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\right) = o \text{ und}$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\right) = o.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen enthält p, die zweite nicht. Die zweite dient zur Wegschaffung von $\frac{dy}{dx}$ [*mittelst Verbindung mit der ersten*,] die erste, verbunden mit der Stammgleichung, dient zur Wegschaffung der unbekannten Grösse φp.

Diese Methode hat den Vortheil, dass sie auf Gleichungen mit mehreren willkürlichen Functionen von p anwendbar ist.

Es sey z. B. die gegebene Gleichung:

$$F(x, y, z, \varphi p, \Psi p) = o,$$

so findet man erst, durch das obige Verfahren, eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ohne φp, die aber noch Ψp enthält. Wendet man auf diese neue Gleichung das nemliche Verfahren an, und eliminirt von Neuem die in ihrer ersten Ableitungs-Gleichung vorkommende Grösse $\frac{dy}{dx}$, vermittelst der nemlichen obigen Gleichung, so erhält man eine Gleichung zwei-

ter Ordnung, die Ψp enthält, und aus welcher man Ψp, mittelst der Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, wegschaffen kann u. s. w. welche auch die Zahl der willkürlichen Functionen von der Grösse p sein mag.

Enthielte aber die gegebene Gleichung die Functionen φp und Ψq, wo p und q verschiedene Functionen von x, y und z sind, so liesse sich keine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung ohne φp und Ψp und den Ableitungen dieserGrössen finden. Dann müsste man zu höheren Ableitungs-Gleichungen übergehen. [*Da dieser Gegenstand in der 20. Vorlesung im zweiten Bande ausführlicher abgehandelt wird, so können die hier etwa nöthigen Erläuterungen bis dahin verschoben bleiben.*]

89.

Man nehme die Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung, welche durch Wegschaffung einer beliebigen Function φp entstehen können und setze, der Kürze wegen, dass die Stammgleichung, welches immer möglich ist, die Gestalt

$$Fxyz = \varphi p \text{ habe, wo } p = fxyz,$$

[*nemlich, wenn man sich oben aus* $u = F(xyz\varphi p) = 0$, φp *entwickelt, vorstellt,*] so erhält man [*wenn jetzt* $Fxyz = \varphi p = p$ *ist*] die beiden Ableitungs-Gleichungen

$$\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

[*Nemlich, wegen* $v - \varphi p = 0$, *ist* $\frac{dv}{dx} - \frac{d\varphi p}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}$ $= 0$. *Da nun, nach der Voraussetzung* (88.) $\frac{dy}{dx}$ *so bestimmt werden soll, dass die erste Ableitung von p nach x, Null ist, so ist* $\frac{dp}{dx} = 0$; *folglich auch* $\frac{d\varphi p}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = 0$ *und mithin* $\frac{dv}{dx} = 0$, *welches die obigen beiden Gleichungen giebt.*]

Diese beiden Gleichungen enthalten kein φp und es braucht nur noch $\frac{dy}{dx}$ eliminirt zu werden. Das Resultat der Elimination ist

$$\frac{\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}}{\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}} = \frac{\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}}{\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}},$$

woraus folgende Ableitungs-Gleichung erster Ordnung folgt:

$$\Big[\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} + \frac{dv}{dx}\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}\frac{dp}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dy}$$

$$= \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{dp}{dx} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dy}\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dx}$$

oder:]

$$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} - \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{dz}{dx}\left(\frac{dv}{dz} \cdot \frac{dp}{dy} - \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dp}{dz}\right)$$

$$+ \frac{dz}{dy}\left(\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dp}{dz} - \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dp}{dx}\right) = 0,$$

die bloss x, y, z und $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ enthält.

Setzt man also, der Kürze wegen,

$$\frac{\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dp}{dz}-\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dp}{dx}}{\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dp}{dy}-\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dp}{dz}}=M \text{ und}$$

$$\frac{\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dp}{dy}-\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dp}{dx}}{\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dp}{dy}-\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dp}{dz}}=N,$$

so kann die Gleichung auf die Gestalt

$$\frac{dz}{dx}+M\frac{dz}{dy}+N=0$$

gebracht werden. [*Nemlich, wenn man oben mit dem Coefficienten zu* $\frac{dz}{dx}$ *dividirt.*] Daraus folgt:

Erstlich, dass alle Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung zwischen x, y, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, die sich nicht auf diese Form bringen lassen, keine Stammgleichung zwischen x, y, z und φp haben können, wo p eine Function von x, y, z ist.

Zweitens, dass alle Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung, die sich auf die obige Form bringen lassen, immer eine Stammgleichung von der angenommenen Form $Fxyz=\varphi p$ haben können, wo $p=fxyz$. [*Der zweite Schluss ist evident, der erste ist es weniger; denn aus dem besondern Falle folgt nicht das Allgemeine.*]

Da nemlich die Werthe der Coefficienten M und N in Functionen von x und y gegeben sind, so hat man zwei Gleichungen, aus welchen sich die, mit F und f bezeichneten, Functionen bestimmen lassen. Die mit φ bezeichnete Function bleibt unbestimmt.

Da diese Aufgabe eine der interessantesten in

der Theorie der Functionen ist, so will ich davon eine directe Auflösung geben.

90.

Man betrachte, was angeht, [*wie in* 82.] y und z als Functionen von x, deren Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ sind und dann die beiden Grössen

$$\frac{dz}{dx} + N \text{ und } M\frac{dz}{dx} + N\frac{dy}{dx}.$$

Setzt man darin die obigen Werthe von M und N, so erhält man

$$\left[\frac{dz}{dx} + \frac{\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dp}{dy} - \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dp}{dx}}{\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dp}{dy} - \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dp}{dz}} = \frac{dz}{dx} + N \textit{ und}\right.$$

$$\frac{\frac{dv}{dx}\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dx} - \frac{dv}{dz}\frac{dp}{dx}\frac{dz}{dx}}{\frac{dv}{dz}\frac{dp}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{dp}{dz}} + \frac{\frac{dv}{dx}\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} - \frac{dv}{dy}\frac{dp}{dx}\frac{dy}{dx}}{\frac{dv}{dz}\frac{dp}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{dp}{dz}}$$

$$\left. = M\frac{dz}{dx} + N\frac{dy}{dx}, \textit{ oder}\right]$$

$$\left[\frac{dz}{dx} + N = \right]\frac{\frac{dp}{dy}\left(\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dv}{dx}\right) - \frac{dv}{dy}\left(\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dp}{dx}\right)}{\frac{dv}{dz}\frac{dp}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{dp}{dz}}$$

und

$$\left[M\frac{dz}{dx} + N\frac{dy}{dx} = \right]\frac{\frac{dv}{dx}\left(\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}\right) - \frac{dp}{dx}\left(\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dv}{dz}\frac{dp}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{dp}{dz}}$$

Addirt und substrahirt man, im Zähler des ersten Ausdrucks, die Grösse $\frac{dv}{dy} \times \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}$, und, im Zäh-

ler des zweiten Ausdrucks, die Grösse $\frac{dv}{dx} \times \frac{dp}{dx}$ [*so ist der Zähler von* $\frac{dz}{dx} + N$, *gleich*

$$\frac{dp}{dy}\left(\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)-\frac{dv}{dy}\left(\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dp}{dx}\right)$$

und der Zähler von $M\frac{dz}{dx} + N\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dv}{dx}\left(\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dp}{dx}\right)-\frac{dp}{dx}\left(\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)\Big].$$

Nun ist $\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dv}{dx}=\frac{d(v)}{dx}$ und

$$\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dp}{dx}=\frac{d(p)}{dx},$$

[*wo das Einschliessen in Klammern anzeigt, dass* x *überall, wo es in* v *und* p *vorkommt, in und ausserhalb* y *und* z, *verändert werden soll, während* $\frac{dv}{dx}$, *oder* $\frac{dp}{dx}$, *ohne Klammern, nur auf die Veränderung von* x, *ausserhalb* y *und* z, *deutet. Unter die vielen Mängel der alten Zeichen, gehört auch der, dass sie kein bestimmtes Mittel haben, diese beiden Fälle zu unterscheiden*], also ist

$$\frac{dz}{dx}+N=\frac{\frac{dp}{dy}\frac{d(v)}{dx}-\frac{dv}{dy}\frac{d(p)}{dx}}{\frac{dv}{dz}\frac{dp}{dy}-\frac{dv}{dy}\frac{dp}{dz}}$$

$$M\frac{dz}{dx}+N\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dv}{dx}\frac{d(p)}{dx}-\frac{dp}{dx}\frac{d(v)}{dx}}{\frac{dv}{dz}\frac{dp}{dy}-\frac{dv}{dy}\frac{dp}{dz}}.$$

Setzt man also

$$\frac{dz}{dx} + N = 0 \text{ und } M\frac{dz}{dx} + N\frac{dy}{dx} = 0,$$

so bedeuten diese Gleichungen so viel als

$$\frac{d(v)}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d(p)}{dx} = 0.$$

[Denn, $\frac{d(v)}{dx} = 0$ *und* $\frac{d(p)}{dx} = 0$ *in die vorigen Ausdrücke von* $\frac{dz}{dx} + N$ *und* $M\frac{dz}{dx} + N\frac{dy}{dx}$ *substituirt, macht diese beiden Grössen verschwinden. Aber es folgt aus* $\frac{dz}{dx} + N = 0$ *und* $M\frac{dz}{dx} + N\frac{dy}{dx} = 0$ *nicht gerade* $\frac{d(v)}{dx} = 0$ *und* $\frac{d(p)}{dx} = 0$, *sondern vielmehr* $\frac{d(v)}{dx} : \frac{d(p)}{dx} = \frac{dv}{dy} : \frac{dp}{dy}$

$$\text{und } \frac{d(v)}{dx} : \frac{d(p)}{dx} = \frac{dv}{dx} : \frac{dp}{dx},$$

also blos $\frac{dv}{dy} : \frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dx} : \frac{dp}{dx}$, *oder*

$$\frac{dv}{dy} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Eigentlich also folgt, umgekehrt aus, $\frac{d(v)}{dx} = 0$ *und* $\frac{d(p)}{dx} = 0$:

$$\frac{dz}{dx} + N = 0 \text{ und } M\frac{dz}{dx} + N\frac{dy}{dx} = 0.]$$

Die Stammgleichungen von $\frac{d(v)}{dx} = 0$ und $\frac{d(p)}{dx} = 0$, sind,

$$v = A \text{ und } p = B,$$

wo A und B willkürliche Constanten bedeuten, so, dass

dass diese Stammgleichungen, wegen der beiden willkürlichen Constanten, vollständig sind.

Es kann kommen, dass man, wenn man die Stammgleichungen von $\frac{dz}{dx} + N$ und $M\frac{dz}{dx} + N\frac{dy}{dx} = 0$ sucht, selbige nicht unter der obigen Form findet. Sie müssen indessen, welche Gestalt sie auch haben mögen, sobald sie zwei willkürlichen Constanten a und b enthalten, unter der obigen Form begriffen, und die Constanten A und B können nur Functionen der Constanten a und b sein. Nimmt man also aus den Stammgleichungen die Werthe der Constanten a und b in x, y, z und nennt ihre Werthe P und Q, so, dass die Gleichungen, durch welche sie ausgedrückt werden $P = a$ und $Q = b$ sind, so folgt, dass $u = Fxyz$ und $p = Fxyz$, auch nur Functionen von P und Q sind [*weil sie, wie P und Q, von x, y und z abhängen*].

Da also nun die Stammgleichung, von welcher die erste Ableitungs-Gleichung $\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} + N = 0$ hergeleitet ist, die Form

$$Fxyz = \varphi p = \varphi fxyz$$

hat, so ist diese Stammgleichung nichts anders, als

$$\text{Funct.}\,(PQ) = \varphi\,(\text{Funct.}\,(PQ)),$$

wo die durch φ bezeichnete Abhängigkeit willkürlich bleibt. Hieraus folgt, dass P eine willkürliche Function von Q ist, so dass die Stammgleichung von der Ableitungs-Gleichung der ersten Ordnung

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} + N = 0,$$

auf die sehr einfache Form

$$P = \varphi L$$

gebracht werden kann, wo die durch φ bezeichnete Abhängigkeit willkürlich ist. Diese Methode reducirt, wie man sieht, die Bestimmung der Function zweier veränderlichen Grössen auf die Bestimmung zweier Functionen einer veränderlichen Grösse. Sie ist, besonders wegen der Einfachheit und Allgemeinheit des Resultates, merkwürdig.

91.

Die Methode kann auch auf Functionen mehrerer veränderlichen Grössen ausgedehnt werden. Es sey z. B. u eine Function dreier veränderlichen Grössen, für welche die Gleichung

$$F(x, y, z, u) = \varphi(p, q)$$

gegeben ist, wo p und q gegebene Functionen von x, y, z, u sind und $\varphi(p, q)$ eine beliebige Function von p, q ist, so findet man, durch eine ähnliche Rechnung, wie in (89.), wenn man y und z als Functionen von x betrachtet und die ersten Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ nach der Voraussetzung bestimmt, dass p und q constant sein sollen, eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, von der Function φ hergenommen, und von folgender Gestalt:

$$\frac{du}{dx} + L\frac{du}{dy} + M\frac{du}{dz} + N = 0,$$

wo L, M, N gegebene Functionen von x, y, z, u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ und $\frac{du}{dz}$ sind. Alle Gleichungen zwischen

x, y, z, u und den ersten Ableitungen von u die nicht von dieser Form sind, können von keiner Stammgleichung der angenommenen Form herkommen.

Für die Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung, die sich auf die obige Form bringen lassen, findet man ferner, durch eine ähnliche Rechnung, wie im vorigen Absatz, dass, wenn man y, z, u als Functionen von x betrachtet, die durch die drei Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{du}{dx}+N=0,\ L\frac{du}{dx}+N\frac{dy}{dx}=0,\ M\frac{du}{dx}+\frac{dz}{dx}=0$$

bestimmt werden und die Stammgleichungen mit drey willkürlichen Constanten a, b, c zu diesen Gleichungen sucht, hernach aber die Werthe dieser Constanten aus diesem nemlichen Gleichungen nimmt, so, dass

$$a=P,\ b=Q,\ c=R,$$

wo P, Q, R gegebene Functionen von x, y, z und u sind, dass dann

$$P=\varphi(Q,R),$$

die Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung ist, in welcher $\varphi(Q,R)$ eine willkürliche Function von Q und R bedeutet.

Diese Methode ist einfacher und directer in der zwanzigsten Vorlesung über die Functionen-Rechnung [*im zweiten Theil*] vorgetragen, auf welche wir verweisen. [*Dort findet man dieses Alles vollständiger und deutlicher.*]

92.

Wenn man oben, zur Bestimmung von z in x und y, eine beliebige Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen x, y, z, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ hätte, die sich nicht auf die Form (89.) bringen lässt, so reicht die Methode nicht mehr zu. Man kann inzwischen die gegebene Gleichung immer auf die Form (91.) bringen, wenn man eine veränderliche Grösse mehr einführt.

Es sey also die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = F\left(x, y, z, \frac{dz}{dy}\right)$$

gegeben, wo die durch F angedeutete Abhängigkeit bestimmt ist, so setze man $\frac{dz}{dy} = u$. Da z von x und y abhängt, so hängt auch offenbar u von x und y ab. Nimmt man also die ersten Ableitungen nach x allein, so ist $\frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{du}{dx}$. Nun geht die gegebene Gleichung in

$$\frac{dz}{dx} = F(x, y, z, u)$$

über. Nimmt man die erste Ableitung nach y allein, und erinnert sich, dass z und u Functionen von x und y sind, so erhält man [*wenn man der Kürze wegen*, $F(x, y, z, u) = v$ *setzt*]

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dy}.$$

Substituirt man also $u = \frac{dz}{dy}$ und $\frac{du}{dx} = \frac{d^2 z}{dx\,dy}$ so erhält man

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} + u \cdot \frac{dv}{dz} + \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dy},$$

wo die Grössen $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dv}{dz}$ und $\frac{dv}{du}$ gegebene Functionen von x, y, z und u sind.

Diese Gleichung passt nun für den obigen Fall, wo u eine Function der, als unabhängig von einander betrachteten Grössen x, y, z ist. In der That hindert Nichts, die Grössen x, y, z als unabhängig von einander und u blos als Function von x, y, z anzusehen, in so fern man nur auf eine, dieser Voraussetzung angemessene Weise, die ersten Ableitungen $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$, welche sich auf x nnd y allein beziehen, bestimmt.

Da z wesentlich von x und y abhängt [*nicht wörtlich übersetzt*], so ist der vollständige Werth der ersten Ableitung von u, nach x: $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$, [*nemlich, weil* $u = \frac{dz}{dy}$ *als Function von* z *betrachtet wird*] und nach y: $\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}$. Diese Werthe sind diejenigen, welche in der obigen Gleichung blos durch $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ bezeichnet worden sind. Nun aber ist vorausgesetzt worden, $\frac{dz}{dy} = u$, und, vermöge der gegebenen Gleichung, hat man $\frac{dz}{dx} = F(x, y, z, u) = v$, also sind die vollständigen Ausdrücke, welche für $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ gesetzt werden

müssen, $\frac{du}{dx} + v . \frac{du}{dz}$ und $\frac{du}{dy} + u . \frac{du}{dz}$. Substituirt man dieselben in die letzte Gleichung zwischen u, $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ und ordnet die Glieder nach den Grössen $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ und $\frac{du}{dz}$, so erhält man

$$\left[\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dz} = \frac{dv}{dy} + u\frac{dv}{dz} + \frac{dv}{du} . \frac{du}{dy} + u\frac{dv}{du} . \frac{du}{dz},\right.$$

oder]

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{du} . \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\left(v - u\frac{dv}{du}\right) - u\frac{dv}{dz} - \frac{dv}{dy} = o.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Formel in (91.) $\left[\frac{du}{dx} + L\frac{du}{dy} + M\frac{du}{dz} + N = o\right]$, so erhält man

$$L = -\frac{dv}{du},$$

$$M = v - u\frac{dv}{du},$$

$$N = -\frac{dv}{dy} - u\frac{dv}{dz},$$

so, dass die drei Gleichungen, $\left[\frac{du}{dx} + N = o,\right.$ $L\frac{du}{dx} + N\frac{dy}{dx} = o$ *und* $M\frac{du}{dx} + N\frac{dz}{dx} = o$ (99.)] aus welchen y, z, u in x bestimmt werden müssen,

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - u\frac{dv}{dz} = o,$$

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{du} + \left(\frac{dv}{dy} + u\frac{dv}{dz}\right)\frac{dy}{dz} = o \text{ und}$$

$$\left(v - u\frac{dv}{du}\right)\frac{du}{dx} - \frac{dz}{dx}\left(\frac{dv}{dy} + u\frac{dv}{dz}\right) = 0$$

sind. Die Schwierigkeit ist also auf die Aufsuchung der Stammgleichungen hiervon reducirt. Es ist aber hinreichend, eine Stammgleichung zu haben; die andern beiden sind unnöthig.

93.

Denn man setze, die drei Stammgleichungen mit drei willkürlichen Constanten a, b, c wären gefunden und P, Q, R wären die daraus folgenden Werthe der Constanten, so wäre, vermöge der allgemeinen Form der Stammgleichung in u (91.)

$$P = \varphi(Q, R).$$

Diese Stammgleichung, in welcher φ eine willkürliche Abhängigkeit bezeichnet, thut, in ihrem ganzen Umfange, der Ableitungs-Gleichung erster Ordnung in u genug, wenn man u als Function von x, y und z betrachtet. Aber u ist gleich $\frac{dz}{dy}$ gesetzt worden und z soll, vermöge der gegebenen Gleichung, eine Function von x und y sein. Also ist die Gleichung $P = \varphi(Q, R)$ zu allgemein und man muss die Beschränkungen suchen, welche die willkürlichen Functionen, rücksichtlich der beiden Grössen P und Q, unterworfen sind, damit die Gleichung genau der gegebenen Gleichung entspreche.

Aber, ohne uns auf diese Untersuchung einzulassen, bemerke man, dass man, welche auch die wahre Form der willkürlichen Function sein mag, sie einer Constante gleich setzen kann, so, dass $P = a$; das heisst: die Stammgleichung einer der drei obigen

Gleichungen mit einer willkürlichen Constante giebt einen Werth von u, welcher der Gleichung in u genugthut.

Setzt man nun wieder $\frac{dz}{dy}$ für u in die Gleichung, so erhält man eine Gleichung erster Ordnung zwischen x, y, z und $\frac{dz}{dy}$, in welcher z als Function von x und y betrachtet werden muss. Da aber diese Gleichung nur die erste Ableitung $\frac{dz}{dy}$ von z nach y enthält, so kann man x als constant und z blos als Function von y betrachten. Man findet also ihre Stammgleichung wie bei Functionen einer einzelnen veränderlichen Grösse, und weil x als constant betrachtet ist, so kann die in der Stammgleichung vorkommende Constante auch eine beliebige Function von x sein, welche wir p nennen wollen.

Man hat also auf diese Weise einen Werth von z in x und y, welche der gegebenen Gleichung genugthut, mit zwei Grössen a und p. Die Constante a bleibt willkürlich, aber die Function p muss der Gleichung gemäss bestimmt werden. Zu dem Ende darf man nur den zugehörigen Ausdruck von z substituiren. Alle Glieder mit y werden sich aufheben und es werden nur die Glieder übrig bleiben, welche x, p und $\frac{dp}{dx}$ enthalten, so, dass man abermals eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen x und p hat, deren Stammgleichung den Werth von p in x giebt, mit einer neuen willkürlichen Constante b.

So erhält man endlich einem Werth von z in

x und y mit zwei willkürlichen Constanten a und b, welcher der gegebenen Gleichung, unabhängig von den Constanten, genugthut. Dieser Werth ist zwar nur ein besonderer, aber nach (83.) kann man den allgemeinen Werth von z finden, der eine willkürliche Function enthält.

Denn wenn $f(x, y, z, a, b) = 0$ die zur Bestimmung von z gefundene Gleichung ist, so mache man $b = \varphi a$ und setze die erste Ableitung von $f(x, y, z, a, \varphi a)$, nach a allein, Null; so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung von a, und die Gleichung $f(x, y, z, a, \varphi a) = 0$ ist die gesuchte Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung in welcher die durch φ bezeichnete Abhängigkeit willkürlich bleibt.

Ich habe geglaubt, diese Methode, um sie recht deutlich zu machen, genau auseinander setzen zu müssen. Sie ist neu und reducirt die Zurückleitung von Functionen mit zwei veränderlichen Grössen, die nicht über die ersten Ordnung hinausgehen, auf Zurückleitung der Functionen mit einer einzelnen veränderliche Grösse. [*Da alles dieses in der zwanzigsten Vorlesung im zweiten Bande ausführlicher wieder vorkommt, so können alle etwa nöthige Bemerkungen bis dahin ausgesetzt bleiben. Lagrange sagt dort selbst, dass hier noch einige Schwierigkeiten übrig geblieben sind.*]

94.

Um die Methode durch ein Beispiel zu erläutern, welches nur eine leichte Rechnung erfordert, setze man, die gegebene Gleichung sey von der Form

$$\frac{dz}{dx} = Ay + Bz + f\left(x, \frac{dz}{dy}\right),$$

wo A und B Constanten sind und $f\left(x, \frac{dz}{dy}\right)$ eine beliebige Function von x und $\frac{dz}{dy}$ ist. Vergleicht man diese Gleichung mit dem allgemeinen Ausdrucke der vorigen Nummer, so erhält man

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dy}\right) = Ay + Bz + f\left(x, \frac{dz}{dy}\right), \text{ also}$$

$$F(x, y, z, u) = Ay + Bz + f(x, u)\,[= v].$$

Nimmt man die ersten Ableitungen nach y und z, so erhält man

$$\frac{dv}{dy} = A \text{ und } \frac{dv}{dz} = B,$$

so dass, wenn man diese Ausdrücke in die drei Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung zwischen x, y, z und y setzt (92.) für die erste folgende erhält

$$\frac{du}{dx} - A - Bu = 0,$$

welche, weil sie nur die veränderliche Grösse u enthält, die als Function von x betrachtet wird, unabhängig von den beiden andern, eine Stammgleichung haben wird. In der That ist der erste Theil dieser Gleichung, wenn man sie mit e^{-Bx} multiplicirt, wo e die Zahl bedeutet, deren natürlicher Logarithme $= 1$ ist, der ersten Ableitung von $ue^{-Bx} + \frac{Ae^{-Bx}}{B}$ gleich, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man, nach dem dritten Abschnitt, von dieser Grösse die erste Ableitung nimmt. [*Selbige ist* $ue^{-Bx}.B$

$+\frac{du}{dx} e^{-Bx} \frac{Ae^{-Bx}.B}{B}$, *also ist* $(-uB + \frac{du}{dx} - A) e^{-Bx} = o$, *oder* $\frac{du}{dx} - A - Bu = o$, *welches mit der gegebenen Gleichung übereinstmmt.*] Da also der zweite Theil der Gleichnung Null ist, so erhält man, wenn man zu den Stammgleichungen übergeht, $\left(u + \frac{A}{B}\right) e^{-Bx} = a$, wo a eine willkürliche Constante ist. Diese Gleichung giebt

$$u = -\frac{A}{B} + ae^{Bx}.$$

Setzt man für u seinen Werth $\frac{dz}{dy}$, so erhält man die erste Ableitungs - Gleichung

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{A}{B} + ae^{Bx}.$$

In dieser Gleichung kann man, weil $\frac{dz}{dy}$ die erste Ableitung von z nach y allein anzeigt, x als constant, und z als Function von y betrachten. Da nun das zweite Glied weder y noch z enthält, so ist dessen Stammgrösse [*nach y*] blos $\left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right) y$. Man erhält also, wenn man die Stammgleichung nach y allein nimmt,

$$z = \left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right) y + p,$$

wo p irgend eine Function von x bezeichnet, die als Constante hinzugefügt werden kann, weil ihre erste Ableitung nach y Null ist.

Aus diesem Ausdruck für z erhält man, für des-

sen erste Ableitungen nach x und y, wenn man ihn ableitet, Folgendes

$$\frac{dz}{dx} = aBe^{Bx}y + \frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{A}{B} + ae^{Bx}.$$

Substituirt man diese Grösse in die gegebene Gleichung $\left[\frac{dz}{dy} = Ay + Bz + f\left(x, \frac{dz}{dx}\right)\right]$, so erhält man

$$aBe^{Bx} + \frac{dp}{dx} = Ay + B\left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right)y + Bp + f\left(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right),$$

welches sich auf

$$\frac{dp}{dx} = Bp + f\left(x, -\frac{A}{B} - ae^{Bx}\right),$$

reducirt, wo y, wie man sieht, verschwunden ist, so dass sich p durch x allein bestimmen lässt.

Man multiplicire diese Gleichung mit e^{-Bx} und setze

$$e^{-Bx}f\left(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right) = \frac{dFx}{dx},$$

so erhält man

$$\frac{d(pe^{-Bx})}{dx} = \frac{dFx}{dx},$$

[*denn* $\frac{d(pe^{-Bx})}{dx}$ *ist* $\frac{dp}{dx}e^{-Bx} - pBe^{-Bx} = e^{-Bx}\left(\frac{dp}{dx} - p\right)$, *welches, vermöge der gegebenen Gleichung*, $= e^{-Bx}f(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}) = \frac{dFx}{dx}$

ist.] Hiervon ist die Stammgleichung

$$pe^{-Bx} = Fx + b,$$

wo b eine willkürliche Constante ist. Daraus folgt

$$p = e^{Bx}(Fx + b).$$

Substituirt man Dieses in den oben gefundenen Werth von z $[z = (-\frac{A}{B} + ae^{Bx})y + p]$, so erhält man

$$z = (-\frac{A}{B} + ae^{Bx})y + (Fx + b)e^{Bx}.$$

Dieses ist zwar nur ein einzelner Werth von z, aber er giebt, wenn man $b = \varphi a$ setzt und a aus der Gleichung

$$y + \frac{dFx}{da} + \frac{d\varphi a}{da} = 0.$$

bestimmt, den vollständigen Werth. [*Nemlich, die gefundene Gleichung* $z = (-\frac{A}{B} + ae^{Bx})y + (Fx + b)e^{Bx}$ *giebt, wenn man die erste Ableitung nach a nimmt, weil z,* $-\frac{A}{B}$ *und y kein a enthalten, sondern blos Fx und* $b = \varphi a$:

$$0 = e^{Bx}.y + \frac{dFx}{da}e^{Bx} + \frac{d\varphi a}{da}e^{Bx}, \text{ oder}$$

$$y + \frac{dFx}{da} + \frac{d\varphi a}{da} = 0],$$

Die Rechnung ist einfacher, wenn $B = 0$. Man findet, wenn man $f(x, Ax + a) = \frac{dFx}{dx}$ setzt,

$$z = (Ax + a)y + Fx + \varphi a \text{ und}$$

$$y = \frac{dFx}{da} + \frac{d\varphi a}{da},$$

wo a eliminirt werden muss. [*Denn, wenn* $B = 0$, *so ist oben, im Anfange, statt* $\frac{du}{dx} - A - Bu = 0$, *jetzt* $\frac{du}{dx} - A = 0$, *also* $u = Ax + a$, *statt* $u = -\frac{A}{B} + ae^{Bx}$. *Also tritt, für* $B = 0$, Ax *an die Stelle von* $-\frac{A}{B}$.]

Diese letzte Methode ist indessen noch einigen Schwierigkeiten unterworfen, die in der schon erwähnten zwanzigsten Vorlesung vollständig gehoben sind, wo man diesen Gegenstand aus einem allgemeineren Gesichts-Punct abgehandelt findet.

Wir wollen uns über das was die Functionen mehreren veränderlichen Grössen betrifft nicht weiter verbreiten. Wer mit dem Calcul partieller Differentiale bekannt ist, wird leicht im Stande sein, ihn mit der Functionen-Rechnung zu vergleichen und dieselbe auch darauf auszudehnen.

Unsere Absicht bei diesem ersten Theile der Abhandlung ist nur gewesen, die Theorie der Functionen und Ableitungs-Gleichungen rein analytisch [*algebraisch*] vorzutragen und sie von allen fremdartigen Voraussetzungen und Ansichten unabhängig zu machen.

Zweiter Theil.

Anwendung der Theorie der Functionen auf die Geometrie.

Erster Abschnitt.

Ueber die verschiedenen Ansichten von den Tangenten. Theorie der Tangenten und der Berührung von verschiedenen Ordnungen nach den Grundsätzen der Geometrie der Alten.

1.

Die gewöhnlichen Operationen der Algebra sind in der Theorie der Curven so lange hinreichend, als es nur darauf ankommt, Verhältnisse beliebiger, in den Curven gezogenen, und von ihnen begrenzten Linien zu finden. Dagegen gehört die Bestimmung der Tangenten, der Krümmungs-Halbmesser, der Flächen unter den Coordinaten u. s. w. wesentlich für die Functionen-Rechnung. [*Wenigstens werden diese Untersuchungen durch die Ableitungs- und Zurückleitungs-Operationen sehr erleichtert.*]

Nach der Geometrie der Alten ist eine grade Linie dann die Tangente einer krummen, wenn sie einen Punct mit der Curve gemein hat und wenn durch diesen Punct keine andere, zwischen ihr und der Curve durchgehende, grade Linie gezogen werden kann. Danach bestimmten die Alten die Tangenten der wenigen Curven, die sie untersuchten. [*Zuweilen findet man in den Lehrbüchern die zweite Bedingung bei der Definition der Tangenten weggelassen und die Tangenten blos als grade Linien erklärt, die nur einen Punct mit der Curve gemein haben. Diese Erklärung ist unrichtig, denn es sind viele solche Linien möglich, die nicht Tangenten sind.*] Aber seitdem man die Curven, bei der Anwendung der Algebra auf die Geometrie, der Analysis unterworfen hat, sind auch andere Ansichten von den Tangenten aufgestellt worden. Man hat sie als Secanten betrachtet, deren Durchschnitts-Puncte mit der Curve zusammenfallen, oder als Verlängerungen unendlicher kleiner Seiten von Polygonen mit unendlich vielen Seiten, für welche man die Curve nimmt, oder als die Richtung der zusammengesetzen Bewegung, mit welcher die Curven beschrieben werden können; und diese verschiedenen Ansichten der Tangenten haben wieder Veranlassung gegeben, entweder zu algebraischen Operationen, die sich auf die Gleichheit der Wurzeln der Gleichungen gründen, oder zu der Differential-Methode, welche sich auf die Verhältnisse unendlich kleiner Differenzen, oder der Fluxionen der Coordinaten beziehet. Diese Methoden sind zwar, in Absicht der Allgemeinheit und Einfachheit, befriedigend,

digend, aber Diejenigen, welche mit Recht die Evidenz und Strenge der Beweise der Alten bewundern, vermissen diese Vorzüge an den neueren Methoden. Die in dem ersten Theile vorgetragene Theorie der Functionen setzt uns in den Stand, die Aufgaben von den Tangenten, und ähnliche Aufgaben ganz nach den Ansichten und Grundsätzen der Alten zu behandeln und dadurch den Resultaten der Analyse den wesentlichen Character jener Auflösungen zu geben.

2.

Um den Gegenstand allgemein zu behandeln, sey $y = fx$ die Gleichung einer beliebigen gegebenen Curve und $q = Fp$ die Gleichung einer graden Linie oder einer anderen Curve, die man mit der gegebenen vergleichen will; x und y sollen Abscissen und Ordinaten der gegebenen, p und q Abscissen und Ordinaten der anderen Curve, auf die nemliche Axe, sein.

Damit diese beiden Curven einen Punct gemein haben, muss, im Fall solcher zur Abscisse x gehört, und also $p = x$, $q = y$ ist, $y = Fx$, und folglich $Fx = fx$ sein.

Um nun den Lauf der beiden Curven, auch über den Punct x hinaus, zu vergleichen, setze man, in ihre Gleichungen, $x + k$ statt x und p, so erhält man $f(x + k)$ und $F(x + k)$ für die beiden Ordinaten, welche zu einem und demselben, um k von der Ordinate des gemeinschaftlichen Punctes entfernten, Puncte der Axe der x gehören. Die Differenz dieser beiden Ordinaten ist also $f(x + k) - F(x + k)$. Ent-

wickelt man diesen Ausdruck, so erhält man, weil schon $fx - Fx = 0$ ist,

$$k\left(\frac{dfx}{dx} - \frac{dFx}{dx}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2fx}{dx^2} - \frac{d^2Fx}{dx^2}\right)$$
$$+ \frac{k^3}{2.3}\left(\frac{d^3fx}{dx^3} - \frac{d^3Fx}{dx^3}\right)\ldots.$$

und diese Differenz drückt die Entfernung der Puncte der beiden Curven aus, welche zu einer und derselben Abscisse $x + k$ gehören. [*Nemlich, wenn in Fig. 2.* x *und* $y = fx$ *die Coordinaten der gegebenen Curve* BMN', *und* p *und* $q = Fp$, *die Coordinaten der anderen Curve* CMM' *sind, und im Punct* M, $y = q$, $x = p$ *und dann* $PP' = k$ *ist, so ist*

$$P'M' = f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\ldots. \text{ und}$$

$$P'N' = F(x+k) = Fx + k\frac{dFx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Fx}{dx^2}\ldots. \text{ also}$$

$$P'N' - P'M' = M'N' = fx - Fx + k\left(\frac{dfx}{dx} - \frac{dFx}{dx}\right)\ldots.$$

folglich, weil $fx = Fx = MP$, *und mithin* $fx - Fx = 0$ *ist,*

$$M'N' = k\left(\frac{dfx}{dx} - \frac{dFx}{dx}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2fx}{dx^2} - \frac{d^2Fx}{dx^2}\right)\ldots.,$$

wie oben.]

Nun ist im Allgemeinen leicht zu sehen, dass diese Differenz um so kleiner ist, und folglich die Curven sich einander um so mehr nähern, je mehr Glieder im Anfange der Reihe verschwinden.

Die Annäherung ist also schon grösser, wenn $\frac{dfx}{dx} = \frac{dFx}{dx}$ ist, das heisst, wenn die ersten Ableitungen der Ordinaten der beiden Curven, für ei-

nerlei Abscisse x, einander gleich sind; sie ist noch grösser, wenn auch die zweiten Ableitungen $\frac{d^2 fx}{dx^2}$ und $\frac{d^2 Fx}{dx^2}$ der Ordinaten gleich sind u. s. w.

3.

Um aber näher zu sehen, worin diese verschiedenen Annäherungen bestehen, wollen wir irgend eine dritte Curve [DML' *Fig.* 2.] annehmen, deren Gleichung, auf die nemliche Axe bezogen, $s = \varphi r$ ist. Setzen wir, dass diese dritte Curve mit den beiden anderen, für die nemliche Abscisse [$AP =$] x, einen Punct [M] gemein hat, so müssen die Ordinaten der drei Curveu für x gleich sein, also ist

$$\varphi x = fx = Fx.$$

Der Unterschied [$M'N'$] der Ordinaten der beiden ersten Curven, für die nemliche Abscisse $x + k$, werde durch D, der Unterschied [$L'N'$] der Ordinaten der ersten und dritten Curve, für die Abscisse $x + k$, durch Δ bezeichnet, so ist

$$D = f(x+k) - F(x+k),$$
$$\Delta = f(x+k) - \varphi(x+k).$$

Es ist offenbar, dass die dritte Curve nicht anders zwischen den beiden ersten hindurch gehen kann, als wenn, für irgend einen Werth von k, der so klein sein kann, als man will, der Werth von D grösser ist, als der von Δ, ohne Rücksicht auf die Zeichen.

Man entwickele die Functionen $f(x+k)$, $F(x+k)$ $\varphi(x+k)$ theilweise, nach der Formel in (40.) des ersten Theils, und bleibe bei den ersten beiden Gliedern stehen. λ bezeichne eine unbestimmte, aber

zwischen o und k liegende Grösse, so erhält man

$$f(x+k)=fx+k\frac{dfx}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2f(x+\lambda)}{dx^2},$$

und eben so

$$F(x+k)=Fx+k\frac{dFx}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2},$$

$$\varphi(x+k)=\varphi x+k\frac{d\varphi x}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2\varphi(x+\lambda)}{dx^2},$$

wo die Grösse λ in den drei Ausdrücken verschieden sein kann, immer aber zwischen o und k liegt.

Man substituire Dieses in die Ausdrücke von D und Δ, so erhält man, weil vermöge des gemeinschaftlichen Puncts der drei Curven, $fx=Fx=\varphi x$ ist,

$$D=k\left(\frac{dfx}{dx}-\frac{dFx}{dx}\right)+\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2f(x+\lambda)}{dx^2}-\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}\right),$$

$$\Delta=k\left(\frac{dfx}{dx}-\frac{d\varphi x}{dx}\right)+\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2f(x+\lambda)}{dx^2}-\frac{d^2\varphi(x+\lambda)}{dx^2}\right).$$

Nun setze man, dass die beiden ersten Curven von der Art sind, dass $\frac{dfx}{dx}=\frac{dFx}{dx}$ ist, so bleibt für D nur

$$D=\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2f(x+\lambda)}{dx^2}-\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}\right),$$

und es ist leicht zu sehen, dass, so lange der Coefficient zu k, in Δ, nicht Null ist, k immer so klein angenommen werden kann, dass, ohne Rücksicht auf das Zeichen, Δ grösser ist als D. Denn, man dividire die beiden Ausdrücke durch k, so darf, in jenem Falle, nur $\frac{dfx}{dx}-\frac{d\varphi x}{dx}$ grösser sein als $\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi(x+\lambda)}{dx^2}-\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}\right)$, welches offenbar immer möglich ist,

da man k so klein annehmen kann, als man will. Auch ist klar, dass, so bald die Bedingung für irgend einen bestimmten Werth von k erfüllt wird, das Nemliche, um so mehr, für alle noch kleinere Werthe von k Statt findet.

Die dritte Curve kann also nicht anders zwischen den beiden ersten hindurch gehen, als wenn auch $\frac{dfx}{dx} - \frac{d\varphi x}{dx}$ Null, das heisst $\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{dfx}{dx}$ ist, weil nur dann der vorige Schluss aufhört.

4.

Man setze ferner, dass zugleich $\frac{dFx}{dx} = \frac{dfx}{dx}$ und $\frac{d^2Fx}{dx^2} = \frac{d^2fx}{dx^2}$ ist, und nehme die drei ersten Glieder der Entwickelung der Functionen, so erhält man, nach der obigen Formel von (40. 1. Theil).

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3f(x+\lambda)}{dx^3}$$

$$F(x+k) = Fx + k\frac{dFx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3F(x+\lambda)}{dx^3}$$

$$\varphi(x+k) = \varphi x + k\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3\varphi(x+\lambda)}{dx^3}.$$

Setzt man diese Werthe in die allgemeinen Ausdrücke von D und Δ, so erhält man, wegen $fx = Fx = \varphi x$ und $\frac{dfx}{dx} = \frac{dFx}{dx} = \frac{d\varphi x}{dx}$,

$$D = \frac{k^3}{2.3}\left(\frac{d^3f(x+\lambda)}{dx^3} - \frac{d^3F(x+\lambda)}{dx^3}\right)$$

$$\Delta = k\left(\frac{dfx}{dx} - \frac{d\varphi x}{dx}\right)$$

$$+ \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2fx}{dx^2} - \frac{d^2\varphi x}{dx}\right)$$

$$+\frac{k^3}{2.3}\left(\frac{d^3f(x+\lambda)}{dx^3}-\frac{d^3\varphi(x+\lambda)}{dx^3}\right).$$

Hier ist wieder leicht zu sehen, dass man, so lange die Coefficienten zu k und k^2, in dem Ausdruck von Δ, nicht Null sind, k immer klein genug annehmen kann, dass die Grösse Δ, ohne Rücksicht auf das Zeichen, grösser ist als D. Denn, dividirt man die beiden Grössen [D *und* Δ] durch k, so darf nur die Grösse $\frac{dfx}{dx}-\frac{d\varphi x}{dx}+\frac{k}{2}\left(\frac{d^2fx}{dx^2}-\frac{d^2\varphi x}{dx^2}\right)$ grösser als $\frac{k^2}{2.3}\left(\frac{d^3\varphi(x+\lambda)}{dx^3}-\frac{d^3F(x+\lambda)}{dx^3}\right)$ sein, welches offenbar immer möglich ist, so lange nicht $\frac{dfx}{dx}-\frac{d\varphi x}{dx}$ verschwindet. Wäre $\frac{dfx}{dx}-\frac{d\varphi x}{dx}$ gleich Null, so dürfte nur, wenn man abermals mit k dividirt, $\frac{d^2fx}{dx^2}-\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$ grösser sein, als $\frac{k}{3}\left(\frac{d^3\varphi(x+\lambda)}{dx^3}-\frac{d^3F(x+\lambda)}{dx^3}\right)$, welches wiederum, in so fern nicht $\frac{d^2fx}{dx^2}-\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$ verschwindet, offenbar immer möglich ist, weil man den Werth von k so klein annehmen kann, als man will.

Die dritte Curve kann also nicht anders zwischen den beiden ersten hindurch gehen, als wenn zugleich $\frac{dfx}{dx}=\frac{d\varphi x}{dx}$ und $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}=\frac{d^2fx}{dx^2}$ ist.

Auf diese Weise lässt sich zeigen, dass, wenn für die beiden ersten Curven

$$\frac{dfx}{dx}=\frac{dFx}{dx},\ \frac{d^2fx}{dx^2}=\frac{d^2Fx}{dx^2} \text{ und } \frac{d^3fx}{dx^3}=\frac{d^3Fx}{dx^3}$$

ist, die dritte Curve nicht anders zwischen den beiden ersten hindurch gehen kann, als wenn zugleich $\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2\varphi x}{dx^2} = \frac{d^2fx}{dx^2}$, $\frac{d^3\varphi x}{dx^3} = \frac{d^3fx}{dx^3}$ ist u. s. w.

5.

Daraus folgt allgemein, dass, wenn mit einer gegebenen Curve, eine audere gegebene Curve einen Punct gemein hat, so dass die Ordinaten beider, für eine und dieselbe Abscisse, dieselben sind, und dann überdem die ersten Ableitungen dieser Ordinaten, für die nemliche gemeinschaftliche Abscisse, ebenfalls gleich sind, dass dann auf keine Weise eine dritte, durch den gemeinschaftlichen Punct gehende Curve, anders zwischen den beiden gegebenen Curven hindurch gehen kann, als wenn die erste Ableitung der Ordinate der dritten Curve, für die nemliche Abscisse, ebenfalls der ersten Ableitung der den beiden Curven gemeinschaftlichen Ordinate gleich ist.

Sind, ausser den ersten Ableitungen der Ordinaten, auch die zweiten Ableitungen, für die nemliche Abscisse, gleich, so kann keine andere, durch den gemeinschaftlichen Punct gehende, Curve anders zwischen den beiden ersten Curven hindurch gehen, als wenn die erste und zweite Ableitung ihrer Ordinate ebenfalls der ersten und zweiten Ableitung der, den beiden Curven gemeinschaftlichen, Ordinate gleich si nd u. s. w.

Streng genommen fallen die Curven nur in dem einzigen Puncte zusammen, für welchen die Ordinaten gleich sind, und die Gleichheit der ersten und zweiten Ableitungen dieser Ordinaten drückt etwa keine

grössere Nähe anderer Puncte der beiden Curven aus; aber sie drückt diejenige Art von Annäherung aus, bei welcher es unmöglich ist, dass irgend eine andere Curve, für welche die nemliche Gleichheit nicht Statt findet, zwischen den gegebenen beiden Curven hindurch geht.

Dieses ist die klare Vorstellung von den Annäherungen verschiedener Ordnung bei den Curven, welche man gemeinhin Berührung, Osculation u. s. w. nennt und welche, bei der gewöhnlichen Ansicht des Differential-Calculs, als ein mehr oder weniger genaues, oder mehr oder weniger ausgedehntes Zusammenfallen der Curven betrachtet wird.

[*Diese neue Vorstellungs-Art ist unstreitig so klar und einfach als irgend eine der Elementar-Geometrie und es ist bei derselben, wie man sieht, nicht nöthig, das Unendliche, auch nur zu nennen. Der Vortrag hängt übrigens nicht etwa von der Formel* (40. 1. *Theil*) *ab. Alles bleibt, wie leicht zu sehen, dasselbe, wenn man auch blos von der unbestimmten Entwickelung einer Grösse, wie* $f(x+k)$, *ausgeht, ohne sich des Ausdrucks der Grenzen für die Summe der Glieder nach einem beliebigen Gliede, zu bedienen. Man sehe auch wegen dieses Gegenstandes eine kleine Schrift des Herausgebers, „Ueber die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Grössen auf Geometrie und Mechanik, Berlin bei Maurer* 1816.“]

Zweiter Abschnitt.

Von den gradlinigen Tangenten und von den Berührungs-Kreisen und dem geometrischen Ort ihrer Mittel-Puncte. Von den Krümmungs-Kreisen und dem geometrischen Ort ihrer Mittel-Puncte. Allgemeine Untersuchung der Berührung von Curven in der Ebene. Von der Berührung in singulairen Fällen und den Asymptoten.

6.

Es sey irgend eine Curve, gegeben, deren Gleichung $y = fx$ ist. Man halte sie zuerst gegen eine beliebige grade Linie. Da wir oben die Gleichung für die Curve, welche mit der gegebenen verglichen werden soll, durch $q = Fp$ bezeichneten (2.), so ist, für die grade Linie:

$$Fp = a + bp,$$

wo a und b zwei Constanten sind, welche die Lage der graden Linie bestimmen.

Die Bedingung der Gemeinschaftlichkeit eines Punctes giebt

$$fx = Fx = a + bx.$$

Dieser Gleichung kann man mittelst einer der unbestimmten Constanten genug thun.

Man setze ferner $\frac{dfx}{dx} = \frac{dFx}{dx}$, so ist klar, dass, wenn man, in $a + bp$, x statt p setzt [*wegen des*

gemeinschaftlichen Punctes] und die erste Ableitung nimmt,

$$\frac{dFx}{dx} = b, \text{ also } \frac{dfx}{dx} = b$$

ist. Die Werthe von a und b werden also durch diese beiden Bedingungen bestimmt, nemlich durch

$$b = \frac{dfx}{dx} \text{ und } a = fx - x\frac{dfx}{dx},$$

[*die zweite Gleichung folgt aus* $fx = a + bx$, *welches, wenn man den Werth* $\frac{dfx}{dx}$ *von* b *setzt,* $a = fx - x\frac{dfx}{dx}$ *giebt*] Die Gleichung der mit der Curve zu vergleichenden graden Linie ist also

$$q = fx - x\frac{dfx}{dx} + p\frac{dfx}{dx},$$

wo p und q die Coordinaten bedeuten und die Abscisse x als constant betrachtet wird. [*Die Gleichung der graden Linie ist nemlich* $q = a + bp$, *worin die obigen Werthe von* a *und* b *gesetzt worden sind.*]

Nun behaupte ich, diese grade Linie habe die Eigenschaft, dass keine andere grade Linie zwischen ihr und der Curve hindurch gehen kann [*in so fern sie nemlich zugleich durch den gemeinschaftlichen Punct jener beiden geht.*]

Denn es sey $s = \varphi r = g + hr$ die Gleichung irgend einer anderen graden Linie. Soll dieselbe durch den gemeinschaftlichen Punct gehen, so muss ebenfalls $\varphi x = fx$ sein. Damit sie aber zwischen der Curve und der vorigen graden Linie hindurch

gehen könne, muss, ausserdem, $\frac{d\varphi x}{x} = \frac{dfx}{dx}$ sein (3.) Diese beiden Bedingungen geben

$$g + hx = fx \text{ und } h = \frac{dfx}{dx},$$

woraus für g und h die nemlichen Werthe folgen, wie oben für a und b, so dass die zweite grade Linie mit der ersten zusammenfällt.

Folglich ist die grade Linie, welche durch die Gleichung $q = a + bp$, oder durch $a = fx - x\frac{dfx}{dx}$ und $b = \frac{dfx}{dx}$ bestimmt wird, die Tangente der Curve, deren Gleichung $y = fx$ ist, und zwar in dem Puncte, dessen Abscisse $p = x$.

Weil $y = fx$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dfx}{dx},$$

folglich sind die Werthe von a und b, kürzer,

$$a = y - x\frac{dy}{dx} \text{ und } b = \frac{dy}{dx}.$$

In der Gleichung der graden Linie $q = a + bp$ ist, wie leicht zu sehen, b die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die grade Linie mit der Axe macht und $-\frac{a}{b}$ die Abscisse des Puncts, in welchem sie die Axe schneidet. Da also nun diese grade Linie die Tangente der Curve in dem Puncte ist, für welchen $p = x$, so ist $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente der Curve mit der Axe macht und $x + \frac{a}{b} = y : \frac{dy}{dx}$ ist die Sub-

tangente. [*Nemlich, wenn in Fig. 3. AP und PM die Coordinaten x und y der Curve, und p und q die Coordinaten der Tangente sind, so ist, für $q = 0$, oder im Puncte B, vermöge der Gleichung der graden Linie $q = a + bp$: $0 = a + bp$, also $p = -\frac{a}{b} = AB$. Ferner ist die Tangente des Winkels* $MBP, = \frac{MP}{BP} = \frac{q}{-\left(-\frac{a}{b}\right)+p} = \frac{qb}{a+bp}$ $= \frac{qb}{q} = b$; *folglich ist diese Tangente, weil* $b = \frac{dy}{dx}$ *war, gleich* $\frac{dy}{dx}$. *Endlich ist die Subtangente* $= BP = AP + BP = x - \left(-\frac{a}{b}\right)$ $= x + \frac{a}{b}$, *oder auch gleich* $\frac{MP}{\text{tang}\, MBP} =$ $y : \frac{dy}{dx}$.]

7.

Die Gleichung $s = \alpha + \beta r$ drücke eine andere grade Linie [*MQ Fig.* 3.] aus, die durch den nemlichen gemeinschaftlichen Punct geht; r und s sollen die Coordinaten dieser neuen graden Linie sein, so ist, für den gemeinschaftlichen Punct,

$$r = p = x \text{ und } s = q = y,$$

$$\text{also } a + bx = \alpha + \beta x.$$

Soll die neue grade Linie die gegebene unter einem bestimmten Winkel schneiden, dessen Tangente m ist, [*so dass also z. B.* $\text{tang}\, BMQ = m$] so hat man, vermöge einer bekannten trigonometrischen Formel,

$\beta = \frac{b+m}{1-bm}\left[\textit{nemlich } tg\,MRS = \frac{tg\,MBR + tg\,BMR}{1 - tg\,MBR . tg\,BMR}\right]$,

also $\alpha = a - \frac{x(1+b^2)m}{1-bm}$,

[*weil* $a + bx = \alpha + \beta x$, *also* $\alpha = a + (b-\beta)x$ *war, welches, wenn man den Werth von* β *setzt,* $\alpha = a + \left(b - \frac{b+m}{1-bm}\right)x$, *oder* $\alpha = a + \frac{b - b^2m - b - m}{1-bm}x$ $= a - \frac{x(1+b^2)m}{1-bm}$ *giebt,*] wo man nur die Werthe von a und b substituiren darf.

Soll die zweite grade Linie auf der Tangente senkrecht stehen, so ist $m = \infty$, oder $\frac{1}{m} = 0$ und folglich blos

$$\alpha = a + x\left(b + \frac{1}{b}\right) = y + x : \frac{dy}{dx} \text{ und}$$

$$\beta = -\frac{1}{b} = -1 : \frac{dy}{dx}.$$

[*Nemlich* $\alpha = a - \frac{x(1+b^2)m}{1-bm}$ *giebt* $\alpha = a - \frac{x(1+b^2)}{\frac{1}{m} - b}$, *also, für* $\frac{1}{m} = 0$, $\alpha = a + x\left(b + \frac{1}{b}\right)$ *und* $\beta = \frac{b+m}{1-bm}$ *giebt* $\beta = \frac{\frac{b}{m} + 1}{\frac{1}{m} - b}$, *also für* $\frac{1}{m}$ *und folglich* $\frac{b}{m} = 0$, $\beta = -\frac{1}{b}$, *oder, weil* $b = \frac{dy}{dx}$, $\beta = -1 : \frac{dy}{dx}$.]

Also ist $-1 : \frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels [*MRS*] welchen dieses Perpendikel, das man

Normale zu nennen pflegt, mit der Axe macht, und $x + \frac{\alpha}{\beta} = -y \cdot \frac{dy}{dx}$ ist der Theil der Axe [PR] welcher zwischen der Ordinate und dem Puncte liegt, in welchem die Normale die Axe schneidet, und welcher Subnormale heisst. [*Denn* $\alpha + \beta x = y$ *giebt* $x + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{y}{\beta} = -y \cdot \frac{dy}{dx}$, *welches* $= PR$ *ist, weil* $PR = MP \tang PMR = MP \tang MBR$ $= -MP \frac{dy}{dx}$.]

Wären die beiden Coordinaten x und y der Curve durch eine Function von einer dritten veränderlichen Grösse, z. B. v, ausgedrückt, so müsste man überall $\frac{dy}{dv} : \frac{dx}{dv}$ statt $\frac{dy}{dx}$ setzen (50. Theil 1).

Die Anwendung dieser Formeln auf Beispiele würde überflüssig sein, denn wer auch nur die ersten Elemente der Differential-Rechnung kennt, wird leicht die Identität der obigen Ausdrücke mit den bekannten Differential-Formeln, bemerken.

8.

Wir wollen nun ferner den Kreis mit einer gegebenen Curve vergleichen. Die allgemeine Gleichung eines Kreises mit den Coordinaten p und q ist

$$(p-a)^2 + (q-b)^2 = c^2,$$

wo a und b die Coordinaten des Mittel-Puncts sind und c der Halbmesser ist. Daraus folgt

$$q = b + \sqrt{[c^2 - (p-a)^2]} = Fp, \text{ also}$$

$$Fx = b + \sqrt{[c^2 - (x-a)^2]} \text{ und}$$

$$\frac{dFx}{dx} = -\frac{x-a}{\sqrt{[c^2-(x-a)^2]}}.$$

[*Nemlich, weil in dem gemeinschaftlichen Puncte* $p = x$ *ist.*] Man setze also nunmehr

$$Fx = fx = y \text{ und } \frac{dFx}{dx} = \frac{dfx}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

und nehme aus diesen beiden Gleichungen die Werthe von a und b. Die zweite giebt

$$\left[\frac{dFx}{dx} = \frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{\sqrt{(c^2-(x-a)^2)}}, \textit{ also}\right]$$

$$\sqrt{[c^2-(x-a)^2]} = -\frac{x-a}{\frac{dy}{dx}},$$

woraus folgt $\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (c^2-(x-a)^2) = (x-a)^2 \textit{ und}\right]$

$$x-a = \frac{c \cdot \frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}.$$

Sodann giebt die erste [$Fx - b = \sqrt{(c^2-(x-a)^2)}$ *oder*]

$$y-b = \sqrt{(c^2-(x-a)^2)} = -\frac{x-a}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{c}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}},$$

also

$$a = x - \frac{c\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}},$$

$$b = y + \frac{c}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}.$$

Sieht man den Halbmesser als gegeben an, so ist in diesen Gleichungen Nichts mehr willkürlich und es folgt, dass der gegebene Kreis, dessen Mittelpunct

durch die Coordinaten a und b bestimmt wird, die Eigenschaft hat, dass zwischen ihm und der Curve kein, zu dem nemlichen Halbmesser gehöriger, aber anders liegender, Kreis-Bogen hindurch gehen kann. Denn, für einen anderen Kreis, von dem nemlichen Halbmesser c, würde, wenn die Coordinaten dieses Kreises r und s, und die Coordinaten des Mittelpuncts g und h sind,

$$s = \varphi r = h + \sqrt{(c^2 - (r-g)^2)}$$

sein. Sollte dieser Kreis den nemlichen Punct mit der gegebenen Curve gemein haben und zwischen ihr und dem vorigen Kreise hindurch gehen, so müsste auch

$$\varphi x = fx = y \text{ und } \frac{d\varphi x}{dx} = \frac{dfx}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

sein, aus welchen beiden Gleichungen sich die Grössen g und h würden bestimmen lassen. Aber, wie man sieht, stimmen diese Gleichungen mit den obigen überein, und nur die Grössen g und h treten an die Stelle von a und b. Sie geben also für g und h nothwendig eben das, was die obigen Gleichungen für a und b geben; folglich fällt der neue Kreis mit dem vorigen zusammen.

Mithin berührt, nach der obigen Vorstellung von den Tangenten, der Kreis, dessen Halbmesser c ist, und dessen Mittel-Punct durch die Coordinaten a und b bestimmt wird, die gegebene Curve, deren Coordinaten x und y sind.

Da dieser Schluss immer derselbe bleibt, was auch c sein mag, so kann man in den Ausdrücken von a und b, c als unbestimmt betrachten. Alsdann gehören

gehören die Coordinaten a und b einer graden Linie an, deren Gleichung man erhält, wenn man c eliminirt, und die folglich [*weil* $a-x=-\frac{c\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}$, *und* $b-y=\frac{c}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}$ *war*, $\frac{a-x}{b-y}=-\frac{dy}{dx}$, *oder* $(a-x):\frac{dy}{dx}=-(b-y)$, *oder*]

$$b=y+\frac{x-a}{\frac{dy}{dx}}$$

ist. Diese grade Linie ist also der geometrische Ort der Mittel-Puncte aller Kreise, welche die gegebene Curve berühren können; sie ist die Normale der Curve. In der That kommt die Gleichung dieser graden Linie, deren Coordinaten a und b sind, mit der Gleichung der Normale, oben in (7.) überein, wenn man r und a mit s und b verwechselt.

9.

Nun lässt sich unter allen den Kreisen, welche den Bedingungen $Fx=fx=y$, $\frac{dFx}{dx}=\frac{dfx}{dx}=\frac{dy}{dx}$ entsprechen, einer finden, der auch zugleich noch die Bedingung $\frac{d^2Fx}{dx^2}=\frac{d^2fx}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$ erfüllt. Denn es war oben

$$\frac{dFx}{dx}=-\frac{x-a}{\sqrt{(c^2-(x-a)^2)}}.$$

Daraus folgt: [$\frac{d^2 Fx}{dx^2} = - \frac{1}{\sqrt{(c^2-(x-a)^2)}}$
$- \frac{(x-a)^2}{(c^2-(x-a)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-c^2+(x-a)^2-(x-a)^2}{(c^2-(x-a)^2)^{\frac{3}{2}}}$,
oder]

$$\frac{d^2 Fx}{dx^2} = - \frac{c^2}{(c^2-(x-a)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

also ist $\left[weil\ \frac{d^2 Fx}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}\right]$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{c^2}{(c^2-(x-a)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun war aber $\sqrt{(c^2-(x-a)^2)} = - \frac{x-a}{\frac{dy}{dx}} =$
$- \frac{c}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}$, also ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{c}, \text{ woraus folgt:}$$

$$c = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Substituirt man diesen Werth von c in die Ausdrücke von a und b, so erhält man

$$a = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \text{ und } b = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Auf diese Weise sind nun die drei Constanten a, b, c in der allgemeinen Gleichung des Kreises völlig bestimmt, und es folgt, dass nunmehr kein anderer Kreis mehr zwischen der Curve und dem Kreise mit den bestimmten Werthen von a, b, c hindurch

gehen kann. Denn, sollte irgend eine andere Curve, mit den Coordinaten r und s und der Gleichung $s = \varphi r$, zwischen der Curve und dem Kreise durchgehen, so müssten

$$\varphi x = fx = y, \frac{d\varphi x}{dx} = \frac{dfx}{dx} = \frac{dy}{dx} \text{ und } \frac{d^2\varphi x}{dx^2} = \frac{d^2fx}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

sein. (4.) Ist nun diese Curve ein Kreis, so erhält man, wenn man die Grössen g, h, k an die Stelle von a, b, c setzt, für φx, $\frac{d\varphi x}{dx}$ und $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$ die nemlichen Ausdrücke, wie oben für Fx, $\frac{dFx}{dx}$, $\frac{d^2Fx}{dx^2}$, indem man in diese blos g, h, k statt a, b, c setzen darf; folglich sind die drei Gleichungen, welche g, h, k bestimmen, die nemlichen, wie diejenigen, aus welchen a, b, c gefunden wurden; folglich kommen nothwendig die Werthe von g, h, k mit den Werthen von a, b, c überein; mithin fällt der neue Kreis, welcher zwischen der Curve und dem schon bestimmten Kreise durchgehen sollte, mit letzterem zusammen und ist mit ihm nur einer und der nemliche Kreis.

Dieser Kreis hat also, unter den berührenden Kreisen, eine gleiche Eigenschaft, wie die Tangente unter den graden Linien. Er ist derjenige Kreis, welchen die Geometer Krümmungs-Kreis zu nennen pflegen, weil er zum Maass der Krümmung der Curve dient.

Die Grösse c ist der Halbmesser dieses Kreises. Man nennt diesen Kreis-Halbmesser, Halbmesser der Krümmung. Die Grössen a und b sind die Coordinaten der Curve, welche der geometrische Ort der Mittel-Puncte aller Krümmungs-Kreise

ist. [*Diese Curve ist die* Evolute *der gegebenen.*

Will man diese Formeln in Differential-Formeln übersetzen, sagt Lagrange, *so muss man* $\frac{dy}{dx}$ *statt* y' *und* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *statt* y'' *schreiben, welches hier schon geschehen ist.*

Hier nun, und zwar schon bei dieser ersten Anwendung der Theorie der Functionen, oder der Rechnung mit veränderlichen Grössen auf einen gegebenen Gegenstand, muss nothwendig Jedem, bei der Vergleichung des gegenwärtigen Vortrages und der gegenwärtigen Vorstellungen mit den gewöhnlichen, der grosse Vorzug der neuen Methode vor der alten, in die Augen springen. Hier ist jede Vorstellung vollkommen klar: nirgends wird Etwas willkürlich angenommen, die Curven werden nicht als gradlinige Polygone betrachtet, und überall sind die Beweise so strenge, wie nur irgendwo in der Mathematik, während bei der alten Methode mit dem Unendlichen, bald willkürlich die Curven zu gradlinigen Polygonen gemacht werden, bald eine Null unendlich grösser angenommen wird, als eine andere Null, bald Linien und Winkel zugleich, gleich und auch nicht gleich sein sollen und das Ganze gleichsam nur eine Reihe von Willkürlichkeiten ist, deren eine immer erst wieder gut machen muss, was die vorhergehende fehlte. Die Lagrangische Theorie der Berührung der Curven ist ohne Zweifel die erste, wirklich arithmetische Theorie dieses Gegenstandes. Bei den früheren Methoden wurden die

Resultate mehr errathen oder zufällig gefunden, als berechnet. Wer dennoch die alte Theorie, blos um der Bequemlichkeit willen, die obendrein nicht einmal Statt findet, sondern nur in der Einbildung liegt, statt der gegenwärtigen setzen wollte, würde aus dem Wesen der Mathematik hinausgehen und den Irrthum, der Gewohnheit wegen, der Wahrheit vorziehen.

Der Erfolg dieser ersten Anwendung der Theorie der veränderlichen Grössen auf einen geometrischen Gegenstand ist so vollkommen gelungen, wie es nur zu wünschen war, was um so erfreulicher ist, da die eigentliche Schwierigkeit der Rechnung mit veränderlichen Grössen grade in den Anwendungen auf gegebene Gegenstände liegt, keinesweges in der Rechnung selbst. Hier bey diesen Anwendungen der Functionen-Theorie auf Geometrie und Mechanik überwindet erst Lagrange die Haupt-Schwierigkeit. Die in dem ersten Theil aufgestellte Veränderung der gewöhnlichen Methode betrifft mehr nur die Form, und ist weniger wesentlich, als die Behandlung der Anwendungen in diesem zweiten und dritten Theil. So lange man vom Unendlichen blos spricht und die Vorstellungen desselben mit willkürlichen Zeichen verbindet, kann man allenfalls, wenn man es mit arithmetischen Wahrheiten hinreichend leicht nimmt, etwas davon zu begreifen glauben. Aber wenn man bei den Anwendungen sehen und dennoch glauben soll, dass z. B. ein Kreis nicht krumm, oder dass eine grade Linie zwischen zwei Puncten so lang ist, als eine krumme zwischen den nem-

lichen Puncten, oder dass eine grössere Fläche nicht grösser ist, als die kleinere, so sträubt sich selbst das einfachste Wahrnehmungsvermögen, und die Zumuthung zu g l a u b e n, die hier eine Wissenschaft macht, welche sich rühmt, die Wissenschaft der Wahrheit zu sein, ist etwas zu stark.]

10.

Wir können nun diese Theorie allgemein machen.

Die Coordinaten einer beliebigen gegebenen Curve mögen x und y, die Coordinaten einer anderen, ebenfalls gegebenen Curve, die man mit der ersten vergleichen will, p und q sein.

Man nehme an, die Gleichung der zweiten Curve enthalte, nächst den veränderlichen Grössen p und q, die unbestimmten Constanten a, b, c *etc.* und die Gleichung sey

$$F(p, q, a, b, c \ldots.) = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung x statt p, und y statt q, so erhält man

$$F(x, y, a, b, c \ldots) = 0,$$

welche Gleichung die Bedingung ausdrückt, die erfüllt werden muss, wenn die zweite Curve mit der ersten einen Punct gemein haben soll.

Man bezeichne die Grösse $F(x, y, a, b, c \ldots.)$ durch u, so kann man aus den beiden Gleichungen

$$u = 0 \text{ und } \frac{du}{dx} = 0,$$

wenn nur zwei Constanten a und b in u vorkommen, diese beiden Constanten bestimmen. Alsdann be-

rührt die Curve, deren Gleichung $F(p, q, a, b) = 0$ ist, die gegebene Curve in dem Puncte, für welchen $p = x$ ist. [*Diese Stelle konnte, der veränderten Zeichen wegen, nicht wörtlich übersetzt werden.*]

Sind drei Constanten a, b, c vorhanden, und man bestimmt sie aus den drei Gleichungen

$$u = 0, \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

so hat die Curve, deren Gleichung $F(p, q, a, b, c) = 0$ ist, mit der gegebenen Curve, für die Abscisse $p = x$, einerlei Krümmung, oder osculirt mit ihr, u. s. w.

Alles dieses folgt unmittelbar aus dem Obigen; denn die erste abgeleitete Gleichung $\frac{du}{dx} = 0$ giebt den Werth von $\frac{dy}{dx}$ in $x, y, a, b, c \ldots$, die zweite abgeleitete Gleichung $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ giebt den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ in $x, y, \frac{dy}{dx}, a, b, c \ldots$ u. s. w.

Man kann überhaupt die Annäherung zweier Curven, die sich in einem Puncte berühren, Berührung der ersten Ordnung nennen; haben sie ausserdem einerlei Krümmung, Berührung der zweiten Ordnung u. s. w.

Die Constanten $a, b, c \ldots$, welche die Berührung bestimmen, können auch Elemente der Berührung heissen.

Die Berührung einer beliebigen Ordnung m, hängt also von $m + 1$ Elementen $a, b, c \ldots$ ab, die aus der Gleichung

$$F(x, y, a, b, c \ldots.) = 0,$$

der gegebenen berührenden Curve und den Ableitungen dieser Gleichung bis zur mten Ordnung, gefunden werden.

Die analytische Eigenschaft dieser Berührungen besteht darin, dass, wenn zwischen zwei Curven eine Berührung von einer gegebenen Ordnung Statt findet, die Ordinaten der beiden Curven und die ersten, zweiten u. s. w. Ableitungen der Ordinaten, bis zur Ordnung der Berührung [*für den Punct der Berührung*] die nemlichen sind, und die geometrische Eigenschaft ist, dass zwischen den beiden Curven keine andere, für welche nicht eine Berührung derselben Ordnung Statt findet, hindurch gehen kann.

11.

Die gegebene berührende Linie sey z. B. eine grade, deren allgemeine Gleichung

$$y - a - bx = 0$$

ist. Diese Linie ist nur einer Berührung der ersten Ordnung fähig, weil ihre Gleichung nur zwei Elemente a und b enthält. Diese beiden Elemente werden durch die beiden Gleichungen

$$y - a - bx = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} - b = 0$$

bestimmt. [*Nemlich u ist hier $y - a - bx$, also $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - b$, welches, weil $u = 0$ und $\frac{du}{dx} = 0$ ist, die beiden Gleichungen giebt.*] Daraus folgt

$$b = \frac{dy}{dx} \text{ und } a = y - x\frac{dy}{dx},$$

wie oben, in (6.)

Die berührende Curve sey ferner ein Kreis, dessen allgemeine Gleichung

$$(x-a)^2+(y-b)^2-c^2=0$$

ist, so ist eine Berührung zweiter Ordnung möglich, weil nunmehr drei Elemente a, b und c da sind. Diese drei Elemente werden durch die drei Gleichungen [$u=0$, $\frac{du}{dx}=0$ *und* $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ *und folglich, weil hier* $u=(x-a)^2+(y-b)^2$ *ist, durch die drei Gleichungen*]

$$(x-a)^2+(y-b)^2-c^2=0,$$

$$x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}=0,$$

$$1+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

bestimmt. Aus diesen Gleichungen folgt: [*aus der dritten* $y-b=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, *aus der zweiten* $x-a=(y-b)\frac{dy}{dx}=\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dy}{dx}$ *und aus der ersten* $c^2=(x-a)^2+(y-b)^2=\left(\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)^2$

$$+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)^2=\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$ *also*]

$$y-b=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$x - a = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx},$$

$$c = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

wie oben (9.).

Nähme man die Gleichung der Parabel $y = a + bx + cx^2$, die auch nur drei willkürliche Constanten hat, so hätte man, zur Bestimmung dieser Constanten, wenn man sie als Elemente der Berührung zweiter Ordnung betrachtet, die Gleichungen

$$y - a - bx - cx^2 = 0, \quad \frac{dy}{dx} - b - 2cx = 0 \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2c = 0, \text{ welche}$$

$$c = \tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}, \quad b = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} \text{ und}$$

$$a = y - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

geben.

Nähme man dagegen die Gleichung der cubischen Parabel $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, so könnte eine Berührung dritter Ordnung Statt finden, deren Elemente α, β, γ, δ sind und die durch die Gleichungen

$$y - \alpha - \beta x - \gamma x^2 - \delta x^3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \beta - 2\gamma x - 3\delta x^2 = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\gamma - 6\delta x = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\delta = 0,$$

bestimmt werden. Man würde also erhalten

$$\delta = \tfrac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3},\ \gamma = \tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - \tfrac{1}{2}x\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\beta = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\alpha = y - x\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} - \tfrac{1}{6}x^3\frac{d^3y}{dx^3}$$

u. s. w.

12.

Endlich, wenn man die einfachste Curve verlangt, die mit einer gegebenen Curve eine Berührung beliebiger mter Ordnung hat, so kann man, wenn x und y die Coordinaten der gegebenen, p und q die Coordinaten der gesuchten Curve sind, und y eine Function von x, q eine Function von p ist,

$$q = y + (p-x)\frac{dy}{dx} + \frac{(p-x)^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(p-x)^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}\ldots$$

setzen und der rechten Seite dieser Gleichung so viele Glieder geben, als $m + 1$ Einheiten hat.

Denn, nimmt man die Ableitungen nach p und setzt $p = x$, so erhält man $q = y$, $\frac{dq}{dp} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2q}{dp^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. w. bis $\frac{d^mq}{dp^m} = \frac{d^my}{dx^m}$. [*Nemlich für $p = x$ ist, erstlich, offenbar $q = y$. Sodann ist $\frac{dq}{dp} = \frac{dy}{dx} + (p-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \tfrac{1}{2}(p-x)^2\frac{d^3y}{dx^3}\ldots$, welches, für $p = x$, $\frac{dq}{dp} = \frac{dy}{dx}$ giebt. Ferner ist $\frac{d^2q}{dp^2} = \frac{d^2y}{dx^2} + (p-x)\frac{d^3y}{dx^3}\ldots$, welches, für $p = x$,*

$\frac{d^2q}{dp^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ *giebt u. s. w.*] Diese beiden Curven erfüllen also, in dem gemeinschaftlichen Puncte, welcher zu $p = x$ gehört, alle, zu einer Berührung der mten Ordnung (10.) nothwendigen Bedingungen.

Die durch die obige Gleichung [*zwischen p und q*] ausgedrückte Curve, welche, wie man sieht, eine Parabel der mten Ordnung ist, nähert sich also, in dem mit der gegebenen Curve gemeinschaftlichen Puncte, dieser am meisten und in dem Maasse, dass keine andere Curve derselben Art zwischen beiden hindurch gehen kann, wenn sie nicht von höherer Ordnung ist.

13.

Diese Theorie der Berührung der Curven ist unmittelbar auf die allgemeine Theorie der Entwickelung der Functionen im ersten Theil gebaut. Nun aber sahen wir in (29. 1. Theil) dass es besondere Fälle giebt, wo die allgemeine Form für die Entwickelung nicht passt. Diese Fälle sind diejenigen, in welchen für einen gegebenen Werth von x, die abgeleiteten Functionen $\frac{dfx}{dx}$, $\frac{d^2fx}{dx^2}$ unendlich gross sind. In solchen Fällen enthält die Entwickelung von $f(x+k)$ nothwendig, für jenen Werth von x, andere Potenzen von k als k^1, k^2 *etc.* und die Ansicht von (3 und 4.) passt nicht mehr. Obgleich diese Ausnahmen die allgemeine Theorie auf keine Weise angreifen, so ist es doch, um Nichts zu übergehen, nothwendig, zu untersuchen, wie sich selbige in solchen besonderen Fällen verändert.

Man setze also, die Function $f(x+k)$ sey in

eine, nach Potenzen von k steigende Reihe entwickelt und müsse für $x = m$ die Form

$$fm + Ak^{\lambda} + Bk^{\lambda+\mu} + Ck^{\lambda+\mu+\nu} \ldots.$$

haben, wo μ, $\nu \ldots.$ positive Zahlen sind.

Ich bemerke zuerst, dass man die Coefficienten $A, B, C \ldots.$, nebst den Exponenten $\lambda, \mu, \nu \ldots.$, auf einem ähnlichen Wege, wie in (3. des ersten Theils) finden kann. Man setze nemlich zuerst

$$f(m+k) = fm + k^{\lambda}P$$

und nehme für k^{λ} die höchste Potenz von k an, welche in $F(m+k) - fm$, nach vorheriger Reduction, aufgeht, so dass der Quotient P, für $k = 0$, weder Null noch Unendlich ist. Für $m = 0$ kann λ negativ sein; in jedem anderen Fall ist solches offenbar positiv. Man setze ferner

$$P = A + k^{\mu}Q,$$

wo A der Werth von P für $k = 0$ ist und nehme für k^{μ} die höchste Potenz von k an, welche in $P - A$ aufgeht, so dass der Quotient Q, für $k = 0$, weder Null noch unendlich ist. Man setze abermals

$$Q = B + k^{\nu}R,$$

wo B der Werth von Q für $k = 0$ und k^{ν} die höchste Potenz von k ist, welche in $Q - B$ aufgeht, während der Quotient R, für $k = 0$, weder Null noch unendlich ist u. s. w. so erhält man durch dieses Verfahren

$$\begin{aligned} f(m+k) &= fm + k^{\lambda}P \\ &= fm + k^{\lambda}A + k^{\lambda+\mu}Q \end{aligned}$$

$$= fm + k^{\lambda} A + k^{\lambda+\mu} B + k^{\lambda+\mu+\nu} R \text{ etc.}$$

Die Glieder dieser Reihen lassen sich allerdings noch einfacher und leichter finden, aber das obige Verfahren hat den Vorzug, dass es die Reihen nur so weit giebt, als man sie verlangt und zugleich den Werth des Restes ausdrückt. Für unsern Zweck sind die Reste nicht nöthig; es ist hinreichend, wenn man nur weiss, dass sie immer durch Grössen von der obigen Gestalt ausgedrückt werden können.

Nun betrachte man eine Curve, deren Gleichung $y = fx$ ist, wo x die Abscisse und y die Ordinate bezeichnet. Man setze, sie habe einen Punct mit einer anderen Curve gemein, deren Ordinate Fx ist, und der gemeinschaftliche Punct entspreche der Abscisse m, so dass $Fm = fm$, so sind die Ordinaten der beiden Curven, über diesen Punct hinaus, $f(m+k)$ und $F(m+k)$, für eine beliebige Abscisse $m+k$. Die Differenz dieser beiden Ordinaten, welche durch D bezeichnet werden mag, ist $f(m+k) - F(m+k)$.

Man entwickele $F(m+k)$, wie oben $f(m+k)$, und setze

$$F(m+k) = Fm + k^{\varrho} p, \; p = \alpha + k^{\sigma} q, \; q = \beta + k^{\tau} r \text{ etc.}$$

wo σ, τ.... positive Zahlen und α, β etc. die Werthe von p, q.... für $k = 0$ sind, so erhält man, weil $Fm = fm$,

$$D = k^{\lambda} A - k^{\varrho} \alpha + k^{\lambda+\mu} Q - k^{\varrho+\sigma} q \ldots$$

Die beiden ersten Glieder der Entwickelung von $f(m+k)$ sind $fm + k^{\lambda} A$, und diejenigen der Entwickelung von $F(m+k)$ sind $Fm + k^{\varrho}\alpha$. Man setze sie gleich, so dass $\varrho = \lambda$ und $\alpha = A$. Die erste

dieser beiden Bedingungen hängt von der Natur der durch f und F bezeichneten Functionen ab, die zweite aber kann, wie die Bedingung $fm = Fm$, immer, vermittelst der willkürlichen Constanten $a, b, c \ldots$ in Fx erfüllt werden. Man erhält in diesem Falle

$$D = k^{\lambda+\mu} Q - k^{\varrho+\sigma} q \ldots$$

und es ist nun unmöglich, dass irgend eine andere Curve zwischen jenen beiden, in dem Puncte, der zur Abscisse m gehört, hindurch gehe, wenn nicht die beiden ersten Glieder der Entwickelung von $\varphi(m+k)$, wo φx die Ordinate der anderen Curve bedeutet, die nemlichen sind, wie diejenigen der Entwickelung von $f(m+k)$. Denn, sind sie verschieden, so können sie sich in dem Ausdruck der Differenz Δ der beiden Ordinaten $f(m+k)$ und $\varphi(m+k)$ nicht aufheben, sondern es ist allgemein

$$\Delta = k^{\lambda} A - k^{\varrho} \alpha + k^{\lambda+\mu} Q - k^{\varrho+\pi} q \ldots$$

weil $\varphi m = fm$ ist, vermöge der Voraussetzung des Zusammenfallens der Curven in dem Puncte, welcher der Abscisse $x = m$ entspricht.

Vergleicht man diesen Ausdruck von Δ mit dem von $D = k^{\lambda+\mu} Q - k^{\varrho+\sigma} q$, so ist leicht zu sehen, dass es, weil die Exponenten $\mu, \sigma, \pi \ldots$, nach der Natur der Entwickelung, positiv sind, immer möglich ist, k so klein anzunehmen, dass Δ (ohne Rücksicht auf das Zeichen) grösser als D ist, so lange nicht $\varrho = \lambda$ und $\alpha = A$, wie für die beiden ersten Curven. In jedem anderen Fall also liegt die dritte Curve nothwendigerweise ausserhalb der beiden ersten.

Setzt man die Entwickelung von $f(m+k)$ und

$F(m+k)$ weiter fort, so lässt sich eben so zeigen, dass, wenn die drei ersten Glieder der Entwickelungen überein kommen, keine dritte Curve zwischen den beiden ersten anders hindurch gehen kann, als wenn sie nicht auch die nemlichen Glieder mit ihnen gemein hat u. s. w.

Man kann also wieder, wie in (10.) die Annäherung zweier Curven, für welche, in den Entwickelungen, die die Ordinaten ausdrücken, die beiden, die drei ersten Glieder u. s. w. die nemlichen sind, Berührung der ersten, zweiten Ordnung u.s.w. nennen.

Ist also die Curve, deren Gleichung $y = fx$ ist, gegeben, so lässt sich die einfachste Curve, welche sie, in der ersten Ordnung, in einem Puncte, für welchen $x = m$ ist, berührt, durch die Gleichung

$$y = fm + A(x-m)^{\lambda},$$

und die einfachste Curve, welche sie in der zweiten Ordnung berührt, durch die Gleichung

$$y = fm + A(x-m)^{\lambda} + B(x-m)^{\lambda+\mu}$$

ausdrücken u. s. w. Denn, setzt man $m+k$ statt x, so erhält man blos die beiden ersten Glieder $fm + Ak^{\lambda}$, oder die drei ersten $fm + Ak^{\lambda} + Bk^{\lambda+\mu}$ der Entwickelung von $f(m+k)$. Diese Curven nähern sich also, in dem nemlichen Puncte, der gegebenen am meisten und können folglich dazu dienen, ihre Eigenschaften kennen zu lehren, z. B. die singulairen Puncte die Wiederkehr-Puncte etc. Man sehe deshalb die Theorie der krummen Linien von Cramer.

14.

14.

Nun nehme man an, in der Gleichung $y = fx$ der gegebenen Curve werde $\frac{1}{k}$ statt x gesetzt und die Function $f\frac{1}{k}$ in eine steigende Reihe von der Form

$$Ak^{\lambda} + Bk^{\lambda+\mu} + Ck^{\lambda+\mu+\nu} \ldots$$

entwickelt. Thut man ein Gleiches mit der Gleichung $y = Fx$ einer beliebigen anderen Curve und nimmt an, die beiden ersten Glieder der Entwickelung von $F\frac{1}{k}$ kämen mit derjenigen der Entwickelung von $f\frac{1}{k}$ überein, so lässt sich, auf eine ähnliche Weise, wie oben, zeigen, dass k immer so klein angenommen werden kann, dass keine andere Curve, deren Gleichung z. B. $y = \varphi x$ ist, und für welche die Function $y = \varphi\frac{1}{k}$ in eine steigende Reihe entwickelt, nicht die nemlichen ersten Glieder hat, wie die beiden anderen Curven, in den Puncten, deren Abscissen $x = \frac{1}{k}$ und grösser als Dieses sind, bis ins Unendliche, zwischen den beiden Curven hindurch gehen kann, weil, wenn die Bedingung, die verhindert, dass die Curve nicht zwichen den beiden gegebenen liegt, für einen gewissen Werth von k Statt findet, die nemliche Bedingung um so mehr für jeden kleineren Werth von k erfüllt werden muss.

Daraus folgt, dass sich die Curve, deren Gleichung blos

$y = Ax^{-\lambda}$, oder $y = Ax^{-\lambda} + Bx^{-\lambda-\mu}$ ist, *etc.* fortwährend der gegebenen nähert, wie die Abscissen zunehmen, ohne sie jemals erreichen zu können, so dass sie bis zu einem Punct kommt, über welchen hinaus keine parabolische oder hyperbolische Curve, die nicht von höherer Ordnung ist, zwischen den beiden Curven hindurch gehen kann. Diese zweite Curve ist also eine Asymptote der ersten. Die gegenwärtige Vorstellung von den Asymptoten scheint eine der einfachsten und allgemeinsten, während sie zugleich am geschicktesten ist, diejenige Art der Annäherung zu caracterisiren, die dem wahren Asymptotismus eigen ist.

[*Die Ausdrücke für die singulairen Puncte der Curven, für die Asymptoten u. s. w. lassen sich auch, vielleicht noch einfacher, ohne eigene Entwickelung, unmittelbar aus den allgemeinen finden. Man habe z. B. aus der gewöhnlichen allgemeinen Entwickelung* $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a+x}$ *gefunden, so ist* $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{a}{x}+1}$, *welches für* $x = \infty$, $\frac{dy}{dx} = 1$ *giebt. Daraus folgt, dass diejenige Curve, für welche* $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a+x}$ *ist, in unendlicher Entfernung von dem Anfangs-Punct der Abscissen, eine Tangente hat, die die Axe unter einen halben rechten Winkel schneidet. Eine solche Tangente an einen unendlich entfernten Punct ist eine Asymptote u. s. w.*]

Dritter Abschnitt.

Directe und umgekehrte Aufgaben über die Berührung der Curven. Untersuchung der Fälle, in welchen ein Verhältniss zwischen den beiden Elementen der Berührung erster Ordnung gegeben ist. Von der Curve, welche durch die singulaire Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ausgedrückt wird.

15.

Die Aufgaben, betreffend die Tangenten, Krümmungs-Halbmesser etc. und überhaupt die Berührung der Curven, sind entweder directe oder umgekehrte Aufgaben. Die directen Aufgaben kommen immer darauf hinaus, diese oder jene Elemente der Berührung einer gewissen Ordnung zu finden, und sind allemal analytisch auflösbar, weil sie von der directen Functionen-Rechnung [*der Differential-Rechnung*] abhängen. Bei den umgekehrten Aufgaben nimmt man an, dass irgend ein Verhältniss zwischen den Elementen der Berührung der Coordinaten x und y und den Ableitungen der Ordinaten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ gegeben ist; dieses Verhältniss giebt, wenn man darin die allgemeinen Ausdrücke der Elemente x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ setzt, irgend eine Ableitungs-Gleichung von einer gewissen Ordnung, von welcher die Stammgleichung gefunden werden muss, um die Gleichung

der gesuchten Curve x und y zu haben. Diese Aufgaben führen also erst auf Ableitungs-Gleichungen, und da die Auflösung dieser Gleichungen wesentlich von der umgekehrten Analyse der Functionen [*der sogenannten Integral-Rechnung*] abhängt, so sind sie allen Schwierigkeiten dieser Rechnung unterworfen.

Es giebt indessen Fälle, in welchen sie sich durch besondere Rechnungen auflösen lassen, die um so mehr Aufmerksamkeit verdienen, da sie auf merkwürdige analytische Kunstgriffe führen.

Dergleichen Fälle sind diejenigen, wo das Verhältniss blos zwischen den Elementen der Berührung gegeben ist, ohne dass die Coordinaten x und y dabei vorkommen.

Um durch ein Beispiel eine Vorstellung von solchen Fällen zu geben, setze man, es werde die Curve verlangt, deren Tangenten überall zwei bestimmte, z. B. zu den gegebenen Abscissen m und n, gehörige Ordinaten (verlängert, wenn es nöthig ist), so schneiden, dass das Product der zwischen den Tangenten und der Abscissen-Axe liegenden Theile der Ordinaten, überall constant. z. B. $= K$ ist. [*Also so z. B. dass Fig. 4.* $PB.QC = PD.QE = PF.QG$ *etc.* $= K$ *ist.*]

Da die Gleichung der Tangente

$$q = a + bp$$

ist (6.), so erhält man, wenn man $p = m$ und $p = n$ setzt, die beiden Werthe von q, deren Product K sein soll. Man erhält also, zwischen den Elementen der Berührung a und b, die Gleichung

$$(a + mb)(a + nb) = K.$$

Der natürliche und directe Gang würde nun sein, dass man statt a und b ihre Werthe $y - x\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy}{dx}$ (6.) substituirte, welches die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

$$\left(y + (m - x)\frac{dy}{dx}\right)\left(y + (n - x)\frac{dy}{dx}\right) = K$$

giebt, wovon aber die Stammgleichung nicht leicht zu finden ist.

Nimmt man dagegen die ersten Ableitungen von dieser Gleichung, so erhält man

$$\Big[\left(y+(n-x)\frac{dy}{dx}\right)(m-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(y+(n-x)\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$-\left(y+(n-x)\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(y+(m-x)\frac{dy}{dx}\right)(n-x)\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$+\left(y+(m-x)\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}-\left(y+(m-x)\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx},$$

oder]

$$\left(y+(n-x)\frac{dy}{dx}\right)(m-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(y+(m-x)\frac{dy}{dx}\right)(n-x)\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

In dieser Gleichung sind alle Glieder mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ multiplicirt, so dass die Gleichung in folgende zwei zerlegt werden kann

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ und}$$

$$\left(y+(n-x)\frac{dy}{dx}\right)(m-x)+\left(y+(m-x)\frac{dy}{dx}\right)(n-x)=0.$$

Die erste, welche eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung ist, giebt folgende Ableitungs-Gleichung erster Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} = A,$$

wo A eine willkürliche Constante bedeutet, so dass man, nach (46. 1ster Theil) die vollständige Stammgleichung der gegebenen erhält, wenn man blos diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ substituirt. [*nemlich in* $\left(y+(m-x)\frac{dy}{dx}\right)\left(y+(n-x)\frac{dy}{dx}\right)=K$.] Solches giebt

$$(y-Ax+mA)(y-Ax+nA)=K, \text{ oder}$$
$$(y-Ax)^2+(y-Ax)(m+n)A+mnA^2-K=0,$$

und, wenn man die Wurzel auszieht,

$$y = Ax + B,$$

wo B die Wurzel der Gleichung

$$B^2+(m+n)AB+mnA^2-K=0$$

ist. [*Denn, man setze* $y-Ax=B$, *so erhält man, vermöge der Gleichung* $(y\text{-}Ax)^2+(y\text{-}Ax)(m+n)A+mnA^2-K=0$, $B^2+B(m+n)AB+mnA^2-K=0$. *Dasjenige* B, *welches die letzte Gleichung giebt, oder die Wurzel derselben, ist also* $=y-Ax$ *und folglich ist* $y=Ax+B$.]

Man erhält also auf diese Weise nur die Gleichung einer graden Linie. In der That giebt die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ erst $\frac{dy}{dx}=A$, und wenn man hiervon abermals die Stammgleichung nimmt,

$$y = Ax + B,$$

wo A und B zwei willkürliche Constanten sind. Nach (46. 1. Th.) können aber diese Constanten nicht beide zugleich willkürlich sein, weil die gefundene Gleichung

mit der gegebenen, für ein bestimmtes x, übereinkommen muss. Macht man also $x = 0$, so ist

$$y = B \text{ und } \frac{dy}{dx} = A.$$

Also erhält man zwischen A und B [*wenn man* $y = B$ *und* $\frac{dy}{dx} = A$, *in* $\left(y + (m - x)\frac{dy}{dx}\right)$ $\left(y + (n - x)\frac{dy}{dx}\right) = K$ *substituirt*] die Bedingungs-Gleichung

$$(B + mA)(B + nA) = K,$$

welche die nemliche [*Gleichung* $B^2 + (m + n)AB + mnA^2 = K$] ist, die oben zur Bestimmung von B durch A gefunden wurde.

Wir kommen weiter zu der anderen Gleichung $\left[\left(y + (n - x)\frac{dy}{dx}\right)(m - x) + \left(y + (m - x)\frac{dy}{dx}\right)(n - x) = 0,\right]$ die nur von der ersten Ordnung ist. Sie giebt ebenfalls eine Stammgleichung zu der gegebenen, wenn man $\frac{dy}{dx}$ eliminirt. Denn man erhält [$y(m - x + n - x) + \frac{dy}{dx}((m - x)(n - x) + (n - x)(m - x))$, *oder*]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x - m - n)y}{2(m - x)(n - x)},$$

und wenn man diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ in die gegebene Gleichung $\left[\left(y + (m - x)\frac{dy}{dx}\right)\left(y + (n - x)\frac{dy}{dx}\right) = K\right]$ substituirt,

$$\left[\left(y+\frac{(2x-m-n)y}{2(n-x)}\right)\left(y+\frac{(2x-m-n)y}{2(m-x)}\right)=K,\right.$$
oder $y^2(2(n-x)+2x-m-n)(2(m-x)+2x-m-n)$ $=4K(m-x)(n-x)$, *oder* $y^2(n-m)(m-n)$ $=4K(m-x)(n-x)=0$, *oder*]

$$y^2+\frac{4K(m-x)(n-x)}{(m-n)^2}=0,$$

welches die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem K positiv oder negativ ist. Die grosse Axe ist $m-n$, die kleine Axe $2\sqrt{K}$ und die beiden Scheitel liegen in den Puncten, in welchen $x=m$ und $x=n$ ist. [*Denn man bezeichne die grosse Axe einer Ellipse oder Hyperbel durch* a, *die kleine durch* b, *so sind bekanntlich* $y^2 \pm \frac{b^2}{a^2}v^2 = \frac{1}{4}b^2$, *die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel, für Coordinaten aus dem Mittel-Puncte. Nun ist in der obigen Gleichung,* $y=0$ *für* $x=m$ *und* $x=n$, *also schneidet die gefundene Curve die Abscissen-Axe in den Puncten, deren Abscissen* m *und* n *sind; folglich ist die grosse Axe* $a=m-n$, *mithin ist, Fig. 5. die halbe grosse Axe* $BC=\frac{1}{2}(m-n)$ *und folglich* $x+v$, *oder* $AP+CP=AB+BC=n+\frac{1}{2}(m-n)=\frac{1}{2}(m+n)$, *weil* $AB=n$ *und* BC *gleich der halben grossen Axe,* $=\frac{1}{2}(m-n)$ *ist. Es ist also* $x+v=\frac{1}{2}(m+n)$, *und folglich* $x=\frac{1}{2}(m+n)-v$, *also* $m-x=v$ $+\frac{1}{2}(m-n)=v+\frac{1}{2}a$ *und* $n-x=v-\frac{1}{2}(m-n)$ $=v-\frac{1}{2}a$. *Dieses in die gefundene Gleichung, und zugleich* $y=u$ *gesetzt, giebt* $y^2-4K\frac{v^2-\frac{1}{4}a^2}{a^2}$

$= 0$, *oder* $y^2 + \frac{4Kv^2}{a^2} = K$, *woraus sich, mit* $u^2 \pm \frac{b^2}{a^2} v^2 = \frac{1}{4} b^2$ *verglichen, zeigt, dass die kleine Axe* $b = 2\sqrt{K}$ *und die Linie eine Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem K positiv oder negativ ist.*]

Die Eigenschaft der Tangenten, aus welcher wir diese Gleichung gefunden haben, ist im 42sten Satze des dritten Buchs der Abhandlung des Apollonius über die Kegelschnitte bewiesen; aber der obige Beweiss hat den Vorzug, zu zeigen, dass diese Eigenschaft den Kegelschnitten ausschliesslich zukommt.

16.

Untersucht man nun die beiden obigen Auflösungen, so ist leicht zu sehen, dass die erste nichts anders als die grade Linie selbst giebt, die man als Tangente angenommen hat, sobald man die beiden Elemente a und b constant sein lässt; denn die Gleichung $y = Ax + B$ weicht von der Gleichung dieser Tangente $q = a + bp$ nicht ab, weil die Gleichung zwischen den beiden Constanten A und B offenbar die nemliche ist, die man für die beiden Grössen a und b voraussetzte. [*Nemlich, die für a und b vorausgesetzte Gleichung war* $(a + mb)(a + nb) = K$, *oder* $a^2 + (m+n)ab + mnb^2 - K = 0$. *Die gefundene Gleichung zwischen A und B war* $B^2 + (m+n)AB + mnA^2 - K = 0$. *Beide stimmen völlig überein, wenn man nur B statt a, und A statt b setzt.*]

In der That ist klar, dass jede grade Linie der

Aufgabe genugthut, sobald nur zwischen ihren beiden Elementen [*Parametern*], das durch die Bedingung der Aufgabe bestimmte Verhältniss Statt findet; und da eine Constante unbestimmt bleibt, so folgt, dass die Gleichung dieser graden Linie die vollständige Stammgleichung der durch die Aufgabe gegebenen abgeleiteten erster Ordnung sein muss. Die Aufgabe wird also, analytisch gesprochen, durch die Gleichung $y = a + bx$ selbst vollständig aufgelöset, wenn a und b zwei Constanten bedeuten, deren eine willkürlich ist, die andere durch die Gleichung

$$(a + mb)(a + nb) = K,$$

bestimmt wird.

Die zweite Auflösung ist, weil sie keine willkürliche Constante enthält, strenge genommen, weniger allgemein, als die erste und kann von jener nur entweder ein besonderer Fall sein, oder vielleicht eine singulaire Auflösung, die aus Betrachtungen, wie in (60. 1ster Theil) hervorgeht.

Es ist leicht zu sehen, dass sie kein besonderer Fall ist, denn wäre sie es, so müsste die Gleichung $y = a + bx$ der ersten Auflösung, der Gleichung, $y^2 + 4K\frac{(m-x)(n-x)}{(m-n)^2} = 0$, der zweiten, Genüge thun können, wenn man nur die willkürlichen Constanten gehörig bestimmt, oder es müsste, wenn man y zwischen den beiden Gleichungen eliminirt, das Resultat nur noch Constanten enthalten, welches aber nicht der Fall ist. [*Wenn die Gleichung* $y = a + bx$ *blos durch die Constanten a und b auf die Gleichung* $y^2 = -4K\frac{(m-x)(n-x)}{(m-n)^2}$ *gebracht werden*

könnte, so müsste

$$(a+bx)^2 = -4K\frac{(m-x)(n-x)}{(m-n)^2}, \text{ oder}$$

$$a^2+2abx+b^2x^2 = -\frac{4K}{(m-n)^2}(mn-(m+n)x+x^2),$$

also, wegen der Unabhängigkeit der Grösse x von den übrigen Grössen,

$$a^2 = -\frac{4Kmn}{(m-n)^2}$$

$$b^2 = -\frac{4K}{(m-n)^2}$$

$$2ab = +\frac{4K(m+n)}{(m-n)^2}, \text{ also}$$

$$4\left(-\frac{4Kmn}{(m-n)^2}\right).\left(-\frac{4K}{(m-n)^2}\right) = \left(+\frac{4K(m+n)}{(m-n)^2}\right)^2,$$

oder $4mn = (m+n)^2$, *oder* $(m-n)^2 = 0$, *also*

$$m = n$$

sein. Folglich ist nur in diesem einzigen Fall die zweite Auflösung ein besonderer Fall der ersten. Für jedes beliebige andere m und n ist sie es nicht.]

Sie kann also nur eine singulaire Auflösung sein. In der That haben wir im 1sten Theil (59.) gesehen, dass das Kennzeichen einer singulairen Stammgleichung jeder beliebigen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung von der Form $\frac{dy}{dx} = Fx, y$, darin besteht, dass $\frac{dFxy}{dy}$ unendlich gross ist. Nun giebt die Grund-Gleichung unserer Aufgabe

$$\left(y+(m-x)\frac{dy}{dx}\right)\left(y+(n-x)\frac{dy}{dx}\right) = K,$$

wenn man sie auf die obige Form $\left[\frac{dy}{dx} = Fx, y\right]$

bringt, [*das heisst also*, $\frac{dy}{dx}$ *aus der Gleichung entwickelt*]

$$Fx,y = \frac{y(2x-m-n) + \sqrt{(4K(m-x)(n-n) + (m-n)^2 y^2)}}{2(m-x)(n-x)}.$$

[*Nemlich* $y^2 + y\frac{dy}{dx}(m-x+n-x) + (m-x)(n-x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = K$, *oder* $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y(2x-m-n)}{(m-x)(n-x)}\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{(m-x)(n-x)} - \frac{K}{(m-x)(n-x)} = 0$, *giebt*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x-m-n)}{2(m-x)(n-x)} \pm \sqrt{\left(\frac{y^2(2x-m-n)^2}{4(m-x)^2(n-x)^2} - \frac{y^2-K}{(m-x)(n-x)}\right)},$$

oder $\frac{dy}{dx} =$

$$\frac{y(2x-m-n) \pm \sqrt{(y^2(2x-m-n)^2 - 4(m-x)(n-x)) + 4K(m-x)(n-x))}}{2(m-x)(n-x)}.$$

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist $y^2((x-m+x-n)^2 - 4(x-m)(x-n)) + 4K(m-x)(n-x) = y^2((x-m)-(x-n))^2 + 4K(m-x)(n-x) = y^2(m-n)^2 + 4K(m-x)(n-x)$, *also ist*

$$\frac{dy}{dx} = Fx,y = \frac{y(2x-m-n) \pm \sqrt{(4K(m-x)(n-x) + (m-n)^2 y^2)}}{2(m-x)(n-x)},$$

wie oben.]

Dieses giebt [*wenn man die Ableitung nach y nimmt*]

$$\left[\frac{dFx,y}{dy} = \frac{2x-m-n \pm \frac{(m-n)^2 y}{\sqrt{(4K(m-x)(n-x) + (m-n)^2 y^2)}}}{2(m-x)(n-x)},\right.$$

oder]

$$\frac{dFxy}{dy} = \frac{(m-n)^2 y \pm (2x-m-n)\sqrt{(4K(m-x)(n-x) + (m-n)^2 y^2)}}{2(m-x)(n-x)\sqrt{(4K(m-x)(n-x) + (m-n)^2 y^2)}}$$

wo, wie man sieht, $\frac{dFx,y}{dy}$ unendlich gross ist, wenn

$$4K(m-x)(n-x) + (m-n)^2 y^2 = 0,$$

[*oder* $y^2 + \frac{4K(m-x)(n-x)}{(m-n)^2} = 0$] welches grade die zweite Auflösung war.

17.

Untersucht man, wie wir zu dieser Auflösung gekommen sind, so findet man, dass sie von dem Umstande abhängt, dass die ersten Ableitungen von a und b, wenn man a und b als Functionen von x, y, und $\frac{dy}{dx}$ betrachtet, in einem Verhältniss stehen, in dessen Ausdruck $\frac{d^2y}{dx^2}$ nicht vorkommt. Denn da $b = \frac{dy}{dx}$ und $a = y - x\frac{dy}{dx}$ war, so ist

$$\frac{db}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ und}$$

$$\frac{da}{dx}\left[= \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right] = -x\frac{d^2y}{dx^2}, \text{ welches}$$

$$\frac{da}{dx} : \frac{db}{dx} = -x$$

giebt, so dass man, wenn man die erste Ableitung der Gleichung

$$(a + mb)(a + nb) = K$$

[*nach* x] nimmt und durch $\frac{db}{dx}$ dividirt, eine Gleichung erhält, welche ebenfalls von der ersten Ordnung ist. Das Resultat der Elimination von $\frac{dy}{dx}$ zwischen diesen beiden Gleichungen, giebt die oben ge-

fundene Gleichung der Kegelschnitte. Man erwäge, dass die Grössen a und b durch die Gleichungen

$$y = a + bx \text{ und } \frac{dy}{dy} = b \; (11.)$$

gegeben werden. Die Gleichung, welche man sucht, ist also das Resultat der Elimination von a, b und $\frac{dy}{dx}$ zwischen den Gleichungen

$$y = a + bx, \; \frac{dy}{dx} = b, \; (a + mb)(a + nb) = K,$$

und der ersten abgeleiteten dieser letzten, dividirt durch $\frac{db}{dx}$. Mithin erhält man auch das Nemliche, wenn man zuerst eine der Grössen a oder b, zwischen den beiden Gleichungen $y = a + bx$ und $(a + mb)(a + nb) = K$ und darauf die andere zwischen der entstehenden Gleichung und der davon nach ihr abgeleiteten, eliminirt. Auf diese Weise erhält man, wenn man zuerst a wegschafft, [*weil aus* $y = a + bx$, $a = y - bx$ *folgt*]

$$(y + (m - x) b)(y + (n - x) b) = K.$$

Nimmt man hiervon die Ableitung nach b und dividirt durch $\frac{db}{dx}$, so erhält man $(m - x)(y + (n - x) b) + (n - x)(y + (m - x) b) = 0$, woraus folgt

$$b = \frac{(2x - m - n) y}{2 (m - x)(n - x)}.$$

Setzt man diesen Werth von b in die andere Gleichung [$(a + mb)(a + nb) = K$, *oder, nachdem* $a = y - bx$ *substituirt worden, in* $(y + (m - x) b)(y + (n - x) b) = K$,] so erhält man

$$\left[\left(y + \frac{2x-m-n}{2(n-x)}y\right)\left(y + \frac{2x-m-n}{2(m-x)}y\right) = K,\right.$$

oder $(2n-2x+2x-m-n)(2m-2x+2x-m-n)y^2 = 4(m-x)(n-x)K$, *oder* $(n-m)(m-n)y^2$

$$\left. = 4(m-x)(n-x)K, \text{ oder}\right]$$

$$y^2 + \frac{4K(m-x)(n-x)}{(m-n)^2} = 0,$$

welches die zweite Auflösung enthält.

Man kann auch von dem Gesichts-Punct ausgehen, dass aus der Gleichung $(a+mb)(a+nb) = K$, welche das Verhältniss zwischen a und b giebt, in welchem die Bedingung der Aufgabe besteht, wenn man sie auflöset, $a = fb$ folgt. Substituirt man Dieses in die Gleichung $y = a + bx$, so erhält man $y = fb + bx$, welche Gleichung nur noch die Constante b enthält, die sich mit Hülfe der ersten, davon nach b abgeleiteten, Gleichung $0 = \frac{dfb}{db} + x$, eliminiren lässt, welches ebenfalls das nemliche Resultat giebt. Nun ist $y = fb + bx$, dem Obigen zufolge, die vollständige Stammgleichung der durch die Aufgabe gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung; also ist grade die, durch die Elimination von b, zwischen ihr und der Gleichung $\frac{dfb}{db} + x = 0$, entstehende Gleichung, vermöge (60. 1ster Theil) die singulaire Stammgleichung.

Auf der anderen Seite kann mvn daraus, dass $y = fb + bx$ die allgemeine Gleichung aller Tangenten der gesuchten Curve ist (15.), schliessen, dass man, um die Gleichung dieser Curve zu haben, nur

die willkürliche Constante b, durch welche eine Tangente in die andere übergeht [*qui differentie les tangentes*], als veränderlich betrachten und sie dadurch bestimmen darf, dass man die nach b abgeleitete Gleichung mit der Stammgleichung zugleich bestehen lässt. [*Dadurch nemlich wird wesentlich die Veränderlichkeit von b ausgedrückt, welche Grösse, wenn man unter allen möglichen Tangenten diejenige finden will, die der Aufgabe entspricht, wirklich veränderlich ist. Sobald in einer Gleichung eine Grösse veränderlich ist, finden, zugleich mit der Gleichnng selbst, auch alle, nach jenen Grössen davon abgeleiteten, ebenfalls Statt.*] Daraus folgt auch, dass die singulaire Stammgleichung, welche wir für die durch die Aufgabe gegebene Stammgleichung erster Ordnung gefunden haben, nichts anders ist, als die Gleichung der Curve, welche durch die stetige Aufeinanderfolge aller der graden Linien gebildet wird, welche die vollständige Stammgleichung der gegebenen Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ausdrückt. [*Nemlich, wenn man b als veränderlich betrachtet und man eliminirt solches aus der Gleichung aller derjenigen, schon die Bedingung* $(a+bm)(a+bn)=K$ *erfüllenden Tangenten, die, wenn das daraus entwickelte a in die allgemeine, bedingungslose Gleichung der Tangente* $y=a+bx$ *substituirt wird,* $y=fb+bx$ *giebt, mit Hülfe der davon nach b abgeleiteten Gleichung* $o=\frac{dfb}{db}+x$, *so erhält man eine Gleichung ohne b, und folglich auch ohne a, mithin eine Gleichung, die nur noch x und y und gar keins von den beiden*

Bestim-

Bestimmungsstücken a und b der Tangente weiter enthält. Da diese Gleichung zwischen x und y allein, und unabhängig von a und b, wirklich Statt findet, so ist sie nichts anders, als die Gleichung derjenigen Curve, deren Tangenten die Bedingung $(a + bm)(a + bn) = K$ erfüllen.]

18.

Nachdem wir auf diese Weise den Gegenstand durch ein Beispiel erläutert haben, können wir ihn aus einem allgemeineren Gesichtspuncte behandeln.

Es sey, wie in (10.)

$$F(xy\,ab)\ [= u] = 0.$$

die Gleichung der berührenden Curve, für welche wir oben eine grade Linie annahmen. Ferner sey

$$\varphi(a, b) = 0,$$

die Gleichung, welche das, durch die Natur der Aufgabe bestimmte, Verhältniss zwischen den beiden Elementen der Berührung *a* und *b* ausdrückt, so müssen die Grössen *a* und *b*, zufolge (10.), aus den beiden Gleichungen

$$u = 0 \text{ und } \frac{du}{dx} = 0,$$

bestimmt werden.

Nun haben wir im ersten Theil (46.) gesehen, dass man, wenn man *a* und *b* zwischen den drei Gleichungen

$$u = 0,\ \frac{du}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

eliminirt, eine Ableitungs-Gleichung der zweiten Ordnung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ erhält, welche

wir durch $v = 0$ bezeichnen wollen, und von welcher $u = 0$ die vollständige Urgleichung, mit den beiden willkürlichen Constanten a und b, ist. Wir haben ferner gesehen, dass, wenn man a oder b aus den beiden ersten Gleichungen [$u = 0$ und $\frac{du}{dx} = 0$] eliminirt, die beiden entstehenden Gleichungen, Stammgleichungen erster Ordnung von der nemlichen Gleichung [*zweiter Ordnung*] $v = 0$ sind, und dass man aus ihnen diese letztere erhält, wenn man von ihnen, von Neuem, die abgeleiteten Gleichungen nimmt und zwischen selbigen die übrig gebliebene Constante eliminirt. (47.) Entwickelt man also aus jenen beiden Gleichungen [*die durch Wegschaffung von a oder b, zwischen* $u = 0$ *und* $\frac{du}{dx} = 0$, *entstehen*], die Werthe von a und b [*nemlich jedesmal den Werth der anderen, noch nicht weggeschafften, Constante*] und bezeichnet diese Werthe von a und b durch P und Q, so, dass $a = P$ und $b = Q$, wo P und Q Functionen von x, y und $\frac{dy}{dx}$ sind, [*weil die Gleichungen, die durch Wegschaffung von a oder b, zwischen* $u = 0$ *und* $\frac{du}{dx} = 0$, *entstehen, ausser der einer übrig gebliebene Constante, die Grössen* x, y *und* $\frac{dy}{dx}$ *enthalten,*] nimmt dann die ersten Ableitungen von diesen Gleichungen [*nach* x] indem man immer noch a und b als Constanten betrachtet, so erhält man die Gleichungen zweiter Ordnung $\frac{dP}{dx} = 0$ und $\frac{dQ}{dx} = 0$, die nothwendig mit

$v = o$ übereinkommen müssen [*weil sie von derselben Urgleichung herkommen und, eben wie $v = o$, auch keine der beiden Constanten a und b mehr enthalten*]. Es muss also nothwendig

$$\frac{dP}{dx} = Mv \text{ und } \frac{dQ}{dx} = Nv$$

sein, wo M und N Functionen von x, y und $\frac{dy}{dx}$, aber nicht von $\frac{d^2y}{dx^2}$ sind. Denn, enthielte z. B. M auch noch $\frac{d^2y}{dx^2}$, so würde der Gleichung $\frac{dP}{dx} = o$, ausser [*der Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung*] $v = o$, noch eine andere Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung $M = o$ entsprechen, die in der nemlichen Gleichung $v = o$ nicht enthalten wäre, was nicht sein kann [*weil $v = o$ vollständig ist*].

Substituirt man also diese [*in x, y und $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückten*] Werthe der Grössen a und b, in die, durch die Aufgabe [*zwischen a und b*] vorgeschriebene Gleichung $\varphi ab = o$, so erhält man

$$\varphi PQ = o.$$

Nimmt man hiervon die erste abgeleitete Gleichung, so erhält man

$$\frac{dP}{dx} \cdot \frac{d\varphi PQ}{dP} + \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{d\varphi PQ}{dQ} = o,$$

und, wenn man hierin, statt $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dx}$, die obigen Ausdrücke [*Mv und Nv*] setzt,

$$v\left(M\frac{d\varphi PQ}{dP} + N\frac{d\varphi PQ}{dQ}\right) = o,$$

welche Gleichung in die beiden

$$v = o \text{ und } M\frac{d\varphi PQ}{dP} + N\frac{d\varphi PQ}{dQ} = o,$$

zerfällt.

Die erste Gleichung $v = o$ ist von der zweiten Ordnung, und hat zur vollständigen Urgleichung:

$$u = F(xy\ ab) = o,$$

das heisst, die Gleichung der berührenden Curven selbst, in welcher nur eine der beiden Constanten a und b willkürlich ist, die andere aber durch die, von der Natur der Aufgabe vorgeschriebene, Gleichung [*zwischen a und b*], $\varphi ab = o$ bestimmt wird.

Die andere Gleichung $M\frac{d\varphi PQ}{dP} + N\frac{d\varphi PQ}{dQ}$ ist nur von der ersten Ordnung und enthält keine willkürliche Constante [*denn weder P und Q, noch M und N enthalten* $\frac{d^2y}{dx^2}$, *oder a oder b*]. Verbindet man sie aber mit der Gleichung $\varphi PQ = o$, so erhält man, wenn man $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, eine Gleichung zwischen x und y, welche die singulaire Stammgleichung von $\varphi PQ = o$ ist.

Diese Gleichung ist also das Resultat der Elimination der Grössen a, b und $\frac{dy}{dx}$ zwischen den vier Gleichungen

$$u = o,\ \frac{du}{dx} = o,\ \varphi(ab) = o \text{ und } M\frac{d\varphi ab}{da} + N\frac{d\varphi ab}{db} = o.$$

[*Denn, durch die Elimination von a oder b zwischen den beiden Gleichungen* $u = o$ *und* $\frac{du}{dx} = o$, *entstanden zwei Gleichungen, die nur noch, die eine a, die andere b allein enthielten. Aus diesen*

beiden Gleichungen wurden a und b in x, y und $\frac{dy}{dx}$ *entwickelt, die Werthe von a und b in x, y und* $\frac{dy}{dx}$ *wurden, durch P und Q bezeichnet, in* $\varphi a, b = o$ *substituirt, darauf wurde von der Gleichung* $\varphi a, b = o$, *oder* $\varphi P Q = o$, *die erste Ableitung genommen und die eine daraus entstehende Gleichung war* $M \frac{d\varphi ab}{da} + N \frac{d\varphi ab}{db} = o$, *oder* $M \frac{d\varphi PQ}{dP} + N \frac{d\varphi PQ}{dQ} = o$. *Endlich wurde zwischen dieser Gleichung und der Gleichung* $\varphi a, b = o$, *oder* $\varphi P Q = o$, $\frac{dy}{dx}$ *eliminirt, welches eine Gleichung zwischen x und y allein gab. Diese Gleichung war also in der That das Resultat der Elimination der Grössen a, b und* $\frac{dy}{dx}$ *zwischen den vier Gleichungen* $u = o$, $\frac{du}{dx} = o$, $\varphi(ab) = o$ *und* $M \frac{d\varphi ab}{da} + N \frac{d\varphi ab}{db} = o$.]

Betrachtet man *a* und *b* als Functionen von *x* und *y*, so geben die, aus den ersten beiden [*durch die Wegschaffung von a oder b zwischen* $u = o$ *und* $\frac{du}{dx} = o$] entstandenen Gleichungen $a = P$ und $b = Q$, die beiden abgeleiteten

$$\frac{da}{dx} = \frac{dP}{dx} = Mv \text{ und } \frac{db}{dx} = \frac{dQ}{dx} = Nv,$$

woraus folgt:

$$\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = \frac{N}{M},$$

so dass die letzte Gleichung $[M\frac{d\varphi ab}{da} + N\frac{d\varphi ab}{db} = 0$, *oder* $\frac{d\varphi ab}{da} + \frac{N}{M}\frac{d\varphi ab}{db} = 0]$ in

$$\frac{d\varphi ab}{da} + \frac{d\varphi ab}{db} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = 0$$

übergeht, welches nichts anders, als die erste Ableitung von $\varphi ab = 0$ nach x ist, wenn man selbige durch $\frac{da}{dx}$ dividirt, $\Big[$*denn* $\frac{d\varphi ab}{dx}$ *ist gleich* $\frac{d\varphi ab}{da} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{d\varphi ab}{db} \cdot \frac{db}{dx}\Big]$. Auf der anderen Seite ist klar, dass die erste Ableitung von u, wenn man a und b als veränderlich annimmt, nicht blos $\frac{du}{dx}$ ist, sondern, dass alsdann die, von der Veränderung von a und b herrührenden, Glieder, welche $\frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx}$ sind, hinzukommen, so dass also $\frac{d(u)}{dx} = 0$, jetzt

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} = 0 \text{ ist.}$$

Es ist aber schon $\frac{du}{dx} = 0$. Folglich findet nothwendig, wenn man a und b veränderlich annimmt, die Gleichung

$$\frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} = 0$$

Statt, woraus

$$\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = -\frac{du}{da} : \frac{du}{db}$$

folgt. Dieses ist der obige Werth von $\frac{N}{M}$. $\Big[$*Denn*

es war oben $\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = \frac{N}{M}$.] Man kann ihn auf diese Weise unmittelbar finden und sieht leicht, dass er nur eine Function erster Ordnung sein kann, weil darin nur x, y und a und b vorkommen.

Die Gleichung, worauf es ankommt, ist also das Resultat der Elimination von a, b und $\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx}$ zwischen den vier Gleichungen

$$u = 0,\ \varphi ab = 0,\ \frac{du}{da} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{d\varphi ab}{da} + \frac{d\varphi ab}{db} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = 0,$$

von welchen die beiden letzten die Ableitungen der beiden ersten sind, nach a und b genommen und durch $\frac{da}{dx}$ dividirt. Die Gleichung $\frac{du}{dx} = 0$ ist hier nicht mehr nöthig, sondern wird durch die Gleichung $\frac{du}{da} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = 0$ ersetzt, welche daraus folgt.

Reducirt man sogleich die beiden ersten Gleichungen [$u = 0$ *und* $\varphi ab = 0$] durch die Elimination von b, auf eine einzelne Gleichung, so darf man nur von dieser die erste abgeleitete nach a nehmen und zwischen ihr und dieser ihrer abgeleiteten, a eliminiren, so muss das Resultat nothwendig das Nemliche sein, wie vorhin.

Nimmt man nemlich aus der, zwischen den Elementen die Berührung a und b, durch die Natur der Aufgabe vorgeschriebenen Gleichung $\varphi ab = 0$, den Werth von b in a und setzt $b = \Psi a$ (wo Ψ ein Functions-Zeichen ist) und hierauf diesen Werth von

b in die Gleichung der berührenden Curve $u = 0$; nimmt man ferner die erste Ableitung der entstehenden Gleichung $u = F(xy\, a\, \Psi a) = 0$, nach a, welches $\frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0$, oder $\frac{du}{da} = 0$ giebt, so erhält man die beiden Gleichungen

$$u = F(xy\, a\, \Psi a) = 0 \text{ und } \frac{du}{da} = 0,$$

aus welchen noch a zu eliminiren ist. Das Resultat ist offenbar nichts anders, als die singulaire Stammgleichung derjenigen [*durch die Elimination von a oder b zwischen* $u = 0$ *und* $\frac{du}{dx} = 0$ *entstehenden*] Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, deren vollständige Stammgleichung $F(xy\, a\, \Psi a) = 0$ ist. (60. 1ster Theil.)

Die durch diese singulaire Gleichung ausgedrückte Curve ist diejenige, welche der Aufgabe ein Genüge thut und welche die Eigenschaft hat, in jedem Puncte von einer, durch die Gleichung

$$F(xy\, a\, \Psi a) = 0$$

ausgedrückten Curve, berührt zu werden, für welche zwar a, für eine und dieselbe Curve, constant, aber von einer zur anderen Curve veränderlich ist. [*Nemlich, die berührende Curve bleibt zwar immer von der nemlichen Gattung, wie oben die berührende grade Linie, ist aber von einem Punct zum anderen, eine andere, weil a veränderlich ist und von x und y abhängt.*]

19.

Gegenwärtige Auflösung der Aufgabe ist, analytisch, directer, folgende aber ist leichter. Da nemlich die Aufgabe darin besteht, eine Curve zu finden, welche überall eine andere Curve, deren Gleichung, mit einem noch unbestimmten Parameter a,

$$F(xy\,a\,\Psi a) = u = 0$$

ist, in der ersten Ordnung berührt, so folgt aus (10.) dass die Gleichung der gesuchten Curve für y und $\frac{dy}{dx}$ eben die Werthe in x geben muss, die aus den Gleichungen,

$$u = 0 \text{ und } \frac{du}{dx} = 0$$

folgen [*weil nemlich beide Curven überall gemeinschaftliche gradlinige Tangenten haben sollen*]. Nun aber ist a eine unbestimmte Grösse. Man kann also diesem a einen solchen [*veränderlichen*] Werth geben, dass die gesuchte Curve ebenfalls durch die Gleichung $F(xy\,a\,\Psi a) = u = 0$ ausgedrückt wird, wenn nur zugleich die erste abgeleitete Gleichung von $u = 0$ ebenfalls die Form $\frac{dy}{dx} = 0$ hat. [*Nemlich die gesuchte Curve, welche berührt wird, ist nichts anders als die berührende selbst, mit veränderlichen Parametern. In dem obigen Beispiel war die, durch die Gleichung* $(a + bm)\,(a + bn) = K$ *ausgedrückte, berührende, eine grade Linie, für welche die Bedingung Statt fand, dass sie von den, zu den Abscissen* m *und* n *gehörigen Ordinaten, Stücke abschnitte*

deren Product der Grösse K gleich ist. Dergleichen Linien sind unzälige möglich. Also, wenn man den einen Parameter aus der Bedingungs-Gleichung nimmt und den Werth desselben in die Gleichung der graden Linie, $y = a + bx$, substituirt, oder, allgemein gesprochen, die Gleichung der graden Linie mit der Bedingungs-Gleichung verbindet, so bleibt nur ein Parameter übrig und dieser ist veränderlich oder unbestimmt. Stellt man sich nun denselben stetig veränderlich vor, so geht immerfort die grade Linie, welche die bestimmten Stücke von den Ordinaten abschneidet, in eine andere über, die das Nemliche thut, aber einen anderen Parameter hat; also drückt die Gleichung der gegebenen berührenden Curve mit veränderlichem Parameter eine Linie aus, in welcher alle die, wechselseitig auf einander folgenden, Durchschnitte der verschiedenen möglichen berührenden gegebenen Curven liegen, und diese Linie ist nichts anders als die gesuchte, berührte Curve selbst, weil sie die Eigenschaft besitzt, mit jeder der verschiedenen möglichen berührenden Curven, einen Punct gemein zu haben, und von allen in der vorgeschriebenen Ordnung, z. B. in dem obigen Falle, in der ersten Ordnung, berührt zu werden. In dem obigen Beispiel heisst die Aufgabe nichts anders, als den geometrischen Ort der Durchschnitte aller graden Linien zu finden, welche von den, zu den Abscissen m und n gehörigen, Ordinaten oder Perpendikeln auf die Abscissen-Axe, Stücke abschneiden, deren Product einer gegebenen Grösse K gleich ist. Die Curve, welche

dieser geometrische Ort bildet, besitzt nothwendig die Eigenschaft, dass sie mit jeder möglichen, die vorgeschriebene Bedingung erfüllenden, graden Linie einen Punct gemein hat und von allen in der ersten Ordnung berührt wird. Ihre Gleichung kann man sich als die Gleichung der, die vorgeschriebene Bedingung erfüllenden, graden Linie selbst, mit veränderlichem Parameter, vorstellen.] Ist aber nun a eine veränderliche Grösse, so ist die vollständige erste Ableitung von $u = F(xya\Psi a) = 0$, wie wir oben gesehen haben,

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0.$$

Die Bedingung also wird erfüllt, wenn man a, der Gleichung

$$\frac{du}{da} = 0$$

gemäss, bestimmt, [*weil schon* $\frac{du}{dx}$ *an sich Null ist und folglich von* $\frac{du}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0$ *nur* $\frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0$, *oder* $\frac{du}{da} = 0$ *übrig bleibt*] welches die obige Auflösung giebt. [*In* (17.) *ist hiernach verfahren.*]

Jede Gleichung zwischen x und y und einem unbestimmten Parameter a, wie $f(xya) = u = 0$, drückt, wenn man der Grösse a nach und nach alle mögliche Werthe beilegt, eine Familie von unendlich vielen Curven aus, deren Gestalt oder Lage, oder beide zugleich, sich mit dem Parameter ändern. Eliminirt man diesen Parameter mittelst der Ableitungen [*von der gegebenen Gleichung* $u = 0$], so

entspricht die entstehende Ableitungs-Gleichung erster Ordnung dieser ganzen Familie von Curven zugleich. Sie gehört daher auch zu der, von allen diesen Curven gebildeten, sie umfangenden Curve, welche alle jene Curven in der ersten Ordnung berührt. Die nemliche Gleichung $u = fxya = 0$ und ihre abgeleitete $\frac{d(u)}{dx} = \frac{dfxya}{dx} = 0$ passen daher auch auf die umfangende Curve, wenn man den Parameter veränderlich annimmt. Dann aber ist die vollständige erste abgeleitete Gleichung von $u = 0$, $\frac{du}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0$. Der Werth von a muss also von der Art sein, dass $\frac{du}{da} = 0$ [*nemlich, weil* $\frac{du}{dx}$ *schon an sich Null ist und folglich von* $\frac{du}{dx}$ $+ \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0$ *nur* $\frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0$ *oder* $\frac{du}{da} = 0$ *übrig bleibt*], welches dann die singulaire Stammgleichung der, der gegebenen Gleichung $u = f(xya) = 0$ entsprechenden, Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ist, in welcher a als eine willkürliche Constante betrachtet wird. (60. 1ster Theil.) [*nemlich der Gleichung, die durch die Elimination von* a *zwischen* $u = 0$ *und* $\frac{du}{dx} = 0$ *entsteht.*]

Daraus folgt im Allgemeinen, dass die singulaire Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung allezeit diejenige Curve ausdrückt, welche alle die Curven umfängt, die von der vollständigen Stammgleichung ausgedrückt werden, wenn man in derselben der willkürlichen Constante alle mögliche

Werthe giebt. [*In der Benennung „Umfangen" ist die Bedingung mit enthalten, dass die Curve, welche von der singulairen Stammgleichung ausgedrückt wird, mit allen, von der vollständigen Stammgleichung ausgedrückten Curven, zugleich überall einerlei gradlinige Tangenten hat.*

Diese Erläuterung der Eigenschaft der umfangenden Curve kömmt mit der vorhin in der Anmerkung gegebenen Erläuterung überein.

Der Schluss dieses Abschnitts macht den Gegenstand desselben vorzüglich deutlich. Es folgt daraus auch wieder, dass es bei allgemeinen Untersuchungen grade nicht gut ist, mit Beispielen anzufangen. Das Allgemeinste ist in solchen Fällen am leichtesten und deutlichsten.]

Vierter Abschnitt.

Von der Berührung zweiter Ordnung. Theorie und Construction der singulairen Stammgleichungen höherer Ordnungen. Beispiel an der analytischen Theorie der Evoluten.

20.

Wir wollen nun ferner die Berührung zweiter Ordnung untersuchen. Die Gleichung der berührenden Curve sey

$$u = F(x, y, a, b, c) = 0,$$

und zwischen den drei Elementen a, b, c sey die Bedingungs-Gleichung

$$\varphi(a, b, c) = 0$$

gegeben.

Da diese drei Elemente [*wenn eine Berührung zweiter Ordnung Statt finden soll*] aus den drei Gleichungen

$$u = 0, \frac{du}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

genommen werden müssen (10.), so ist die Bedingungs-Gleichung der Aufgabe, wenn man die Werthe von a, b, c [*so wie sie, in* x, y, $\frac{dy}{dx}$ *und* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *ausgedrückt, aus den Gleichungen* $u = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$ *und* $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ *folgen*] durch P, Q, R bezeichnet,

$$\varphi(P, Q, R) = 0,$$

welche, wie leicht zu sehen, von der zweiten Ordnung ist. Nimmt man von den drei Gleichungen $a = P$, $b = Q$, $c = R$ die ersten Ableitungen, indem a, b, c als unveränderlich betrachtet werden, so erhält man jedesmal eben die Gleichung dritter Ordnung $v = 0$, welche das Resultat der Elimination von a, b, c zwischen den drei obigen Gleichungen [$u = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$ *und* $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$] und der Ableitungs-Gleichung dritter Ordnung $\frac{d^3u}{dx^3} = 0$ ist. (46. 1ster Theil.) [*Denn* P, Q, R *enthalten sämmtlich keine Constanten mehr, sondern nur* x, y, $\frac{dy}{dx}$ *und* $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Die von* $a = P$, $b = Q$, $c = R$ *ab-*

geleiteten Gleichungen $o=\frac{dP}{dx}$, $o=\frac{dQ}{dx}$, $o=\frac{dR}{dx}$ *enthalten also sämmtlich keine Constanten, sondern nur* $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ *und* $\frac{d^3y}{dx^3}$ *und müssen folglich mit der Gleichung* $v=o$, *welche durch die Elimination von* a, b, c *zwischen* $u=o$, $\frac{du}{dx}=o$, $\frac{d^2u}{dx^2}=o$, $\frac{d^3u}{dx^3}=o$ *entsteht, und folglich auch nur* $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ *enthält, nothwendig übereinkommen.*] Es ist also nothwendig

$$\frac{dP}{dx}=Mv,\ \frac{dQ}{dx}=Nv,\ \frac{dR}{dx}=Lv,$$

wo M, N und L Functionen von $x, y, \frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ ohne $\frac{d^3y}{dx^3}$ sind, so dass man, wenn man die erste Ableitung der Gleichung $\varphi(PQR)=o$ nimmt, welche [*wenn man, der Kürze wegen,* $\varphi PQR=w$ *setzt*]

$$\frac{dP}{dx}\frac{dw}{dP}+\frac{dQ}{dx}\frac{dw}{dQ}+\frac{dR}{dx}\frac{dw}{dR}=o$$

ist,

$$v\left(M\frac{dw}{dP}+N\frac{dw}{dQ}+L\frac{dw}{dR}\right)=o$$

erhält, welche Gleichung in folgende zwei zerfällt:

$$v=o \text{ und } M\frac{dw}{dP}+N\frac{dw}{dQ}+L\frac{dw}{dR}=o,$$

deren erste von der dritten Ordnung, die zweite aber nur von der zweiten ist.

Die Gleichung $v=o$ hat, wie wir sahen, zur vollständigen Stammgleichung die Gleichung der berührenden Curve

$$u = F(xy\,a,\,b,\,c) = 0$$

selbst, in welcher a, b, c willkürliche Constanten sind. Aber, da die Bedingungs-Gleichung der Aufgabe, $w = \varphi(P, Q, R) = 0$ nur von der zweiten Ordnung ist, so muss irgend eine Abhängigkeit zwischen den drei Constanten Statt finden, welche nur zwei derselben unabhängig lässt. Diese Abhängigkeit ist durch die Gleichung $\varphi(a, b, c) = 0$ gegeben, welche aus der vorigen [$w = 0$] entsteht, wenn man darin die Werthe von P, Q, R, als $P = a$, $Q = b$, $R = c$ setzt.

Die andere Gleichung $\left[M\frac{dw}{dP} + N\frac{dw}{dQ} + L\frac{dw}{dR} = 0\right]$ ist von der zweiten Ordnung. Man kann also, vermittelst derselben, aus der Gleichung $\varphi(P, Q, R) = 0$, die Grösse $\frac{d^2y}{dx^2}$ eliminiren. Die entstehende Gleichung wird erster Ordnung und eine Stammgleichung von der obigen $\left[M\frac{dw}{dP} + N\frac{dw}{dQ} + L\frac{dw}{dR} = 0\right]$ sein, die aber keine willkürliche Constante mehr enthält, [*weil dergleichen in den beiden Gleichungen, zwischen welchen man* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *eliminirt, nicht vorkommt,*] die entstehende Gleichung ist also das Resultat der Elimination der Grössen a, b, c und $\frac{d^2y}{dx^2}$ zwischen den Gleichungen

$u = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, $\varphi\,a\,b\,c = w = 0$ und

$$M\frac{dw}{da} + N\frac{dw}{db} + L\frac{dw}{dc} = 0.$$

Nun

Nun aber ist, wenn man a, b, c als Functionen von x und y betrachtet, die erste Ableitung von $u = F(xy\,abc)$,

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} + \frac{du}{dc} \cdot \frac{dc}{dx}.$$

Die beiden Gleichungen $u = 0$ und $\frac{d(u)}{dx} = 0$ geben also zugleich folgende:

$$\frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} + \frac{du}{dc} \cdot \frac{dc}{dx} = 0.$$

Ferner giebt die erste Ableitung von $\frac{du}{dx} = 0$, aus dem nemlichen Grunde,

$$\frac{d^2(u)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{da\,dx} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{d^2u}{db\,dx} \cdot \frac{db}{dx} + \frac{d^2u}{dc\,dx} \cdot \frac{dc}{dx},$$

und da hier a, b, c noch als unabhängig von x und y betrachtet werden, so ist leicht zu sehen, dass, vermöge (74. 1ster Theil) die Grössen $\frac{d^2u}{da\,dx}$, $\frac{d^2u}{db\,dx}$, $\frac{d^2u}{dc\,dx}$ nichts anders sind, als $\frac{d\left(\frac{du}{da}\right)}{dx}$, $\frac{d\left(\frac{du}{db}\right)}{dx}$, $\frac{d\left(\frac{du}{dc}\right)}{dx}$. Die beiden Gleichungen $\frac{du}{dx} = 0$ und $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ geben also zugleich noch folgende Gleichung:

$$\frac{d^2u}{da\,dx} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{d^2u}{db\,dx} \cdot \frac{db}{dx} + \frac{d^2u}{dc\,dx} \cdot \frac{dc}{dx} = 0,$$

[*weil nemlich* $\frac{d^2u}{dx^2}$ *an und für sich schon Null ist*].

Verbindet man nun diese beiden Gleichungen, die [*nachdem mit* $\frac{da}{dx}$ *dividirt worden*]

$$\frac{du}{da} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} + \frac{du}{dc} \cdot \frac{dc}{dx} : \frac{da}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{d^2u}{da\,dx} + \frac{d^2u}{db\,dx} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} + \frac{d^2u}{dc\,dx} \cdot \frac{dc}{dx} : \frac{da}{dx} = 0$$

sind, mit der Gleichung

$$\frac{dw}{da} + \frac{dw}{db} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} + \frac{dw}{dc} \cdot \frac{dc}{dx} : \frac{da}{dx} = 0,$$

die man aus $w = \varphi(abc) = 0$ erhält, wenn man davon die erste Ableitung nimmt [*und mit* $\frac{da}{dx}$ *dividirt*], so erhält man, wenn man die Grössen $\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx}$ und $\frac{dc}{dx} : \frac{da}{dx}$ eliminirt, eine Gleichung zwischen a, b, c und x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, welche mit derjenigen übereinkommen muss, die aus den beiden Gleichungen

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \text{ und } M\frac{dw}{da} + N\frac{dw}{db} + L\frac{dw}{dc} = 0$$

folgt, wenn man zwischen denselben $\frac{d^2y}{dx^2}$ eliminirt. Man darf also daraus nur noch a, b, c mittelst der Gleichungen

$$u = 0,\ \frac{du}{dx} = 0 \text{ und } w = \varphi(abc) = 0$$

eliminiren, so findet man zum Endresultat die Ableitungs-Gleichung erster Ordnung:

$$\varphi(PQR) = 0,$$

welche, weil sie, ihrer Natur nach, keine Constanten enthält, nur eine singulaire Stammgleichung sein kann.

Denn, wenn man, um die Auflösung zu vereinfachen, damit anfängt, den Werth von c aus der Gleichung $w = \varphi(abc) = 0$ zu nehmen, und ihn

durch $\Psi(ab)$ bezeichnet, so reducirt sich die Auflösung darauf, a, b und $\frac{db}{dx}:\frac{da}{dx}$ zwischen den beiden Gleichungen

$$F(xy\,ab\,\Psi(ab))=u=0,\ \frac{du}{dx}=0$$

und den beiden, von diesen nach a und b abgeleiteten und durch $\frac{da}{dx}$ dividirten, Gleichungen zu eliminiren, welches Verfahren demjenigen von (18.) ganz ähnlich [*und daher auch ohne besondere Erläuterung klar*] ist.

21.

Allgemein, wenn man eine Gleichung zwischen x und y und zwei willkürlichen Constanten a und b hat, welche $f(xy\,ab)=u=0$ sein mag, so erhält man, wenn man die beiden Constanten, mit Hülfe der beiden abgeleiteten Gleichungen $\frac{du}{dx}=0$ und $\frac{d^2u}{dx^2}=0$, wegschafft, eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung $v=0$, welche allen möglichen Curven zukommt, die durch die Gleichung $fxy\,ab=u=0$ ausgedrückt werden, je nachdem man den Grössen a und b beliebige Werthe anweiset, so, dass $u=0$ die vollständige Urgleichung von $v=0$ ist.

Die Gleichung $v=0$ entspricht also auch der, von allen diesen Curven, gebildeten Curve, oder den Curven, die sie auf die Weise umfangen, dass sie sie alle in der zweiten Ordnung berühren, das heisst, dass y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ für sie die nemlichen Werthe haben. Die Grössen a und b sind constant für jede

umfangene; und veränderlich für jede umfangende Curve. Damit nun y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in beiden Fällen die nemlichen Werthe haben, müssen auch die Gleichungen, von welchen diese Werthe abhängen, die nemlichen sein. Nimmt man a und b veränderlich an, so giebt die Gleichung $u = f(xy\ ab) = 0$ folgende abgeleitete:

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{x} = 0.$$

Damit diese Gleichung mit derjenigen

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

für den Fall, wo a und b constant sind, übereinkomme, muss

$$\frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} = 0$$

sein. Eben so giebt die Gleichung $\frac{du}{dx} = 0$, wenn man a und b veränderlich annimmt, die abgeleitete

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{da\,dx} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{d^2u}{db\,dx} \cdot \frac{db}{dx} = 0,$$

welche nur dann mit $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, im Fall a und b constant sind, übereinkommt, wenn

$$\frac{d^2u}{da\,dx} \cdot \frac{da}{dx} + \frac{d^2u}{db\,dx} \cdot \frac{db}{dx} = 0 \text{ ist.}$$

Da man also nun die vier Gleichungen

$$u = 0,\ \frac{du}{dx} = 0,\ \frac{du}{da} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{d^2u}{da\,dx} + \frac{d^2u}{db\,dx} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = 0$$

hat, so darf man nur die Grössen a, b und $\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx}$ zwischen denselben eliminiren, um eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, zu haben, welche diejenige der umfangenden Curven und zugleich die singulaire erste Stammgleichung der Gleichung $v = o$ ist.

Man sieht hieraus, wie die Theorie der singulairen Stammgleichungen auf die zweite und auf höhere Ordnungen ausgedehnt werden kann. Auch sieht man, dass diese Gleichungen immer die umfangenden Curven ausdrücken, welche die, durch die vollständigen Stammgleichungen bezeichneten, und durch die Variation der willkürlichen Constanten sich verändernden, umfangenen Curven, in einer gegebenen Ordnung berühren. Dieses dient zur Vervollständigung der Theorie der Stammgleichungen im ersten Theil. (60.)

Uebrigens lässt sich aus den vier obigen Gleichungen

$$u = o,\ \frac{du}{dx} = o,\ \frac{du}{da} + \frac{du}{db} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = o \text{ und}$$

$$\frac{d^2u}{da\,dx} + \frac{d^2u}{db\,dx} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = o,$$

eben wie durch die Elimination der Grössen a, b und $\frac{db}{da} : \frac{da}{dx}$, eine Ableitungs-Gleichung der ersten Ordnung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$ gefunden werden kann, auch durch die Elimination von x, y und $\frac{dy}{dx}$ eine Gleichung zwischen a, b und $\frac{db}{da} : \frac{da}{dx}$ aufstellen, welche die Verhältnisse zwischen den beiden

veränderlichen Grössen a und b ausdrückt, woraus folgt, dass diese Grössen, die für alle umfangenen Curven von einander unabhängig sind, es nicht mehr sind, wenn man sie auf die umfangende Curve bezieht. Man findet ähnliche Resultate für die Gleichungen und Curven höherer Ordnung.

22.

Man setze, es werde die Curve verlangt, welche in allen ihren Puncten einen, durch die Gleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$$

bezeichneten, Kreis, zwischen dessen Parametern a, b, c die Bedingungs-Gleichung

$$\varphi(abc) = 0$$

gegeben ist, in der zweiten Ordnung berührt.

Die nächste Auflösung würde sein, dass man in diese Gleichung die, oben in (11.) gefundenen Werthe der Elemente a, b, c [*die der Berührung wegen, nöthig sind*] substituirte, welches eine Ableitungs-Gleichung der zweiten Ordnung geben würde, aus welcher man dann die Stammgleichung suchen müsste.

Aber, ohne diese Gleichung zweiter Ordnung zu entwickeln, lässt sich, dem Obigen zufolge, im Voraus einsehen, dass man ihre vollständige Stammgleichung findet, wenn man a, b, c unveränderlich annimmt, welches wieder die nemliche Gleichung des Kreises giebt. Es folgt ferner, dass diese nemliche Gleichung auch eine singulaire Stammgleichung der ersten Ordnung haben wird, die man findet, wenn man die Grössen a, b, c auf die Weise sich verändern lässt, dass die erste und zweite, von der Glei-

chung des Kreises abgeleitete Gleichung, die nemlichen bleiben, als wenn a, b, c constant wären, und dass diese singulaire Stammgleichung alsdann die Curve, oder die Curven ausdrückt, welche durch die Aufeinanderfolge aller, durch die nemliche Gleichung ausgedrückten Kreise entstehen, oder welche alle diese Kreise umfangen.

Diese Gleichung ist also, dem Obigen zufolge, das Resultat der Elimination der Grössen $a, b, c, \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx}$ und $\frac{dc}{dx} : \frac{da}{dx}$ zwischen den drei Gleichungen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 \;\; [\textit{nemlich } u = 0]$$

$$(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} = 0 \;\; [\textit{nemlich } \frac{u}{dx} = 0]$$

$$\varphi(abc) = w = 0$$

und den drei, von ihnen nach a, b, c abgeleiteten, Gleichungen

$$x - a + (y-b)\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = c\frac{dc}{dx} : \frac{da}{dx}$$

$$1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{dw}{da} + \frac{dw}{db} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} + \frac{dw}{dc} \cdot \frac{dc}{dx} : \frac{da}{dx} = 0.$$

Da aber die aus dieser Wegschaffung entstehende Gleichung zwischen x und y, verwickelt sein könnte, so ist es besser, dass man die Werthe von x und y mit Hülfe einer dritten veränderlichen Grösse zu bestimmen sucht.

Man eliminire also zunächst $\frac{dy}{dx}$ zwischen den beiden Gleichungen

$$x - a + (y-b)\frac{dy}{dx} = 0 \text{ und } 1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = 0,$$

so erhält man

$$x-a-(y-b)\frac{da}{dx}:\frac{db}{dx}=0,$$

welche mit der ersten der obigen sechs Gleichungen $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ verbunden, sogleich [*wenn man die Werthe von* $(x-a)^2$, *aus beiden Gleichungen, gleich setzt*, $c^2-(y-b)^2=(y-b)^2\left(\frac{da}{dx}\right)^2 : \left(\frac{db}{dx}\right)^2=0$, *also* $c^2\left(\frac{db}{dx}\right)^2=(y-b)^2\left(\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\left(\frac{da}{dx}\right)^2\right)$, *und, wenn man die Werthe von* $(y-b)^2$, *aus beiden Gleichungen, gleich setzt*, $c^2-(x-a)^2=(x-a)^2\left(\frac{db}{dx}:\frac{da}{dx}\right)^2$, *also* $c^2\left(\frac{da}{dx}\right)^2=(x-a)^2\left(\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\left(\frac{da}{dx}\right)^2\right)$, *also*]

$$x=a+\frac{c\frac{da}{dx}}{\sqrt{\left(\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)}},\ y=b+\frac{c\frac{db}{dx}}{\sqrt{\left(\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)}}$$

giebt. Substituirt man diese Werthe von x und y, [*oder* $x-a$ *und* $y-b$] in die vierte der obigen sechs Gleichungen $x-a+(y-b)\frac{db}{dx}:\frac{da}{dx}=c\frac{dc}{dx}:\frac{da}{dx}$, so erhält man

$$\left[\frac{c\frac{da}{dx}}{\sqrt{\left(\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)}}+\frac{c\left(\frac{db}{dx}\right)^2:\left(\frac{da}{dx}\right)}{\sqrt{\left(\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)}}=c\frac{dc}{dx}:\frac{da}{dx},\ \textit{oder}\right]$$

$$\frac{dc}{dx}=\sqrt{\left(\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)},$$

welche Gleichung, mit der durch die Natur der Aufgabe gegebenen Bedingungs-Gleichung $\varphi(abc) = 0$ verbunden, dient, zwei von den drei veränderlichen Grössen a, b, c durch die dritte zu bestimmen, wodurch dann die Werthe von x und y auch durch diese eine [*dritte*] Grösse gefunden werden.

23.

Da die Grössen a und b die Coordinaten der Curve sind, welche der geometrische Ort der Mittel-Puncte aller Krümmungs-Kreise ist (9.), [*denn a und b waren die Coordinaten des Mittel-Puncts eines Krümmungs-Kreises,*] so hat man, wenn man diese Curve als gegeben annimmt, eine Gleichung zwischen a und b, durch welche b in a bestimmt werden kann. Es sey also, für diesen Fall, $b = \varphi a$, so ist

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{da} \cdot \frac{da}{dx},$$

mithin oben:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{da}{dx} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{db}{da}\right)^2\right)}.$$

Bezeichnet man also die Stammgrösse von $\frac{da}{dx} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{db}{da}\right)^2\right)}$ durch A, so ist

$$c = A + h,$$

wo h eine willkürliche Constante ist. Diese Ausdrücke von b und c, in die Ausdrücke von x und y [22.] gesetzt, geben die gesuchte Curve.

Es ist zu bemerken, dass, welche auch die Curve, worin die Mittelpuncte der Kreise liegen, sein mag,

die Gleichung $\frac{dc}{dx} = \sqrt{\left(\left(\frac{da}{dx}\right)^2 + \left(\frac{db}{dx}\right)^2\right)}$ anzeigt, dass der Halbmesser c immer dem Bogen dieser Curve gleich ist. (Man sehe weiter unten 29.) Bezeichnet man also diesen Bogen durch s, so ist immer

$$c = s + h.$$

Es ist ferner zu bemerken, dass der Halbmesser c nothwendig die Curve berührt; denn die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen diese ihrer Tangente mit der Axe macht, ist $\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx}$ (7.) und da der Halbmesser des Krümmungs-Kreises auf der Curve, deren Coordinaten x und y sind, senkrecht steht (8.), so ist die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen er mit der Axe macht, $= 1 : \frac{dy}{dx}$ (7.) welches, vermöge der Gleichung $1 + \frac{db}{dx} \cdot \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx}$, [*der fünften in* 22.] gleich $\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx}$ ist. Der Winkel zwischen dem Krümmungs-Halbmesser und der Axe ist also der nemliche, welchen die Tangente der Curve der Mittelpuncte mit der nemlichen Axe macht.

Aber obgleich diese Eigenschaft auf diese Art bewiesen wird, ist es doch gut, zu zeigen, dass sie eine nothwendige Folge der Rechnung ist, die zur Auflösung der Aufgabe diente. Zu dem Ende wollen wir zu den beiden ersten Gleichungen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 \text{ und } x-a+(y-b)\frac{dy}{dx} = 0,$$

zurückkehren, welche

$$\left[(y-b)^2 - c^2 = -(y-b)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \text{ und }\right.$$
$$\left.\left((x-a)^2 - c^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -(x-a)^2, \text{ also}\right]$$

$$a = x - \frac{c\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} \text{ und } b = y + \frac{c}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}$$

geben.

Diese Ausdrücke von a und b bezeichnen die Coordinaten der Normalen der Curve, deren Coordinaten x und y sind, wenn man x und y als constant betrachtet (8.), hingegen die Coordinaten der Curve der Mittel-Puncte, wenn man x und y als veränderlich und c, als durch x und y gegeben, betrachtet. (9.)

Die Normalen sind also dann zugleich Tangenten der Curve der Mittel-Puncte, wenn die erste Ableitung von b, als Function von a betrachtet, für die grade Linie und die Curve den nemlichen Werth hat. (10.) [*Denn* $\frac{db}{da}$, *oder die erste Ableitung von b nach a, ist in dem ersten der beiden vorhin genannten Fälle, die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Normale, in dem anderen, die Tangente des Winkels, welchen die Tangente der Curve der Mittelpuncte, deren Coordinaten a und b sind, mit der Axe macht.*] Allgemein also findet dieses Statt, wenn $\frac{da}{dx}$ und $\frac{db}{dx}$, als Functionen einer dritten veränderlichen Grösse [*z. B. x*] betrachtet, in beiden Fällen das Nemliche geben, folglich auch wenn $\frac{da}{dx} : \frac{dc}{dx}$ und $\frac{db}{dx} : \frac{dc}{dx}$

[*welche beide Grössen, eine durch die andere dividirt,* $\frac{db}{da}$ *geben,*] die nemlichen sind, x und y mögen veränderlich sein, oder nicht; also, wenn in diesen Werthen das, was von der Veränderung von x und y herrührt, Null ist. Dieses ist nun wirklich der Fall, wie man aus den Gleichungen des vorigen Paragraphs

$$(x-a)\frac{da}{dx}+(y-b)\frac{db}{dx}=c\frac{dc}{dx} \text{ und}$$

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \text{ [die 4te und 5te in 22.]}$$

sieht, welche zur Bestimmung von $\frac{da}{dx}:\frac{dc}{dx}$ und $\frac{db}{dx}:\frac{dc}{dx}$ dienen, und welche die ersten Ableitungen von

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2 \text{ und } x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

sind, wenn man darin x und y constant, und a und b allein veränderlich sein lässt.

Da nun auf diese Weise die Krümmungs-Halbmesser einer Curve, die Curve der Mittel-Puncte überall berühren und zugleich den Bogen dieser Curve gleich sind [22.], so folgt, dass sie als diese Bogen selbst betrachtet werden können, die in grade Linien ausgedehnt worden und dass also jede Curve, als durch Abwickelung derjenigen entstanden, angesehen werden kann, welche der geometrische Ort der Mittel-Puncte ihrer Krümmungs-Kreise ist. Dieses ist die Huyghensche Theorie der Evolution, die bisher nur geometrisch bewiesen wurde. Die obige Analyse erklärt zugleich das Paradoxon, auf welches man stösst,

wenn man, nach den gewöhnlichen Formeln, die, aus der Abwickelung einer gegebenen Curve entstehende Curve sucht.

Wenn man nemlich in die Gleichung dieser Curve die Ausdrücke ihrer Coordinaten a und b in x, y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ substituirt, so erhält man offenbar eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung, woraus zu folgen scheint, dass die Gleichung der gesuchten Curve zwischen x und y zwei willkürliche Constanten enthalten müsse, während doch, nach der Entstehung dieser Curve durch die Abwickelung der gegebenen, nur eine willkürliche Constante vorkommen kann, die vom Anfangs-Punct der Abwickelung abhängt.

Die Ursach dieses scheinbaren Widerspruchs liegt, wie wir oben gezeigt haben, darin, dass die Gleichung der durch die Abwickelung entstehenden Curve, die vollständige Stammgleichung einer Ableitungs-Gleichung erster Ordnung ist, die wiederum nichts weiter ist, als die singulaire Stammgleichung der, durch die Bedingungen der Aufgabe gegebenen, Gleichung zweiter Ordnung, und die, ihrer Natur nach, keine willkürliche Constante haben kann, so, dass in der ersten Stammgleichung nur eine willkürliche Constante vorkommen kann.

[*Die Theorie der Evolution gehet hier, wie man sieht, sehr einfach aus der allgemeinen Theorie der umfangenden Curven und der singulairen Stammgleichungen hervor. Das Ganze mag noch etwas dunkel scheinen und auch vielleicht noch elementarer und einfacher abgehandelt werden*

können, aber nicht wohl durch Zusätze und Anmerkungen, sondern nur durch einen veränderten Vortrag; daher die Erläuterungen hier nicht gehäuft worden sind. Die, die gegebene Curve, umfangenden Curven, welche singulairen Stammgleichungen entsprechen, kann man sich als die gegebenen, mit veränderlichen Constanten, welche auch unter sich noch Bedingungs-Gleichungen unterworfen sein können, vorstellen. Lassen die Bedingungs-Gleichungen nur eine Constante willkürlich, so ist nur eine Berührung erster Ordnung möglich, wie oben bei der graden Linie, deren umfangende Curve ein Kegelschnitt war. Bleiben zwei Constanten willkürlich, so kann eine Berührung zweiter Ordnung Statt finden, wie bei Krümmungs-Kreisen u. s. w. Im ersten Fall haben die gegebenen Curven und die umfangenden, gemeinschaftliche gradelinige Tangenten, im zweiten, gemeinschaftliche Krümmungs-Kreise u. s. w. In jedem Fall ist die umfangende Curve der geometrische Ort der Durchschnitte aller Curven, die die Gleichung der gegebenen ausdrückt, wenn man darin die unabhängig bleibenden Constanten willkürlich und stetig sich verändern lässt.]

Fünfter Abschnitt.

Von den grössten und kleinsten Werthen der Functionen einer veränderlichen Grösse.

24.

Es giebt eine gewisse Art von Aufgaben, die, obgleich unabhängig von der Methode der Tangenten, darauf bezogen werden können. Dies sind die Aufgaben von den Maximis und Minimis, welche darin bestehen, für eine gegebene Function einer veränderlichen Grösse, diejenigen Werthe dieser veränderlichen Grösse zu finden, welche, die Function so gross oder so klein machen, als möglich. [*Eigentlich ist die Benennung „Grösste und Kleinste" nicht genau; denn diejenigen Werthe einer abhängigen Grösse, welche unter der Benennung „Maximum und Minimum" verstanden worden, sind keinesweges die grössten oder kleinsten unter allen möglichen, sondern nur die grössten und kleinsten unter den nächst vorhergehenden und den zunächst darauf folgenden. Da aber zunächst Vorhergehendes und zunächst Folgendes etwas sehr unbestimmtes ist, und wirklich, sehr nahe bei sogenannten grössten und kleinsten Werthen, noch grössere und noch kleinere Werthe liegen können, so kann man die genannten Werthe nicht eigentlich grösste und kleinste nennen. Genauer genommen sind die Werthe solche, bei welchen das Zunehmen der abhängigen Grösse in Abnehmen, oder das Abnehmen in Zu-*

nehmen übergeht, während die veränderlichen Grössen, von welchen die abhängige Grösse abhängt, ohne Unterbrechung immer fort zu oder abnehmen. Ich habe in dem Aufsatz über einige Lehrsätze der Elementar-Geometrie, im zweiten Bande meiner Sammlung mathematischer Abhandlungen, Grössen verschiedener Art, welche die Eigenschaft haben, dass die eine immer fort zu oder abnimmt, während die andere immer fort ab oder zunimmt, oder dass beide immer fort, zugleich, zu oder abnehmen, zusammengehörige genannt. Will man diesen Begriff und seine Benennung anwenden, so sind die sogenannten grössten und kleinsten Werthe einer abhängigen Grösse diejenigen, bei welchen die Art der Zusammengehörigkeit der abhängigen Grössen und ihrer Elemente wechselt. Verlangt man dennoch einen bildlichen Ausdruck, so kann man die sogenannten grössten und kleinsten Werthe einer abhängigen Grösse, ihre Culmina, und den Durchgang durch ein solches Culmen, das Culminiren der Grösse nennen, analog mit dem bekannten astronomischen Ausdruck für einen ähnlichen Gegenstand.] Da die Curve nichts anders, als ein sinnliches Bild aller Werthe der, durch die Ordinaten vorgestellten, Function der Abscissen ist, so kommt die Aufgabe: die grössten oder kleinsten Werthe einer gegebenen Function einer veränderlichen Grösse zu finden, darauf hinaus: die grössten oder kleinsten Ordinaten der Curve zu finden, deren Abscisse die unabhängig veränderliche Grösse und deren Ordinate die gegebene Function ist.

Nun

Nun folgt aus dem blossen Anblicke der Curve, dass die grössten und kleinsten Ordinaten nur diejenigen sein können, welche den Puncten entsprechen, für welche die Tangenten mit der Abscissen-Axe parallel laufen. Ist die Curve gegen die Axe convex, so ist die Ordinate offenbar ein Minimum, ist sie concav, so ist die Ordinate ein Maximum.

Wir haben in (7.) gesehen, dass die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente einer Curve mit der Axe macht, im Allgemeinen, durch $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt wird, wenn y die Ordinate ist, welche man als Function der Abscisse x annimmt. Damit also diese Tangente mit der Axe parallel sey, muss $\frac{dy}{dx} = 0$ sein. Macht man nun in den Ausdrücken der Coordinaten a und b (9.), welche den geometrischen Ort des Mittelpuncts des Krümmungs-Kreises bezeichnen, $\frac{dy}{dx} = 0$, so erhält man

$$a = x,\ b = y + 1 : \frac{d^2y}{dx^2},$$

woraus folgt, dass wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine positive Grösse ist, der Mittelpunct des Krümmungs-Kreises über die Curve hinaus fällt, [*weil dann* b, *um* $1 : \frac{d^2y}{dx^2}$ *grösser, als* y *ist*] und dass also die Curve gegen die Axe convex ist. Ist hingegen $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, so fällt der Mittelpunct zwischen die Curve und die Axe, so dass die Curve gegen die Axe concav ist. Die Function y ist also ein Grösstes oder Kleinstes, wenn ihre

erste Ableitung $\frac{dy}{dx}$ Null ist, und zwar ein Kleinstes, wenn ihre zweite Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv, und ein Grösstes, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist. Darin besteht das bekannte Gesetz für die Grössten und Kleinsten.

25.

Es ist aber nicht unnütz zu zeigen, wie dieses Gesetz auch unmittelbar aus der Functionen-Rechnung, ohne Hülfe der Curven, gefunden werden kann. [*Allerdings; weil das figürliche Hülfsmittel nicht nothwendig ist.*]

Es sey fx eine von x abhängige Grösse, von welcher man den grössten oder kleinsten Werth verlangt. Derjenige Werth von x, welcher diesem grössten oder kleinsten Werthe entspricht, sey a, so muss der Werth von fa immer grösser oder kleiner sein, als der Werth von $f(a+k)$, was auch k sein mag, positiv oder negativ, und so klein als man will [*aber nicht so gross als man will*]. Ich sage: so klein, als man will; denn man betrachtet eine Grösse als die grösste oder kleinste ihrer Art, wenn sie bis zur Grenze ihres Wachsthums oder ihrer Abnahme gelangt ist, so, dass sie über diese Grenze hinaus, im Falle des Maximi, kleiner, im Falle des Minimi, grösser ist, als auf der Grenze. [*Dieses kommt mit dem Sinne der obigen Bemerkungen überein. Eine solche Grösse ist indessen nur die grösste oder kleinste unter den, sie zunächst umgebenden.*] Man setze x statt a, so ist die Bedingung des Maximi, dass

$$f(x+k) < fx, \text{ oder } f(x+k) - fx < 0,$$

und die Bedingung des Minimi, dass

$$f(x+k) > fx, \text{ oder } f(x+k) - fx > 0,$$

was auch k sein mag, eine positive oder negative Grösse.

Man entwickele die Function $f(x+k)$, nach den Formeln von (40. 1ster Theil) in eine Reihe, und bleibe bei den ersten beiden Gliedern stehen, so erhält man

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2f(x+\lambda)}{dx^2},$$

wo λ eine Grösse zwischen 0 und k ist. Hier muss nun, für das Maximum, $k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2f(x+\lambda)}{dx^2}$ kleiner und für das Minimum, grösser als Null sein.

Nun haben wir oben in (3.) gesehen, dass man k immer so klein annehmen kann, dass der absolute Werth von $k\frac{dfx}{dx}$ grösser ist, als der von $\frac{k^2}{2}\frac{d^2f(x+\lambda)}{dx^2}$ und dass solches, wenn es für irgend einen beliebigen Werth von k Statt findet, um so mehr für ein noch kleineres k der Fall ist. Die Grösse $k\frac{dfx}{dx}$ $+ \frac{k^2}{2}\frac{d^2f(x+\lambda)}{dx^2}$ ist also immer positiv oder negativ, wenn die Grösse $k\frac{dfx}{dx}$ es ist. Aber die Grösse $k\frac{dfx}{dx}$ ändert ihr Zeichen mit k, also ist es [*weil k willkürlich ist*] unmöglich, dass die Bedingung des Maximi und Minimi anders als dadurch erfüllt werde, dass $\frac{dfx}{dx} = 0$.

Man nehme ferner von der Entwickelung von $f(x+k)$ ein Glied mehr, so erhält man

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3f(x+\lambda)}{dx^3}.$$

Da $\frac{dfx}{dx} = 0$ ist, so muss $\frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^2f(x+\lambda)}{dx^3}$, für das Maximum, kleiner, für das Minimum, grösser als Null sein. Man kann wiederum immer k so klein annehmen, dass der absolute Werth von $\frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx}$ grösser ist, als der Werth von $\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3f(x+\lambda)}{dx^3}$. Also ist die Grösse

$$\frac{k^2}{2}\frac{dfx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3f(x+\lambda)}{dx^3}$$

positiv oder negativ, je nachdem $\frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx}$ es ist. Da nun der Werth von k^2 immer positiv ist, so muss, für das Maximum, $\frac{d^2fx}{dx^2} < 0$, und für das Minimum, $\frac{dfx}{dx^2} > 0$ sein.

Setzt man $\frac{d^2fx}{dx^2} = 0$ und nimmt von der Entwickelung von $f(x+k)$ noch ein Glied mehr, so erhält man

$$f(x+k) = fx + k\frac{dfx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} + \frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4f(x+\lambda)}{dx^4}.$$

Dieses giebt, weil $\frac{dfx}{dx} = 0$ und $\frac{d^2fx}{dx^2} = 0$ ist, für das Maximum, die Bedingung

$$\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}+\frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4f(x+\lambda)}{dx^4}<0$$

und für das Minimum, die entgegengesetzte. Nun aber kann man wieder k so klein annehmen, dass der absolute Werth der Grösse $\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}$ grösser ist, als der Werth des Gliedes $\frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4f(x+\lambda)}{dx^4}$; also ist der Werth von $\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}+\frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4f(x+\lambda)}{dx^4}$ positiv oder negativ, je nachdem es $\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}$ ist. Die Grösse $\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}$ ändert aber ihr Zeichen mit k zugleich, also ist es unmöglich, dass die Bedingung des Maximi und Minimi anders erfüllt werden kann, als wenn $\frac{d^3fx}{dx^3}=0$ ist.

Man nehme noch ein Glied der Entwickelung von $f(x+k)$, so erhält man

$$f(x+k)=fx+k\frac{dfx}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}$$
$$+\frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4fx}{dx^4}+\frac{k^5}{2.3.4.5}\frac{d^5f(x+\lambda)}{dx^5}.$$

Alsdann sind die Bedingungen des Minimi und Maximi;

$$\frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4fx}{dx^4}+\frac{k^5}{2.3.4.5}\frac{d^5f(x+\lambda)}{dx^5}<0, \text{ oder } >0,$$

weil $\frac{dfx}{dx}=0$, $\frac{d^2fx}{dx^2}=0$ und $\frac{d^3fx}{dx^3}=0$ ist. Wie oben lässt sich wieder zeigen, dass k immer klein genug angenommen werden kann, dass das Glied mit k^4, abgesehen vom Zeichen, grösser ist, als das Glied

mit k^5 und dass folglich die Summe der beiden Glieder nothwendig positiv oder negativ ist, je nachdem es das Glied $\frac{k^4}{2.3.4}\frac{d^4fx}{dx^4}$ ist. Woraus folgt, dass, weil k^4 immer positiv ist, für das Maximum $\frac{d^4fx}{dx^4}$ < 0, und für das Minimum > 0 sein muss.

26.

Wenn also, allgemein, y irgend eine Function von x ist, so ist die erste Bedingung für das Maximum oder Minimum, dass $\frac{dy}{dx} = 0$ sey, welche Gleichung den Werth von x bestimmt. Sodann ist $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, oder > 0, welches mit Dem übereinkommt, was wir in (24.) fanden. Nun sahen wir weiter, dass, wenn $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, zugleich $\frac{d^3y}{dx^2} = 0$ und dann $\frac{d^4y}{dx^4} < 0$ für das Maximum und > 0 für das Minimum sein muss u. s. w. [*Dieses und die Regel für die höheren Ordnungen erhellet aus der bildlichen Vorstellung durch Curven nicht. Dergleichen bildliche Hülfsmittel sind gewöhnlich unvollkommen.*] Allgemein muss allemal, wenn eine Ableitung irgend einer Ordnung mit graden Exponenten verschwände, auch die Ableitung von der folgenden ungraden Ordnung Null, die hierauf weiter folgende grade Ordnung aber, für das Maximum, negativ, und für das Minimum, positiv sein.

Wäre die Function y durch eine Gleichung $Fxy = u = 0$ gegeben, so dürfte man nur die abgeleitete Gleichung

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = o$$

nehmen und $\frac{dy}{dx} = o$ setzen, welches die Gleichung auf

$$\frac{du}{dy} = o$$

reducirt und woraus, mit $u = Fxy. = o$ verbunden, die, dem Maximo oder Minimo entsprechenden, Werthe von x und y folgen. Sodann kann man die zweite abgeleitete Gleichung nehmen, [*welche* $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dx\,dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2u}{dx\,dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{du}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = o$ *ist,*] so erhält man, wenn man $\frac{dy}{dx} = o$ setzt, [$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = o$, *und folglich* $\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{d^2u}{dx^2} : \frac{du}{dy}$ *für*] den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$, in welchen man die gefundenen Werthe von x und y substituiren und daraus sehen kann, ob ein Maximum oder Minimum Statt finde u. s. w. [*Es ist also nicht nöthig, etwa erst den Werth von y aus einer, zwischen x und y gegebenen Gleichung, zu entwickeln, sondern man kann den Werth von x, für welchen y seine Veränderungsart ändert, unmittelbar finden. Wäre z. B. die Gleichung $y^2 + mxy + nx^2 + a^2 = u = o$ gegeben, und man verlangte den Werth von x, für welchen y seine Veränderungsart ändert, so braucht man nicht erst y zu entwickeln, sondern kann unmittelbar die Ableitungs-Gleichung nach x nehmen, welche*

$\frac{du}{dx} = my + 2nx = 0$ *giebt. Setzt man den hieraus folgenden Werth von* $y = -\frac{2n}{m}x$ *in die gegebene Gleichung, so erhält man* $\frac{4n^2}{m^2}x^2 - 2nx^2 + nx^2 + a^2 = 0$ *oder* $(4n^2 - m^2 n)x^2 + a^2 m^2 = 0$, *woraus der verlangte Werth von* x *folgt, nemlich* $x = \frac{am}{\sqrt{(m^2 n - 4n^2)}}$. *Ferner ist* $\frac{d^2u}{dx^2} = 2n$ *und* $\frac{du}{dy} = 2y + mx$, *also ist* $\frac{d^2y}{dx^2}\left(= -\frac{d^2u}{dx^2} : \frac{du}{dy}\right) = \frac{2n}{2y + mx}$, *oder, wenn man die gefundenen Werthe von* $y = -\frac{2n}{m}x$ *und* $x = \frac{am}{\sqrt{(m^2 n - 4n^2)}}$ *substituirt,* $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2n}{-\frac{4n}{m}x - mx} = -\frac{2nm}{(4n + m^2)x} = -\frac{2nm\sqrt{(m^2 n - 4n^2)}}{(4n + m^2)am} = -\frac{2n\sqrt{(m^2 n - 4n^2)}}{(4n + m^2)a}$. *Je nachdem diese Grösse negativ oder positiv ist, geht* y, *für* $x = \frac{am}{\sqrt{(m^2 n - 4n^2)}}$, *vom Zunehmen zum Abnehmen, oder vom Abnehmen zum Zunehmen über.*]

Wäre $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder $\frac{d^2fx}{dx^2}$ unendlich gross, d. h.: $1 : \frac{d^2y}{dx^2} = 0$, so wäre dies ein Zeichen, dass die Entwickelung von $f(x + k)$, für den gefundenen Werth von x, ein Glied von der Form Ak^m enthält, wo m zwischen 1 und 2 liegt. (30. 1ster Theil.) Betrachtet man die Curve, deren Gleichung $y = fx$ ist, so kann man aus der Gestalt ihres Laufs in dem gegebenen

Puncte erkennen, ob y ein Maximum oder Minimum ist. (24.) Auch lassen sich für diesen Fall allgemeine Regeln geben, welche uns aber zu weit von unserem Ziele abführen würden.

Wir wollen uns nicht mit Beispielen zu diesen Regeln für die Maxima und Minima aufhalten, da sie völlig mit den aus der Differential-Rechnung bekannten Regeln übereinstimmen und auch die Anwendungen die nemlichen sind.

Sechster Abschnitt.

Von der Quadratur und Rectification der Curven in der Ebene. Von dem Volumen und der Oberfläche der Conoïden. Allgemeine Regel für die analytische Auflösung dieser Art von Aufgaben.

27.

Ich komme jetzt zu der Berechnung der Fläche der Curven unter den Coordinaten, welche Berechnung man gewöhnlich: Quadratur der Curven nennt. Man betrachte, im Allgemeinen, die von der Gleichung $y = fx$ bezeichnete Curve, wo y, die, zu der Abscisse x gehörige, rechtwinklige Ordinate und eine Function von x ist. Der, von der Curve, der Abscissen-Axe und einer beliebigen Ordinate y begrenzte Raum wird also ebenfalls eine Function der Abscisse x sein, welche wir durch Fx bezeichnen

wollen. [*Denn die Curve wird einzig und allein durch die Ordinate und Abscisse bestimmt; erstere aber hängt von letzterer ab, also wird eigentlich die Curve von der Abscisse allein bestimmt, und folglich kann auch die Fläche unter den Coordinaten nur von der Abscisse allein abhängen, das heisst, nur dann sich ändern, wenn sich die Abscisse ändert und nur unverändert bleiben, so lange es die Abscisse ist.*] Man setze, x gehe in $x+k$ über, so wird $F(x+k)$ aus Fx und es ist klar, dass alsdann $F(x+k)-Fx$ derjenige Theil des Flächen-Raums ist, welcher dem Theile k der Axe entspricht und von den beiden, zu x und $x+k$ gehörigen, Ordinaten begrenzt wird. [*Nemlich der Raum APM, Fig. 6. ist* Fx, *also, wenn* $PQ=k$ *ist, der Raum* $AQN=F(x+k)$ *und folglich der Raum* $PMQN = F(x+k)-Fx$.] Nun ist leicht zu sehen, selbst ohne Figur, dass für jede beliebige Curve, wenn die Ordinaten, von fx bis zu $f(x+k)$, immer fort zu- oder abnehmen, der Raum [$PMQN$] im ersten Fall grösser als das Rechteck [$PMN'Q = PQ.PM =$] kfx und kleiner als das Rechteck [$PM'NQ = PQ.QN =$] $kf(x+k)$, im letzten Fall aber grösser als das letzte und kleiner als das erste ist. Der Raum [$PMNQ$] ist also nothwendig zwischen den Grenzen kfx und $kf(x+k)$ eingeschlossen, welche folglich die Grenzen der Grösse $F(x+k)-Fx$ sind, die jenen Raum ausdrückt.

Man entwickele $F(x+k)$ und $f(x+k)$ nach (40. 1ster Theil) und bleibe, mit $F(x+k)$, bei dem zweiten, mit $f(x+k)$, bei dem ersten Gliede stehen, so erhält man

$$f(x+k) = fx + k\frac{df(x+\lambda)}{dx}$$

$$F(x+k) = Fx + k\frac{dFx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2},$$

wo λ eine unbestimmte Grösse ist, die für die beiden Functionen verschieden sein kann, aber immer zwischen o und k liegen muss. Die Function Fx muss also von der Art sein, dass die Grösse $k\frac{dFx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}$ [*welche* $F(x+k)-Fx$ *ist*], immer zwischen den Grenzen kfx und $kfx+k^2\frac{df(x+k)}{dx}$ liegt, [*denn diese Grenzen sind nichts anders als* kfx *und* $kf(x+k)$] was auch k, und folglich, so klein auch k sein mag. Nun ist der Unterschied zwischen den beiden Grenzen [kfx *und* $kf(x+k)$]$=k^2\frac{d^2f(x+\lambda)}{dx^2}$; also muss die Differenz zwischen der gesuchten Grösse $\left[F(x+k) - Fx = k\,dFx + \frac{k^2}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}\right]$ und einer der Grenzen [kfx], welche gleich

$$k\left(\frac{dFx}{dx} - fx\right) + \frac{k^2}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}$$

ist, ohne Rücksicht auf die Zeichen der Grössen, nothwendig kleiner sein, als $k^2\frac{df(x+\lambda)}{dx}$. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass diese Bedingung nicht für jeden, noch so kleinen Werth von k, anders erfüllt werden kann, als wenn das Glied, welches x [k] enthält, verschwindet; denn sonst könnte man k so annehmen, dass [*umgekehrt*] die erste Grösse grösser ist, als die zweite. Man dürfte nemlich zu diesem Zwecke k

nur kleiner, als $\frac{\frac{dFx}{dx} - fx}{\frac{df(x+\lambda)}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}}$ setzen. [*Nemlich, damit* $k\left(\frac{dFx}{dx} - fx\right) + \frac{k^2}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2} > k^2\frac{df(x+\lambda)}{dx}$ *sey, darf nur* $\frac{dFx}{dx} - fx > k\left(\frac{df(x+k)}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}\right)$, *oder nur* $k < \frac{\frac{dFx}{dx} - fx}{\frac{df(x+\lambda)}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}}$ *sein.*] Es ist also nothwendig [*weil das Glied mit k verschwinden und folglich* $k\left(\frac{dFx}{dx} - fx\right) = 0$ *sein soll*]

$$\frac{dFx}{dx} = fx$$

und diese Gleichung reicht zur Bestimmung von Fx hin; denn Fx ist, ihr zu Folge, nichts anders, als die Stammgrösse von fx.

Die erste Ableitung des Ausdrucks der Fläche einer Curve unter den Coordinaten, durch die Abscisse x, ist also, ganz allgemein, der Ordinate dieser Curve gleich und, umgekehrt, der Ausdruck der Fläche der Curve unter den Coordinaten kann nichts anders sein, als die Stammgrösse von demjenigen, welcher die Ordinate ausdrückt. Wenn also die Gleichung einer Curve gegeben ist, so darf man nur, um den Ausdruck ihrer Fläche unter den Coordinaten zu finden, das heisst, um die Curve zu quadriren, die Stammgrösse zu dem Ausdrucke der Ordinate suchen, zu welcher dann noch eine willkürliche Constante hinzu gefügt werden kann (49. 1ster Theil), welche durch die Bedingung bestimmt wird, dass die

Fläche für den Punct, von welchem man sie anfangen lässt, Null ist.

Wir haben vorausgesetzt, dass die Ordinaten, von fx bis $f(x+k)$, ununterbrochen ab- oder zunehmen. Diese Bedingung würde nicht Statt finden, wenn zwischen den beiden Ordinaten ein Maximum oder Minimum läge. Da man aber den Zwischenraum so klein annehmen kann, als man will, so ist klar, dass man immer die zweite Ordinate $f(x+k)$ diesseits des Maximi oder Minimi setzen kann und dass folglich der Schluss, den wir darauf gebaut haben, unverändert derselbe bleibt.

[*Die Quadratur der Curven ist die einfachste aller Anwendungen der Rechnung mit veränderlichen Grössen auf einen bestimmten Gegenstand. Sie ist vielleicht eben deswegen derjenige Fall, wo die Blösse der Infinitesimal-Methode am deutlichsten sichtbar ist. Man nimmt, dieser Methode zufolge, an, die Fläche der Curve sey us unendlich kleinen Fl ächen, wie PMNQ (Fig. 6.) zusammengesetzt und drückt nun den Inhalt einer solchen kleinen Fläche PMNQ durch PM mal PQ aus. Man lässt also das Stück MNN' gradezu weg. Die Weglassung entschuldigt man damit, dass das Stück unendlich klein sey; aber, da zu der Fläche der Curve unendlich viele solche unendlich kleine Streifen, wie PMNQ, gehören, so bürgt nichts weiter als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unendliche mal die unendlich kleine Fläche MNN' nicht etwas, nicht unendlich kleines, sondern etwas Bedeutendes ausmache. Zwar sagt man: das Stück MNN' sey*

schon gegen den unendlich kleinen Streifen PMNQ selbst unendlich klein und also ein Unendlich-kleines zweiter Ordnung, mithin können unendlich viele solche Stücke MNN' etwa nur ein Unendlich-kleines erster Ordnung ausmachen, was nicht in Betracht komme. Allein da man eigentlich nicht bestimmt weiss, was man sich unter Unendlich-kleinem denken soll, ob Etwas, oder Nichts, so reducirt sich das Ganze fast nur auf Worte. Soll man sich unter Unendlich-klein etwas Sehr-kleines denken, so ist das Verfahren offenbar falsch und man lässt wirklich etwas weg, was nicht weggelassen werden darf. Soll man sich unter Unendlich-kleines eine absolute Null denken, so findet gar keine Fläche, wie PMNQ, statt, sondern blos eine Linie MP und durch Summirung von Linien kann man nie eine Fläche AMP erhalten. Ein drittes zu Sehr-klein und Nichts ist aber nicht denkbar, denn etwas, was zugleich existirt und nicht existirt, findet nicht Statt.

Da der Fall so sehr einfach ist und schon in den ersten Elementen vorkommt, so hat es nicht an Versuchen gefehlt, fast wie bei der Quadratur des Kreises und der Parallelen-Theorie, jene Verwirrung von Begriffen und Worten, gegen welche sich der einfache natürliche Sinn durchaus sträubt, aufzuklären und wirklich zu beweisen, dass das Resultat, dessen Richtigkeit unzweifelhaft ist, wirklich das wahre sey. Allein die Versuche sind immer um so mehr gescheitert, je weniger man das Uebel an der Quelle hob und den Fehler blos in der Ausübung der Methode suchte, wäh-

rend vielmehr die Principien derselben eben so unrichtig sind, als die Anwendung, so, dass es möglich war, dass sich die beiden Irrthümer aufhoben.

Lagrange hat nicht allein die Principien der Rechnungs-Methode in's Reine und Klare gebracht, sondern seine Anwendung derselben ist auch unstreitig hier so strenge, wie sie nur verlangt werden kann. Hier jedoch, bei dem so ungemein einfachen Fall der Quadratur, ist sie vielleicht weniger glücklich, wie bei der Theorie der Tangenten, denn sie ist nicht so einfach, wie ihr Gegenstand. Sie bedarf sogar der Formel für die Grenzen der Reste der Entwickelung, deren Aufstellung im ersten Theile auf weitläuftigen Rechungen und feinen Kunstgriffen und Schlüssen beruhet. Bei der Gewohnheit das Unbegreifliche begreiflich zu finden, was dann auch wohl „Höheres" heisst und der nicht geringeren Vorliebe für das Bequeme, die beide zu der alten Methode hinziehen, dürfte also die Lagrangische Theorie der Quadratur nur mit Schwierigkeit allgemein die Stelle der alten einnehmen. Da es indessen zu wichtig ist, die Täuschung, wenigstens aus der Mathematik, überall, so viel als möglich zu entfernen und das Einfache, Natürliche und Jedem Begreifliche an die Stelle des Uebersinnlichen und Formlosen zu setzen, so ist eine andere einfachere Methode, auch für die Quadratur, zu wünschen. Eine solche Methode ist vielleicht noch möglich. Ich habe einen Versuch dazu in der kleinen Schrift „über die Anwendung der Rechnung mit veränder-

lichen Grössen auf Geometrie und Mechanik, Berlin 1816, bei Maurer," *mitgetheilt und will die dortige Bemerkung, weil sie nur kurz ist, hier hersetzen.*

Es sey Alles, wie oben, so ist klar, dass die Fläche PMNQ (Fig. 6.) kleiner ist, als das Rechteck PM'NQ und grösser, als das Rechteck PMN'Q, also kleiner als $kf(x+k)$ und grösser als kfx. Nun wächst, angenommenermaassen, die Ordinate PM, von P bis Q, ununterbrochen, und hat also alle mögliche Längen zwischen $PM = fx$ und $QN = f(x+k)$. Es muss also nothwendig zwischen PM und QN irgend eine Ordinate RS geben, die genau die Länge hat, dass das Rechteck PM''N''Q, dessen Höhe RS ist, der Fläche PMNR an Grösse gleich kommt. Es sey $PR = mk$, so, dass $AR = x + mk$, eine Grösse ist, die nothwendig zwischen $AP = x$ und $AQ = x + k$ liegt, folglich m eine Grösse, die nothwendig zwischen 0 und 1 liegt. Nun wurde die gesuchte Fläche APM durch Fx bezeichnet, also ist die Fläche PMNQ $= F(x+k) - Fx$. Da nun das Rechteck PM''N''Q $= kf(x+mk)$ dieser Fläche gleich sein soll, so ist

$$kf(x+mk) = F(x+k) - Fx$$
$$= Fx + k\frac{dFx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Fx}{dx^2} \dots - Fx$$
$$= k\frac{dFx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Fx}{dx^2} \dots$$

folglich

$$f(x+mk) = \frac{dFx}{dx} + \frac{k}{2}\frac{d^2Fx}{dx^2} + \frac{k^2}{2.3}\frac{d^3Fx}{dx^3} \dots$$

Nun liegt, bewiesenermaassen, $AR = x + k$ immer zwischen AP und AQ, was auch PQ sein mag.

Es

Es ist also nothwendig $AR = AP$, wenn man PQ oder k Null setzt. Folglich ist $mk = 0$ für $k = 0$. Man erhält also, wenn man in die gefundene Gleichung $k = 0$ setzt,

$$fx = \frac{dFx}{dx},$$

welches der Satz ist.

Hier ist von keiner Weglassung und von keinem Unendlich-kleinen die Rede, auch nicht etwa von einer Fläche PMNQ, die Null ist, weil man $k = 0$ gesetzt hat, sondern überall von endlichen Grössen. Denn die Gleichung $f(x+k) = \frac{dFx}{dx} + \frac{k}{2}\frac{d^2Fx}{dx^2} \ldots$ beziehet sich nicht mehr auf Flächen, sondern auf Linien, und $f(x+k)$ ist der Ausdruck einer Linie, nemlich derjenigen unbekannten Ordinate, die, mit k multiplicirt, die Fläche PMNQ giebt, und der Uebergang von der Fläche zur Linie geschieht durch die vorhergegangene Division mit k.

Auch erhält man das Resultat, selbst ohne $k = 0$ zu setzen. Denn es ist

$$f(x+mk) = \frac{dFx}{dx} + \frac{k}{2}\frac{d^2Fx}{dx^2} \ldots, \text{ oder}$$

$$fx + mk\frac{dfx}{dx} + \frac{m^2k^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2} \ldots$$

$$= \frac{dFx}{dx} + \frac{k}{2}\frac{d^2Fx}{dx^2} + \frac{k^2}{2.3}\frac{d^3Fx}{dx^3} \ldots, \text{ oder}$$

$$fx - \frac{dFx}{dx} = k\left(\frac{1}{2}\frac{d^2Fx}{dx^2} - m\frac{dfx}{dx}\right)$$

$$+ k^2\left(\frac{1}{2.3}\frac{d^3Fx}{dx^3} - \frac{m^2}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}\right) \ldots$$

Die Grösse m kann von x abhängig sein, k aber

soll es nicht sein. Da nun, der Gleichung zufolge, k von $fx - \frac{dFx}{dx}$ *abhängig wäre, und Dieses der Voraussetzung entgegen ist, so muss nothwendig* $fx - \frac{dFx}{dx} = 0$, *oder* $\frac{dFx}{dx} = fx$ *sein. So findet man das Resultat auch, ohne* $k = 0$ *zu setzen. Also scheint diese Vorstellungs-Art die nöthige Strenge und Klarheit zu haben. Uebrigens sieht man auch an diesem Beispiel, dass die Schwierigkeit der Rechnung mit veränderlichen Grössen, nicht so wohl in der Rechnung selbst, als in ihren Anwendungen liegt.*]

Bezeichnete fx die Fläche eines, auf der Abscisse x senkrechten Schnitts eines Körpers, so liesse sich, auf die nemliche Art, zeigen, dass der Inhalt des Körpers durch die Stammgrösse von fx ausgedrückt wird. Denn, bezeichnet man diesen Inhalt durch Fx, so drückt die Differenz $F(x+k) - Fx$ den, zwischen den beiden Schnitten $f(x+k)$ und fx, liegenden Theil des Körpers aus, und dieser Theil ist nothwendig kleiner als der prismatische Körper $kf(x+k)$ und grösser als der prismatische Körper kfx, k sey so klein, als man will; woraus, wie oben, folgt

$$fx = \frac{dFx}{dx}.$$

[*Der Beweiss auf die Art, wie oben in der Anmerkung, ist jenem ganz ähnlich.*]

Wenn man also eine Curve sich um die Axe der x drehen lässt, so entsteht ein Conöid, dessen, zur Abscisse x gehöriger, auf der Axe senkrechte Schnitt, ein Kreis ist, dessen Halbmesser y und

dessen Fläche $\frac{1}{2}\pi y^2$ ist, wenn π den Umfang des Kreises bedeutet, dessen Halbmesser = 1 ist. Nun ist durch die Natur der Curve $y = fx$ gegeben; also ist der Inhalt des Schnitts $= \frac{1}{2}\pi(fx)^2$ und mithin der Inhalt Fx des Conöids der Stammgrösse von

$$\frac{dFx}{dx} = \frac{1}{2}\pi(fx)^2$$

gleich.

28.

Die Aufgabe von der Quadratur der Curven ist, wie man sieht, die einfachste für die umgekehrte Functionen-Rechnung, weil es blos darauf ankommt, die Stammgrösse einer gegebenen Function zu finden. Wir haben im 8ten Abschnitte des ersten Theils die Mittel zur Erleichterung dieser Untersuchung angedeutet. Wir wollen hier noch eine wesentliche Bemerkung hinzufügen.

Da es nemlich öfters vortheilhaft ist, eine andere veränderliche Grösse an die Stelle der, in der Function vorkommenden, zu setzen, um die Function in andere einfachere zu zerlegen, oder sonst ihren Ausdruck zu vereinfachen, so muss man nicht vergessen, in solchem Falle, die Function mit der ersten Ableitung der neuen veränderlichen Grösse zu multipliciren. Nennt man z. B. u die Fläche der Curve, deren Ordinate y ist, und betrachtet u und y als Functionen von x, so ist, wie wir sahen, $\frac{du}{dx} = y$. Soll nun aber x selbst noch von einer anderen veränderlichen Grösse, z. B. w, abhängen, so muss man $\frac{du}{dw} : \frac{dx}{dw}$

statt $\frac{du}{dx}$ setzen, (50. 1ster Theil) [*denn es ist alsdann* $\frac{du}{dw} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dw}$] welches $\frac{du}{dw} = y \frac{dx}{dw}$ giebt, [*weil* $\frac{du}{dx} = y$ *war*] u. s. w. [*Zuweilen wird auch eine beliebige Function von* x *gleich einer anderen Grösse, z. B.* $= w$, *gesetzt. Dann ist* $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$, *also* $\frac{du}{dw} = \frac{du}{dx} : \frac{dw}{dx} = y : \frac{dw}{dx}$].

In der Differential- und Integral-Rechnung bezeichnet man die Ableitung (das Differential) der Fläche der Curven durch $y\,dx$ und die Stammgrösse davon (das Integral) durch $y = \int y\,dx$.

29.

Nach der Aufgabe von der Quadratur ist die nächste, diejenige von der Rectification, das heisst, die Aufgabe von der Berechnung der Länge der Curven.

Wir wollen bei der Auflösung dieser Aufgabe, von dem, bei allen alten und neuen Geometern angenommenen, Grundsatze ausgehen, dass von zwei krummen, oder aus graden und krummen zusammengesetzten Linien, wenn sie nach der nemlichen Seite hin hohl sind, und die nemlichen End-Puncte haben, die einschliessende die längere ist. [*Dieser Satz kann auch bewiesen werden. Man sehe: Legendre, élémens de geometrie, oder, in der Uebersetzung dieses nemlichen Buchs vom Herausgeber, den 9ten Satz im 4ten Buch, desgl. die oben erwähnte kleine Schrift über die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Grössen auf Geometrie und Mechanik S. 52 u. s. w.*]

Daraus folgt, dass ein, ganz nach einer Seite concaver Bogen länger ist, als seine Sehne, aber zugleich kürzer als die Summe der beiden Tangenten an den Enden, zwischen den Enden und ihrem Durchschnitts-Puncte, [*also in Fig. 7. der Bogen MN, länger als die Sehne MN und kürzer als die Summe der beiden Tangenten-Stücke MT und TN*]. Es folgt ferner, dass die Länge dieses Bogens grösser ist, als der zwischen den beiden Ordinaten liegende Theil der Tangente an dem einen Ende und kleiner als eben ein solcher Theil der Tangente an dem anderen Ende [*also etwa grösser als M'N und kleiner als MN'*].

Denn es ist klar, dass die eine Tangente die Ordinate unter einem kleineren Winkel, die andere unter einem grösseren Winkel schneidet als die Sehne [*das heisst, dass z. B.* $MN'Q < MNQ$ *und* $NM'P > NMP$] und dass folglich die Sehne kürzer, als die erste und länger als die zweite ist. Die letzte [*M'N*] ist also um so mehr kürzer als der Bogen [*MN, weil schon die Sehne kürzer ist*]. Betrachtet man, weiter, die im Scheitel zusammenstossenden, und von dem Durchschnitt der beiden Tangenten gebildeten, Dreiecke [*MM'T und NN'T*], so ist leicht zu sehen, dass die beiden Theile der ersten Tangente [*MT und N'T*] beide länger sind, als die Theile der zweiten [*M'T und NT*] weil diese Theile, als Seiten der beiden Dreiecke betrachtet, grösseren Winkeln gegenüber liegen. Folglich ist die erste ganze Tangente [*M'N*] länger, als die Summe der Theile der beiden Tangenten, von den Ordinaten, bis zum Durchschnitts-Punct [$MT + NT$; *denn* $N'T > NT$, *also*

$NM > NT + MT$]. Mithin ist auch die erste Tangente [MN'] länger, als der Bogen [MN].

Nun sey fx die zur Abscisse x gehörige Ordinate, so ist, nach (7.) $\frac{dfx}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem die Tangente der Curve die Abscissen-Axe schneidet [*nemlich* $\frac{dfx}{dx} = \tang N'MD$, *wenn* MD *mit* AQ *parallel ist*]. Folglich ist $k\frac{dfx}{dx}$ der, zwischen dem Durchschnitts-Puncte [N'] der Tangente und der Ordinate $f(x+k)$, und einer, durch das Ende der Ordinate fx, mit der Axe parallel gezogenen Linie [MD] liegende Theil der Ordinate $f(x+k)$. [*Also* $k\frac{dfx}{dx} = N'D$; *denn es ist* $N'D = MD \tang N'MD = k\frac{dfx}{dx}$.] Folglich ist $\sqrt{\left(k^2 + \left(k\frac{dfx}{dx}\right)^2\right)} = k\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2\right)}$ der von den beiden, um k von einander entfernten, Ordinaten abgeschnittene Theil der Tangente [MN']. Eben so ist $\frac{df(x+k)}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels [$GNF = M'NM$] unter welchem die Tangente am andern Ende des Curven-Bogens, oder bei der Ordinate $f(x+k)$, die Abscissen-Axe schneidet und folglich $k\sqrt{\left(1 + \left(\frac{df(x+k)}{dx}\right)^2\right)}$ der, zwischen den Ordinaten fx und $f(x+k)$ liegende, Theil dieser Tangente [$M'N$].

Man setze, der Kürze wegen,

$$\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2\right)} = \varphi x,$$

so sind $k\varphi x$ und $k\varphi(x+k)$ die zwischen den Ordinaten fx und $f(x+k)$ liegenden Theile [*MN' und M'N*] der Tangenten an den End-Puncten des Curven-Bogens [*MN*]. Folglich liegt die Länge dieses Curven-Bogens zwischen den beiden Grössen $k\varphi x$ und $k\varphi(x+k)$, wo man k so klein annehmen kann, als man will. Wird also die Länge des Curven-Bogens [*AM*] durch Ψx bezeichnet, so muss die Grösse $\Psi(x+k)-\Psi x$, welche der Ausdruck des zwischen den Ordinaten fx und $f(x+k)$ liegenden Curven-Bogens [*MN*] ist, nothwendig zwischen $k\varphi x$ und $k\varphi(x+k)$ liegen, so klein auch k sein mag. Daraus folgt, vermöge eines ähnlichen Raisonnements, wie in (27.)

$$\frac{d\Psi x}{dx}=\varphi x.$$

Um also die unbestimmte Länge der Curve zu finden, muss man die Stammgrösse von φx, oder von $\sqrt{\left(1+\left(\frac{dfx}{dx}\right)^2\right)}$ suchen, zu welcher dann eine willkürliche Constante hinzugethan werden kann, die so bestimmt werden muss, dass der Ausdruck des Bogens, für diejenige Abscisse, bei welcher man den Bogen anfangen lässt, verschwindet.

Bezeichnet man also die Länge des Bogens, für die Coordinaten x und y, [*vom Anfangs-Punct derselben angerechnet; also des Bogens AM*] durch s, so ist, wenn man s und y als Functionen von x betrachtet, wegen $fx=y$ und $\frac{dfx}{dx}=\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}.$$

Wären x und y durch eine dritte veränderliche Grösse

z. B. t gegeben, so müsste man $\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$ und $\frac{ds}{dt}:\frac{dx}{dt}$ statt $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{ds}{dx}$ setzen (28.), welches, zwischen dem Bogen der Curve und ihren Coordinaten, die Gleichung

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}$$

giebt.

In der Differential-Rechnung wird Dieses durch

$$ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

bezeichnet.

[*Hierbei ist dieselbe Erinnerung zu machen, wie oben, bei der Quadratur. Kürzer lässt sich die Grundformel der Rectification auf eine ähnliche Art beweisen, wie die der Quadratur. Man beweiset, dass es, wenn die Ordinate, von PM bis QN, stetig zu- oder abnimmt, zwischen M und N nothwendig einen Punct geben muss, in welchem die Tangente, wenn man den, zwischen den Ordinaten PM und QN liegenden, Theil derselben nimmt, genau, an Länge, dem Bogen MN gleich ist. Man sehe deshalb, und wegen des Beweises des archimedischen Satzes, von welchem man ausgeht, die vorhererwähnte kleine Schrift über die Anwendung etc. S.* 49 *bis* 60.]

30.

Lässt man die gegebene Curve sich um die Abscissen-Axe drehen, so entsteht ein Conöid und die beiden Ordinaten fx und $f(x+k)$ beschreiben zwei Kreise, deren Halbmesser fx und $f(x+k)$ sind; der

Curven-Bogen beschreibt eine conöidische Zone und die beiden Tangenten an den Enden des Curven-Bogens beschreiben conische Zonen.

Aber, obgleich die eine von diesen Tangenten, wie sich oben zeigte, immer grösser, die andere immer kleiner ist, als der Bogen, so können dennoch, weil sie beide auf der nemlichen Seite des Bogens liegen, die conischen Zonen, welche sie beschreiben, beide zugleich grösser oder kleiner sein, als die conöidische Zone, welche der Bogen beschreibt. Um dieser Schwierigkeit auszuweichen, darf man nur die zweite Tangente [*M'N Fig. 7.*] an der Ordinate $f(x+k)$, parallel mit sich selbst, so weit verlegen, dass der Punct [M'], wo sie die Ordinate fx schneidet, in den Endpunct dieser Ordinate [M] fällt und also die Tangente der Curve zur Secante wird [*folglich in die Lage ML kommt, wenn ML parallel mit MN' ist*]. Alsdann fallen die Secante [ML] und die Tangente an den nemlichen Punct [MN], nothwendig auf verschiedene Seiten des Bogens, und selbst die längste [MN'] fällt immer ausserhalb, und die kürzste [ML] innerhalb des Bogens, wie man sich durch Zeichnung leicht überzeugen kann; so dass die conöidische Zone, welche der Bogen beschreibt, nothwendig zwischen den, von der Tangente $k\varphi x$ und der Secante $k\varphi(x+k)$ beschriebenen, conischen Zonen eingeschlossen ist.

Nun weiss man aus der Geometrie, dass die convexe Oberfläche eines abgekürzten Kegels gleich ist, dem Product seiner Seite in die halbe Summe des Umfanges der beiden Grundflächen. Bezeichnet also π den Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser 1

ist, so ist die Oberfläche der conischen Zone, welche die Tangente $k\varphi x$ beschreibt,

$$k\varphi x . \left(fx + \frac{k}{2}\frac{df}{dx}\right)\pi$$

weil die Halbmesser der beiden Grundflächen [$PM=$] fx und [$QN'=$] $fx + k\frac{dfx}{dx}$ sind. Die Oberfläche der anderen conischen Zone, welche die Tangente oder Secante $k\varphi(x+k)$ beschreibt, ist

$$k\varphi(x+k)\left(fx + \frac{k}{2}\frac{df(x+k)}{dx}\right)\pi,$$

denn es ist leicht zu sehen, dass die Halbmesser der Grundflächen dieses Kegels [$PM=$] fx und [$QL=$] $fx + k\frac{df(x+k)}{dx}$ sind.

Bezeichnet also Ψx diejenige Function der Abscisse x, welche die Oberfläche des Conöids ausdrückt, so ist klar, dass die conöidische Oberfläche $\Psi(x+k) - \Psi x$ ist, und dass diese Grösse zwischen

$$k\pi\varphi x\left(fx + \frac{k}{2}\frac{dfx}{dx}\right) \text{ und}$$

$$k\pi\varphi(x+k)\left(fx + \frac{k}{2}\frac{df(x+k)}{dx}\right)$$

liegt, k sey so klein, als man will. Vermöge eines ähnlichen Raisonnements, wie in (27.) folgt, dass diese Bedingung nicht anders erfüllt werden kann, als wenn

$$\frac{d\Psi x}{dx} = \pi\varphi x fx = \pi fx\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2\right)}$$

ist. Also erhält man die Oberfläche des gegebenen Conöids, wenn man die Stammgrösse von

$$\pi fx\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dfx}{dx}\right)^2\right)}, \text{ oder von}$$

$$\pi y \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

nimmt.

31.

Man setze, im Allgemeinen, es werde die Function Fx gesucht, für welche die Differenz $F(x+k) - Fx$ immer zwischen den beiden Grössen $kf(x, k)$ und $k\varphi(x, k)$ liegt, wo f und φ gegebene Functionen von x und k, von der Art, bezeichnen, dass $fx = \varphi x$ ist, wenn man $k = 0$ setzt, und für welche diese Bedingung erfüllt wird, so klein auch k sein mag. [*So ist es in den obigen Beispielen.*]

Wenden wir unsern Lehrsatz an, so ist

$$F(x+k) = Fx + k\frac{dFx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}$$

und

$$f(x, k) = fx + k\frac{df(x, \lambda)}{dk},$$

$$\varphi(x, k) = \varphi x + k\frac{d\varphi(x, \lambda)}{dk},$$

wo die Grösse λ einen unbestimmten, aber immer zwischen 0 und k liegenden Werth hat, und für die verschiedenen Functionen verschieden sein kann. Da nun $fx = \varphi x$ sein soll [*für* $k = 0$], so reducirt sich die gegebene Bedingung darauf, dass $[Q =]\ k\frac{dFx}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}$ zwischen den beiden Grenzen $[P =]\ kfx + k^2\frac{df(x,\lambda)}{dk}$ und $\left[R = k\varphi x + k^2\frac{d\varphi(x,\lambda)}{dk}\right] = kfx + k^2\frac{d\varphi(x, \lambda)}{dk}$ [*weil* $\varphi x = fx$ *ist*] liegen

muss, wie klein auch k sey. Also muss die Differenz $[Q-P=]$

$$k\left(\frac{dFx}{dx}-fx\right)+k^2\left(\tfrac{1}{2}\frac{d^2F(x+k)}{dx^2}-\frac{df(x,\lambda)}{dk}\right)$$

immer grösser sein, als die Differenz $[R-P=]$

$$k^2\left(\frac{d\varphi(x,\lambda)}{dk}-\frac{df(x,\lambda)}{dk}\right).$$

So lange aber die, in die erste Potenz von k multiplicirte, Grösse nicht Null ist, kann man k immer so klein annehmen, dass die erste Grösse grösser, als die zweite ist. Denn man darf zu dem Ende nur k, ohne Rücksicht auf das Zeichen, kleiner, als $\dfrac{\frac{dFx}{dx}-fx}{\frac{d\varphi(x,\lambda)}{dk}-\frac{1}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}}$ setzen. [*Nemlich*: $Q-P$ *ist grösser, als* $R-P$, *sobald*

$$\frac{dFx}{dx}-fx+k\left(\tfrac{1}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}-\frac{df(x,\lambda)}{dk}\right)$$
$$>k\left(\frac{d\varphi(x,\lambda)}{dk}-\frac{df(x,\lambda)}{dk}\right),\ \textit{oder}$$

$$\frac{dFx}{dx}-fx>k\left(\frac{d\varphi(x,\lambda)}{dk}-\tfrac{1}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dk}\right),\ \textit{oder}$$

$$k<\frac{dFx-fx}{\frac{d\varphi(x,\lambda)}{dk}-\frac{1}{2}\frac{d^2F(x+\lambda)}{dx^2}}\ \textit{ist.}]$$

Die vorgeschriebene Bedingung erfordert also nothwendig, dass $\frac{dFx}{dx}-fx=0$, oder

$$\frac{dFx}{dx}=fx$$

ist, das heisst, dass die gesuchte Grösse Fx die Stammgrösse von fx ist. Um den vollständigen Werth von

Fx zu finden, muss man eine willkürliche Constante hinzufügen, deren Werth nach den Bedingungen der Aufgabe bestimmt wird.

[*Diese Verallgemeinerung der, in den obigen einzelnen Fällen angewendeten, Rechnung ist wichtig. Sie würde das, in ähnlichen Fällen gewöhnliche, Verfahren der Differential-Rechnung rechtfertigen, allein es scheint dagegen Einiges einzuwenden. Es wird z. B. vorausgesetzt, dass allgemein $f(x, k)$, also nicht sowohl $f(x+k)$, sondern eine, auf beliebige Weise, von x und k abhängende Grösse, gleich $fx + k\frac{dfx, \lambda}{dk}$ gesetzt werden kann, wo λ zwischen o und k liegt. Es scheint, als wenn Dieses noch erst besonders bewiesen werden müsste. Uebrigens ist Nichts verloren, wenn auch diese Verallgemeinerung nicht haltbar sein sollte. Denn es ist kein besonderer Nutzen davon abzusehen, wenn man auch wirklich die Beweise und Deductionen der elementaren Fälle auf gleichsam mechanische Regeln bringen könnte.*]

Siebenter Abschnitt.

Theorie der Berührung der Curven doppelter Krümmung. Vom Krümmungs-Halbmesser, von den Mittel-Puncten der Krümmung und den geometrischen Orten derselben. Von den Evoluten der Curven doppelter Krümmung. Quadratur und Rectification dieser Curven.

32.

Die Curven in der Ebene sind Gegenstände der Geometrie mit zwei Abmessungen, und hängen folglich nur von zwei Coordinaten ab. Die Curven doppelter Krümmung gehören für die Geometrie mit drei Abmessungen, weil sie nur auf Körper-Oberflächen beschrieben werden können. Sie hängen von drei, auf einander senkrechten, Coordinaten ab, deren zwei, Functionen der dritten sind, so dass sie also nur durch zwei Gleichungen zwischen drei veränderlichen Grössen ausgedrückt werden können. [*Wenn man eine Curve doppelter Krümmung auf zwei beliebige, auf einander senkrechte Ebenen projicirt, so entstehen zwei, durch die Curve gehende, Cylinder-Flächen. die auf den beiden Ebenen senkrecht sind. Die Curve kann also als der Durchschnitt zweier solcher Cylinder-Flächen betrachtet werden. Die beiden Gleichungen, welche die Curve ausdrücken, kann man sich als die Gleichungen ihrer Projectionen auf die beiden Ebenen vorstellen, welche Curven in der Ebene sind.*]

Es sey also, für eine beliebige Curve doppelter Krümmung,

$$y = fx \text{ und } z = \varphi x,$$

wo x, y, z drei auf einander rechtwinklige Coordinaten bedeuten [*$y = fx$ ist dann die Gleichung der Projection der gegebenen Curve doppelter Krümmung auf die Ebene der x, y; $z = \varphi x$ ist die Gleichung der Projection der Curve auf die Ebene der x, z*]. Für irgend eine andere Curve doppelter Krümmung sey

$$q = Fp \text{ und } r = \Psi p,$$

wo p, q, r ebenfalls die drei, auf die nemlichen Axen bezogenen, auf einander senkrechten Coordinaten bezeichnen. Sollen die beiden Curven für die Abscisse x einen Punct gemein haben, so muss, wenn man $p = x$ setzt, auch

$$q = y \text{ und } r = z, \text{ also}$$
$$y = Fx, \quad z = \Psi x$$

sein.

Für irgend einen anderen, zu der Abscisse $x + k$ gehörigen Punct, sind die Ordinaten y und z gleich $f(x+k)$ und $\varphi(x+k)$, und die Ordinaten q und r gleich $F(x+k)$ und $\Psi(x+k)$. Setzt man, der Kürze wegen,

$$f(x+k) - F(x+k) = \mathfrak{d} \text{ und } \varphi(x+k) - \Psi(x+k) = \delta,$$

so ist leicht zu sehen, dass die Entfernung D der, zu der Abscisse $x + k$ gehörigen, Puncte der beiden Curven

$$D = \sqrt{(\mathfrak{d}^2 + \delta^2)}$$

ist. [*Nemlich, wenn in Fig.* 8. *AB und AC die Axen der x und der y sind, die Ebene CAB etwa*

horizontal angenommen wird, und $AP = x$, $PM = y$ *und* $PQ = k$ *ist, und man stellt sich unter* M', N' *zwei senkrechte, über* M, N *liegende, zu den Abscissen* x *und* $x + k$ *gehörende Puncte der ersten, unter* S' *den, senkrecht über* S *liegenden, Punct der zweiten Curve vor; so ist offenbar* $NS = f(x+k) - F(x+k) = \mathfrak{d}$ *und der Unterschied der Höhen der Puncte* N' *und* S' *über der Ebene der* BAC, $= \varphi(x+k) - \Psi(x+k) = \delta$; *also ist die Entfernung der Puncte* N' *und* S', *von einander*, $= \sqrt{(\mathfrak{d}^2 + \delta^2)}$]. Nun lässt sich, auf eine ähnliche Weise, wie im Anfange dieses zweiten Theils, zeigen, dass es, sobald

$$\frac{dfx}{dx} = \frac{dFx}{dx} \text{ und } \frac{d\varphi x}{dx} = \frac{d\Psi x}{dx},$$

unmöglich ist, dass irgend eine andere Curve, die nicht die nemlichen Bedingungen erfüllt, zwischen den beiden Curven hindurch gehen kann. [*Dieses folgt auch unmittelbar daraus, dass, sobald sich die beiden Curven doppelter Krümmung berühren, auch ihre Projectionen einander berühren müssen. Denn, berühren sich die Projectionen, so kann zwischen denselben keine andere Curve, ohne die nemlichen Bedingungen der Berührung, hindurchgehen, folglich auch keine darüber liegende Curve doppelter Krümmung zwischen den beiden gegebenen, die sich berühren.*]

Wäre ferner

$$\frac{d^2fx}{dx^2} = \frac{d^2Fx}{dx^2} \text{ und } \frac{d^2\varphi x}{dx^2} = \frac{d^2\Psi x}{dx^2},$$

so würde sich auf die nemliche Weise zeigen lassen, dass

dass keine andere Curve, für welche diese Gleichungen nicht auch Statt finden, zwischen den beiden Curven hindurchgehen kann u. s. w.

Wendet man also auf die Curve doppelter Krümmung die nemlichen Ansichten von den verschiedenen Ordnungen der Berührung der Curven in der Ebene an, so folgt, dass die beiden ersten Bedingungen eine Berührung erster Ordnung, die beiden andern eine Berührung zweiter Ordnung bestimmen, u. s. w.

Sind überhaupt x, y, z die Coordinaten einer gegebenen Curve, und p, q, r die Coordinaten einer andern Curve, für welche die Bedingungen der Berührung einer gegebenen Ordnung mit der gegebenen Curve gesucht werden, so finden, wenn $F(pqr) = u = 0$ und $\Psi(pqr) = w = 0$ die beiden Gleichungen der zweiten Curve sind, für die Berührung erster Ordnung, die vier Gleichungen

$$u = 0, \ w = 0, \ \frac{d(u)}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d(w)}{dx} = 0$$

Statt, wenn man $p = x$, $q = y$, $r = z$ setzt. Für eine Berührung zweiter Ordnung kommen noch die beiden Gleichungen

$$\frac{d^2(u)}{dx^2} = 0 \text{ und } \frac{d^2(w)}{dx^2} = 0$$

hinzu u. s. w. Ueberall werden y und z als Functionen von x betrachtet. [*Denn die Gleichungen geben nothwendig die nemlichen* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ *etc., welche man erhalten würde, wenn man erst* y *und* z *aus den Gleichungen entwickelte und erst dann die Ableitungen nähme.*] Diesen Glei-

chungen kann, durch die willkürlichen Constanten a, b, c.... welche in den gegebenen Ausdrücken $F(pqr) = u$ und $\Psi(pqr) = w$ vorkommen, und welche man, wie oben (10.), Elemente der Berührung, oder Parameter nennen kann, weil sie durch x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ *etc.* bestimmt werden, Genüge geschehen.

33.

Man setze, die gegebene Curve sey eine grade Linie, deren Gleichungen

$$q = a + bp \text{ und } r = \alpha + \beta p$$

sind. Damit diese grade Linie irgend eine gegebene Curve, deren Coordinaten x, y, z sind, in der ersten Ordnung berühre, d. h. ihre Tangente sey, müssen die vier Gleichungen

$$y = a + bx,\ z = \alpha + \beta x,\ \frac{dy}{dx} = b,\ \frac{dz}{dx} = \beta$$

Statt finden, woraus folgt

$$a = y - x\frac{dy}{dx},\ \alpha = z - x\frac{dz}{dx},$$

so, dass die Gleichungen der Tangente, auf die Coordinaten p, q, r bezogen, folgende sind

$$q = y - x\frac{dy}{dx} + p\frac{dy}{dx},\ r = z - x\frac{dz}{dx} + p\frac{dz}{dx},$$

$$\left[\text{oder } q = y + (p-x)\frac{dy}{dx} \text{ und } r = z + (p-x)\frac{dz}{dx}\right]$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese beiden Gleichungen die Tangenten der beiden Curven in der Ebene ausdrücken, welche die Projectionen der gegebenen Curve auf die Ebenen der x, y und der x, z sind (6.), so dass man, um eine Tangente an eine Curve dop-

pelter Krümmung zu ziehen, nur die Tangenten ihrer beiden Projectionen ziehen darf. Die grade Linie, deren Projectionen diese beiden Tangenten sind, ist die gesuchte Tangente.

34.

Es werde ferner der Krümmungs-Kreis einer Curve doppelter Krümmung gesucht.

Um auf die kürzeste Weise die allgemeine Gleichungen eines Kreises in einer beliebigen Ebene auszudrücken, wollen wir den Kreis als den Durchschnitt der Ebene mit einer Kugelfläche, durch deren Mittel-Punct sie geht, betrachten; der Halbmesser und der Mittel-Punct der Kugel sind alsdann der Halbmesser und der Mittel-Punct des Kreises, und die Ebene ist die Ebene des Kreises.

Die allgemeine Gleichung einer Kugel, auf die drei Coordinaten p, q, r bezogen, ist

$$(p-a)^2+(q-b)^2+(r-c)^2=g^2,$$

wo a, b, c die Coordinaten des Mittel-Puncts sind und g der Halbmesser ist. Die Gleichung einer Ebene, durch den Punct, dessen Coordinaten a, b, c sind, ist, mit den nemlichen Coordinaten p, q, r,

$$p-a+m(q-b)+n(r-c)=0,$$

[*Man findet die Herleitung der Gleichungen dieser Art, unter andern, bei* M o n g e, *in der Application de l'analyse à la géometrie, und in der ersten Abhandlung des ersten Bandes der Sammlung mathematischer Aufsätze des Herausgebers*] wo m und n zwei willkürliche Constanten bedeuten, welche die Neigung der Ebene gegen die festen

Coordinaten-Ebenen bestimmen. Das System dieser beiden Gleichungen bestimmt also einen Kreis vom Halbmesser g, dessen Mittel-Punct die Coordinaten a, b, c hat und dessen Ebene von den Grössen m und n abhängt.

Setzt man also in diese beiden Gleichungen $p = x$, $q = y$ und $r = z$ [*damit der Kreis mit der gegebenen Curve zuerst einen Punct gemein habe*] und nimmt darauf die ersten und zweiten Ableitungen, so erhält man folgende sechs Gleichungen:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = g^2$$

$$x - a + m(y-b) + n(z-c) = 0$$

$$x-a + (y-b)\frac{dy}{dx} + (z-c)\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$1 + m\frac{dy}{dx} + n\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+(z-c)\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

$$m\frac{d^2y}{dx^2} + n\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

Die vier ersten von diesen sechs Gleichungen drücken die Bedingungen aus, welche erfüllt werden müssen, wenn der Kreis die Curve doppelter Krümmung in der ersten Ordnung berühren soll: x, y, z sind die Coordinaten der Curve, und y und z werden als Functionen von x betrachtet. Nimmt man die beiden letzten Gleichungen hinzu, so hat man die Bedingungen für die Berührung zweiter Ordnung, das heisst, die Bedingungen, unter welchen der Kreis mit dem Krümmungs-Kreise der Curve übereinkommt.

Da in dieser Gleichung sechs unbestimmte Grössen a, b, c, g, m, n vorkommen, so kann man al-

len Bedingungen ein Genüge thun und Grösse und Länge des Krümmungs-Kreises vollständig finden. Verlangte man aber blos einen berührenden Kreis, so blieben zwei Grössen unbestimmt, für welche man den Halbmesser g und eine der beiden Grössen m und n annehmen kann. In diesem Fall bestimmt die [*zweite*] Gleichung

$$x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}+(z-c)\frac{dz}{dx}=0,$$

die Ebene, in welcher die Mittel-Puncte aller Kreise liegen, die die gegebene Curve berühren können [*weil in dieser Gleichung, ausser* x, y *und* z, *welche Grössen für jeden Punct der Curve bestimmt und gegeben sind, nur noch diese unbestimmten Coordinaten der Kreis- Mittel-Puncte* a, b, c *in der ersten Ordnung vorkommen, so dass also die Gleichung zwischen den unbestimmten Grössen* a, b, c *Statt findet. Eine solche Gleichung ist die einer Ebene, in welcher alle zu den Coordinaten* a, b, c *gehörigen Puncte, also alle mögliche Kreis-Mittel-Puncte liegen*]. Und da der Halbmesser des berührenden Kreises auf der Curve nothwendig senkrecht ist, so ist die Gleichung die, einer Ebene, welche senkrecht auf der Curve steht. a, b, c sind die Coordinaten dieser Ebene.

Wir wollen nun die Berührung zweiter Ordnung untersuchen. Die drei ersten Gleichungen geben, wenn man, der Kürze wegen,

$$\sqrt{\left[\left(n\frac{dy}{dx}-m\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(n-\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(m-\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}=r$$

setzt,

$$x - a = \frac{\left(n\frac{dy}{dx} - m\frac{dz}{dx}\right)g}{\tau},$$

$$y - b = \frac{\left(n - \frac{dz}{dx}\right)g}{\tau},$$

$$z - c = \frac{\left(m - \frac{dy}{dx}\right)g}{\tau}.$$

[*Man überzeugt sich, ohne die etwas weitläuftige Entwickelung zu wiederholen, am besten von der Richtigkeit dieser Ausdrücke, wenn man diese Werthe von $x-a$, $y-b$ und $z-c$ in die erste, zweite und dritte Gleichung substituirt. Es ist leicht und ohne weitere Rechnung zu sehen, dass sie diesen drei Gleichungen sämmtlich ein Genüge thun.*]

Setzt man diese Werthe [*von $y-b$ und $z-c$*] in die fünfte Gleichung, so erhält man

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \frac{\left(n - \frac{dz}{dx}\right)g}{\tau}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\left(m - \frac{dy}{dx}\right)g}{\tau}\frac{d^2z}{dx^2} = 0,\right.$$

also]

$$g = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\tau}{\left(n - \frac{dz}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} - \left(m - \frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2z}{dx^2}}.$$

Endlich geben die vierte und sechste Gleichung

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2} + n\left(\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ und}\right.$$

$$\left.\frac{d^2z}{dx^2} + m\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dz}{dx}\right) = 0, \text{ also}\right]$$

$$m = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}},\ n = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}},$$

welche Werthe man in die obigen Ausdrücke substituiren kann. Man findet, nach einigen Reductionen,

$$r = \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}\sqrt{\left(\left(\frac{d^2y}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right)}}{\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}},$$

und hieraus

$$g = -\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2\right)}},$$

$$a = x - \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2},$$

$$b = y + \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}$$

$$c = z + \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}.$$

[*Da die Berechnung dieser Formeln aus den gegebenen Vordersätzen, obgleich sie etwas weitläuftig ist, weiter keine Schwierigkeit hat, so will ich derselben keinen Raum aufopfern.*

Setzt man, der Kürze wegen, und um die Verhältnisse der Ausdrücke unter einander sichtbar zu machen,

$$\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)} = P$$

$$\sqrt{\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2z}{dx^2}\right)}=Q \text{ und}$$

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}=R,$$

so ist

$$g=-\frac{P^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(Q^2+R^2)}}$$

$$a=x-\frac{P^2\cdot\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{Q^2+R^2}$$

$$b=y+\frac{P^2\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\cdot R\right)}{Q^2+R^2}$$

$$c=z+\frac{P^2\cdot\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\cdot R\right)}{Q^2+R^2}.]$$

Die Grösse g bezeichnet den Krümmungs-Halbmesser der gegebenen Curve und a, b, c sind die Coordinaten der Curve, in welcher die Mittel-Puncte aller Krümmungs-Kreise liegen. Diese Curve ist aber nicht nothwendig die Evolute der gegebenen, wie bei Curven in der Ebene. [*Denn man setze z. B.* $c=0$, *so liegt die Curve, in welcher sich die Mittel-Puncte der Krümmungs-Kreise befinden, in der Ebene der* x, y. *Wegen* $c=0$ *ist aber, wie die Formeln zeigen, nicht nothwendig* $z=0$, *also liegt deshalb die gegebene Curve nicht nothwendig ebenfalls in der Ebene der* x, y. *Das letzte aber müsste der Fall sein, wenn der geometrische Ort der Mittel-Puncte die Evolute der gegebenen Curve sein sollte; also ist dieses nicht nothwendig der Fall.*]

35.

Um sich davon [*noch näher*] zu überzeugen, und zugleich die Bedingungen zu finden, unter welchen der geometrische Ort der Mittel-Puncte der Krümmungs-Kreise die Evolute der gegebenen Curve doppelter Krümmung ist, kann man, wie in (23.) verfahren.

Man nehme die aus den drei ersten Gleichungen gezogenen obigen Werthe von a, b, c, so ist

$$a = x - \frac{\left(n\frac{dy}{dx} - m\frac{dz}{dx}\right)g}{\tau}$$

$$b = y + \frac{\left(n - \frac{dz}{dx}\right)g}{\tau}$$

$$c = z - \frac{\left(m - \frac{dy}{dx}\right)g}{\tau}.$$

Betrachtet man in diesen Ausdrücken die Grössen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, nebst m und n, als unveränderlich und die Grösse g allein als veränderlich, so sind a, b, c die Coordinaten der graden Linie, in welcher [*für jedes einzelne x, y und z*] der Krümmungs-Halbmesser liegt. Betrachtet man hingegen alle jene Grössen als veränderlich, und zwar m, n und g als in x gegeben, weil y und z in x gegeben sind, so drücken a, b, c die Coordinaten der Mittel-Puncts-Curve aus. Damit nun die vorige grade Linie diese Curve in der ersten Ordnung berühre, [*welches die Eigenschaft der Evolute ist,*] so müssen die Werthe von $\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx}$ und $\frac{dc}{dx} : \frac{da}{dx}$,

wenn man b und c als Functionen von a, oder, allgemeiner, a, b, c als Functionen einer anderen beliebigen veränderlichen Grösse betrachtet [*zu welcher man, weil sie willkürlich ist, auch* x *nehmen kann*], die nemlichen in beiden Fällen seien. [*Es ist nemlich* $\frac{db}{da} \cdot \frac{da}{dx} = \frac{db}{dx}$ *und* $\frac{dc}{da} \cdot \frac{da}{dx} = \frac{dc}{dx}$, *also* $\frac{db}{da} = \frac{db}{dx} : \frac{da}{dx}$ *und* $\frac{dc}{da} = \frac{dc}{dx} : \frac{da}{dx}$. *Nun sind* $\frac{db}{da}$ *und* $\frac{dc}{da}$, *im Fall* x, y, z, m *und* n *veränderlich sind, die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Tangente der Mittel-Puncts-Curve mit den Coordinaten-Ebenen macht, und, im Fall* x, y, z, m *und* n *constant sind, die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche der Krümmungs-Halbmesser mit den Coordinaten-Ebenen macht. Also müssen* $\frac{db}{da}$ *und* $\frac{dc}{da}$ *in beiden Fällen gleich sein, weil, im Fall der Krümmungs-Halbmesser die Mittel-Puncts-Curve berühren soll, jene Winkel gleich sein müssen.*] Folglich müssen aus die Werthe von $\frac{da}{dx} : \frac{dg}{dx}$, $\frac{db}{dx} : \frac{dg}{dx}$, $\frac{dc}{dx} : \frac{dg}{dx}$ [*welche* $\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = \frac{db}{da}$ *und* $\frac{dc}{dx} : \frac{da}{dx} = \frac{dc}{da}$ *geben, wenn man sie durch einander dividirt*] die nemlichen sein, die Grössen a, b, c, g mögen allein, oder die Grössen x, y, z, m und n zugleich mit veränderlich sein. [*Dieser letzte Schluss scheint einige Schwierigkeit zu haben. Denn*

wenn die drei Grössen $\frac{da}{dx} : \frac{dg}{dx}, \frac{db}{dx} : \frac{dg}{dx}, \frac{dc}{dx} : \frac{dg}{dx}$ *die nemlichen in beiden Fällen sind, so sind es zwar allerdings auch ihre Quotienten* $\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = \frac{db}{da}$ *und* $\frac{dc}{dx} : \frac{da}{dx} = \frac{dc}{da}$; *aber nicht umgekehrt scheint zu folgen, dass, wenn die beiden Quotienten die nemlichen sind, auch Zähler und Nenner dieselben sein müssen. Diese Zähler nnd Nenner könnten auch andere Formen haben, ohne dass die Quotienten aufhörten, die nemlichen zu sein. Es dürften z. B. nur* $\frac{da}{dx} : \left(\frac{dg}{dx} + \frac{da}{dx}\right)$, $\frac{db}{dx} : \left(\frac{dg}{dx} + \frac{da}{dx}\right)$, $\frac{dc}{dx} : \left(\frac{dg}{dx} + \frac{da}{dx}\right)$ *die nemlichen Werthe für beide Fälle behalten, so blieben ebenfalls die Quotienten dieselben. In den zwei ähnlichen Fällen (23.) bei Curven in der Ebene, scheint dieser Gegenstand genauer ausgedrückt.*] Folglich müssen die Gleichungen, welche diese Werthe bestimmen, auf beide Fälle passen. [*Dieses ist unstreitig richtig, wie überhaupt das Resultat. Nur scheint es nicht grade nothwendig, dass grade die drei Grössen* $\frac{da}{dx} : \frac{dg}{dx}, \frac{db}{dx} : \frac{dg}{dx}, \frac{dc}{dx} : \frac{dg}{dx}$ *die nemlichen Werthe für beide Fälle haben müssen. Sie haben sie wirklich, wie sich sogleich zeigen wird, und es folgt daraus ohne Zweifel, dass auch die zwei Grössen* $\frac{db}{dx} : \frac{da}{dx} = \frac{db}{da}$ *und* $\frac{dc}{dx} : \frac{da}{dx} = \frac{dc}{da}$ *die nemlichen Werthe haben, worauf das Resultat beruht; nur folgt nicht, wie es scheint,*

dass deshalb grade jene drei Grössen und keine anderen die mehrerwähnte Eigenschaft haben müssen. Grade sie kommen blos deshalb vor, weil man diese Quotienten unmittelbar aus den Gleichungen findet.]

Betrachtet man nun die Gleichungen, welche zur Bestimmung der Grössen a, b, c, g, m und n, in x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ gedient haben und lässt alle diese Grössen zu gleicher Zeit sich verändern, so ist klar, dass zu den beiden Gleichungen

$$(x-a) + (y-b)^2 + (z+c)^2 = g^2 \text{ und}$$

$$(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} + (z+c)\frac{dz}{dx} = 0,$$

zugleich noch die Gleichung

$$-(x-a)\frac{da}{dx} - (y-b)\frac{db}{dx} - (z-c)\frac{dc}{dx} = g\frac{dg}{dx}$$

gehört und diese grade ist genau die Ableitung der ersten, wenn man a, b, c und g allein als veränderlich annimmt. [*Denn, wenn x, y und z allein veränderlich sind, so giebt die Gleichung* $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = g^2$ *folgende:* $(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} + (z-c)\frac{dz}{dx} = 0$. *Sind hingegen x, y, z, m, n, a, b, c, g zugleich veränderlich, so giebt sie:* $(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} + (z-c)\frac{dz}{dx} - (x-a)\frac{da}{dx} - (y-b)\frac{db}{dx} - (z-c)\frac{dc}{dx} = g\frac{dg}{dx}$. *Eins vom Andern abgezogen giebt* $-(x-a)\frac{da}{dx} - (y-b)\frac{db}{dx} - (z-c)\frac{dc}{dx}$

$= g\frac{dg}{dx}$, *welches die erste Ableitung von* $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = g^2$ *ist, wenn man* a, b, c *allein als veränderlich betrachtet, wie es auch sein muss, weil in* $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = g^2$, *blos* x, y, z *und* a, b, c; m *und* n *aber nicht vorkommen.*] Eben so geben die beiden Gleichungen

$$(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} + (z-c)\frac{dz}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2} + (z-c)\frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

noch folgende Gleichung

$$\frac{da}{dx} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{db}{dx} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dc}{dx} = 0,$$

welche ebenfalls genau die abgeleitete der ersten ist, wenn man a, b, c allein als veränderlich annimmt [*und zwar wiederum, weil* m *und* n *nicht vorkommen*]. Diese beiden Gleichungen $\left[-(x-a)\frac{da}{dx} - (y-b)\frac{db}{dx} - (z-c)\frac{dc}{dx} = g\frac{dg}{dx}\right.$ und $\left.\frac{da}{dx} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{db}{dx} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dc}{dx} = 0\right]$ erfüllen also die gegebene Bedingung. [*Denn die Gleichung der Kugel, von welcher bis jetzt die Rede ist, sey* $K = 0$. *Die erste und zweite Ableitung der Grösse* K *mögen, wenn nur* x, y, z *sich verändern, der Kürze wegen, durch* $\frac{dK}{dx}$ *und* $\frac{d^2K}{dx^2}$; *wenn* a, b, c, x, y, z *sich verändern, durch* $\frac{d(K)}{dx}$ *und* $\frac{d^2(K)}{dx}$ *und wenn nur* a, b, c *sich allein verändern, durch*

$\frac{dK}{da}$ *und* $\frac{d^2K}{da\,dx}$, *bezeichnet werden, so sind die von der Kugel hergenommenen drei Gleichungen, welche zur Bestimmung von a, b, c und g gedient haben, folgende:*

$$K = 0,\ \frac{dK}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d^2K}{dx^2} = 0.$$

Verlangt man nun die hieraus folgenden Werthe von $\frac{da}{dx}$, $\frac{db}{dx}$ *und* $\frac{dc}{dx}$, *für die beiden Fälle, wenn alle Grössen, und wenn nur a, b, c allein sich verändern, so können solche nur aus jenen drei Bestimmungs-Gleichungen, und zwar nur aus den ersten Ableitungen von* $K = 0$ *und* $\frac{dK}{dx} = 0$, *die nicht über die zweite Ordnung hinausgehen, genommen werden. Diese abgeleiteten Gleichungen sind, im ersten Fall, wenn Alles sich verändert,*

$$\frac{dK}{dx} + \frac{dK}{da} = 0 \text{ und } \frac{d^2K}{dx^2} + \frac{d^2K}{da\,dx} = 0;$$

hingegen im zweiten, wenn nur a, b, c sich verändern,

$$\frac{dK}{da} = 0 \text{ und } \frac{d^2K}{da\,dx} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen müssen die, zu den gefundenen Werthen von a, b, c gehörigen Ableitungen $\frac{da}{dx}$, $\frac{db}{da}$, $\frac{dc}{dx}$, *in den beiden Fällen genommen werden. Nun sind* $\frac{dK}{dx} = 0$ *und* $\frac{d^2K}{dx^2} = 0$ *zur Bestimmung von a, b, c selbst gebraucht worden; also sind diese Grössen* $\frac{dK}{dx}$ *und* $\frac{d^2K}{dx^2}$, *für alle*

Fälle, Null. Lässt man sie daher weg, so sind die Gleichungen, welche zur Bestimmung der Grössen $\frac{da}{dx}, \frac{db}{dx}, \frac{dc}{dx}$ *dienen sollen, im ersten Fall, wenn Alles sich verändert,*

$$\frac{dK}{da} = 0 \text{ und } \frac{d^2K}{da\,dx} = 0.$$

Im zweiten Fall, wenn nur a, b, c sich verändern, wären sie

$$\frac{dK}{da} = 0 \text{ und } \frac{d^2K}{da\,dx} = 0.$$

Sie sind folglich in beiden Fällen die nemlichen. Mithin haben nothwendig $\frac{da}{dx}, \frac{db}{dx}, \frac{dc}{dx}$, *in so fern sie von der Kugel abhängen, in beiden Fällen den nemlichen Werth, alle Grössen mögen sich verändern, oder nur a, b, c.*] Aber die obigen beiden Gleichungen sind zur Bestimmung der drei Grössen $\frac{da}{dx} : \frac{dg}{dx}, \frac{db}{dx} : \frac{dg}{dx}, \frac{dc}{dx} : \frac{dg}{dx}$, nicht hinlänglich [*weil sich aus zwei Gleichungen drei Grössen nicht bestimmen lassen*]. Man muss also, auf eine ähnliche Weise, eine dritte Gleichung suchen, welche die Ableitungen $\frac{da}{dx}, \frac{db}{dx}, \frac{dc}{dx}$ enthält.

Die beiden obigen zwei Gleichungen sind aus der Gleichung der Kugel [$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = g^2$] genommen. Man nehme die dritte aus der Gleichung der Ebene: $(x-a) + m(y-b) + m(z-c) = 0$, welche, wenn man Alles [*nach x*] sich verändern lässt, $\left[1 + m\frac{dy}{dx} + n\frac{dz}{dx} - \frac{da}{dx} - m\frac{db}{dx} - n\frac{dc}{dx} + (y-b)\frac{dm}{dx} + (z-c)\frac{dn}{dx} = 0,\right]$ also, wenn man

auf die Gleichung $1 + m\frac{dy}{dx} + n\frac{dz}{dx} = 0$, [*die für den Fall Statt findet, wenn x, y und z allein sich verändern*] Rücksicht nimmt, [*nemlich, sie von der vorigen abzieht:*]

$$-\frac{da}{dx} - m\frac{db}{dx} - n\frac{dc}{dx} + (y-b)\frac{dm}{dx} + (z-c)\frac{dn}{dx} = 0$$

giebt, welche Gleichung, wie man sieht, die erste abgeleitete Gleichung zu der vorigen ist, wenn man a, b, c, m und n ebenfalls als veränderlich annimmt. [*Hierbei findet nun eine ähnliche Bemerkung Statt, wie oben bei den Gleichungen zur Bestimmung von $\frac{da}{dx}$, $\frac{db}{dx}$ und $\frac{dc}{dx}$, die von der Kugel herkommen.*] Diese Gleichung erfüllt aber die Bedingung [*dass der Krümmungs-Halbmesser der gegebenen Curve die Mittel-Puncts-Curve berühre*] nur dann, wenn der von der Veränderung der Grössen m und n abhängende Theil verschwindet, das heisst, nur dann, wenn die Grösse

$$(y-b)\frac{dm}{dx} + (z-c)\frac{dn}{dx} = 0$$

ist. [*Denn, erfüllte sie die Bedingung ohne das, so müsste sie, wie die ersten beiden obigen Gleichungen, die Ableitung der Gleichung der Ebene $x-a+m(y-b)+n(z-c)=0$ in der Voraussezzung sein, dass blos a, b, c veränderlich sind. Letztere aber ist blos $-\frac{da}{dx} - m\frac{db}{dx} - n\frac{dc}{dx} = 0$, und nicht $-\frac{da}{dx} - m\frac{db}{dx} + \frac{dc}{dx} + (y-b)\frac{dm}{dx} + (z-c)\frac{dn}{dx}$. Also müssen die beiden Glieder*

$(y-b)$

$(y-b)\frac{dm}{dx} + (z-c)\frac{dn}{dx}$ *an und für sich Null sein, damit diese, in der Voraussetzung dass Alles sich verändere, zugleich dem Falle entsprechen, wenn blos a, b und c veränderlich sind. Der Umstand, dass die von der Ebene hergenommene Gleichung, nicht wie die obigen beiden, von der Kugel herrührenden, den beiden Voraussetzungen zugleich, dass Alles und dass blos a, b, c veränderlich sind, von selbst entsprechen, kommt daher, dass in der Gleichung der Kugel die Grössen m und n gar nicht vorkommen, wohl aber in der Gleichung der Ebene, wo sie, wenn x, y und z variiren, constant sind, weil sie erst hernach aus den Verhältnissen zwischen x, y und z, die erforderlich sind, damit der Krümmungs-Kreis die gegebene Curve in der zweiten Ordnung berühre, bestimmt werden. Wenn man nemlich den Krümmungs-Kreis für ein bestimmtes x, y, z finden will, so sind m und n, wie a, b, c, constante und unbekannte Grössen, die aus der Bedingung der Berührung des Kreises mit der Curve gefunden werden müssen. Sie sind nicht veränderlich, weil sie sich nur auf einen bestimmten Punct der Curve, oder nur auf einen und denselben Krümmungs-Kreis, oder nur auf ein bestimmtes x, y und z beziehen. Sucht man hingegen die Tangente der Mittel-Puncts-Curve, welches dadurch geschieht, dass man von einem Puncte derselben zum andern geht und deshalb a, b, c sich verändern lässt, so geht man von einem Berührungs-Kreise zum andern über, und alsdann sind m und n veränderlich.*]

Findet die Bedingung $\left[(y-b)\frac{dm}{dx}+(z-c)\frac{dn}{dx}\right.$ $\left.=0\right]$ Statt, so giebt die übrig bleibende Gleichung

$$\frac{da}{dx}+m\frac{db}{dx}+n\frac{dc}{dx}=0,$$

verbunden mit den obigen beiden Gleichungen

$$\left[-\frac{da}{dx}(x-a)-\frac{db}{dx}(y-b)-\frac{dc}{dx}(z-c)=g\frac{dg}{dx}\text{ und}\right.$$

$$\left.\frac{da}{dx}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{db}{dx}+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dc}{dx}=0\right]$$

diejenigen Werthe von $\frac{da}{dx}:\frac{dg}{dx}$, $\frac{db}{dx}:\frac{dg}{dx}$ und $\frac{dc}{dx}:\frac{dg}{dx}$, welche die nemlichen bleiben, die Grössen a, b, c, d mögen allein, oder x, y, z, m und n zugleich mit veränderlich sein. Folglich fällt dann, in diesem Fall, auch die grade Linie, in welcher der Krümmungs-Halbmesser liegt, mit der Tangente der Mittel-Puncts-Curve zusammen; [*weil*, *wenn die drei Grössen* $\frac{da}{dx}:\frac{dg}{dx}$, $\frac{db}{dx}:\frac{dg}{dx}$, $\frac{dc}{dx}:\frac{dg}{dx}$ *in beiden Fällen die nemlichen Werthe behalten*, *auch ihre beiden Quotienten* $\frac{db}{dx}:\frac{da}{dx}=\frac{db}{da}$ *und* $\frac{dc}{dx}:\frac{da}{dx}=\frac{dc}{da}$ *die nemlichen sind*] auch ist der Krümmungs-Halbmesser die Tangente selbst, weil sein Endpunct in der Mittel-Puncts-Curve liegt. In diesem Fall haben die obigen Ausdrücke von a. b, c (35. im Anfange des Paragraphs) zu ersten Ableitungen:

$$\frac{da}{dx}=\frac{\left(n\frac{dy}{dx}-m\frac{dz}{dx}\right)\frac{dg}{dx}}{\tau},$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{\left(n - \frac{dz}{dx}\right)\frac{dg}{dx}}{\tau},$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{\left(m - \frac{dy}{dx}\right)\frac{dg}{dx}}{\tau},$$

[*wenn man nemlich a, b, c allein sich verändern lässt*] woraus folgt

$$\left(\frac{da}{dx}\right)^2 + \left(\frac{db}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 \text{ und}$$

$$\frac{dg}{dx} = \sqrt{\left(\left(\frac{da}{dx}\right)^2 + \left(\frac{db}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dx}\right)^2\right)}.$$

[*Denn die Summe der Quadrate der Coefficienten von* $\frac{dg}{dx}$, *in den drei Ausdrücken, ist* $= \tau^2$.]

Nun zeigt diese Gleichung, wie wir weiter unten (37.) sehen werden, dass g dem Curven-Bogen gleich ist, dessen Coordinaten a, b, c sind. Mithin berührt nicht allein der Krümmungs-Halbmesser die Mittelpuncts-Curve, sondern ist ihr zugleich an Länge gleich. Er ist also alsdann nichts anders, als die abgewickelte Mittelpuncts-Curve, welche folglich die Evolute der Curve ist, deren Coordinaten x, y und z sind.

36.

Die oben gefundene Bedingung

$$(y - b)\frac{dm}{dx} + (z - c)\frac{dn}{dx} = 0$$

welche erfüllt werden muss, wenn die gegebene Curve eine Evolute haben soll, findet von selbst Statt, wenn m und n Constanten sind [*denn alsdann ist* $\frac{dm}{dx} = 0$

und $\frac{dn}{dx} = 0$]. In diesem Falle liegt die Curve ganz in der, durch diese Constanten [*m und n*] bestimmten Ebene. Sind diese Grössen [*m und n*] nicht unveränderlich, so bestimmen sie die, die Curve berührende Ebene und wenn die obige Gleichung Statt findet, so bilden die Krümmungs-Halbmesser eine developpable Fläche. Denn, addirt man zu der obigen Gleichung die Gleichung

$$1 + m\frac{dy}{dx} + n\frac{dz}{dx} = 0,$$

welche eine von denen in (34.) ist, so erhält man

$$1 + m\frac{dy}{dx} + n\frac{dz}{dx} + (y-b)\frac{dm}{dx} + (z-c)\frac{dn}{dx} = 0,$$

welche nichts anders als die erste abgeleitete Gleichung der Gleichung der Ebene

$$x - a + m(y-b) + n(z-c) = 0$$

ist, wenn man die Coordinaten a, b, c der Ebene als constant und die Grösse x, welche hier zum Parameter dient, und von welcher die andern Grössen y, z, m, n abhängen, allein als veränderlich betrachtet. Hierin besteht die Eigenschaft developpabler Flächen, wie man weiter unten sehen wird.

Uebrigens giebt es eine allgemeine Art, die Evoluten der Curven zu behandeln, welche darin besteht, dass man den Halbmesser der Evolute in einer gegen die berührende Ebene geneigten Lage annimmt, woraus sich mehrere merkwürdige Eigenschaften der Curven und Flächen finden lassen.

Da die Grenzen dieses Buchs ein mehreres Detail nicht erlauben, so können wir den Leser nur er-

suchen, diese neue Theorie in dem zehnten Bande der Mémoiren der Academie der Wissenschaften weiter nachzulesen.

37.

Wenn man eine Curve doppelter Krümmung auf die Ebene der x, y projicirt, so kann man die Projection als die krummlinige Axe der Curve doppelter Krümmung ansehen, so, dass wenn s der Bogen der Projection ist, deren Coordinaten x und y sind und man sich s in eine grade Linie gelegt vorstellt, s und z die rechtwinkligen Coordinaten der nunmehr auf eine Ebene gebrachten Curve doppelter Krümmung sind.

Diese Ansicht giebt das Mittel an die Hand, die Ausdrücke für Quadratur und Rectification der ebenen Curven (27 und 29.) unmittelbar auf Curven doppelter Krümmung anzuwenden. Man darf zu dem Ende nur in die Ausdrücke $\frac{du}{dw} = y\frac{dx}{dw}$ [28.] und $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}$ s statt x, und z statt y setzen, so erhält man $z\frac{ds}{dw}$ und $\sqrt{\left(\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}$, und da der Bogen s durch die Gleichung $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}$ bestimmt wird, so erhält man, wenn man dieses substituirt:

$$z\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2\right)} \text{ und}$$

$$\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}.$$

Der erste dieser Ausdrücke bedeutet die erste Ableitung der cylindrischen Oberfläche, senkrecht auf der Ebene der x, y, welche die Projection der Curve doppelter Krümmung auf diese Ebene zur Grundlinie und die Curve selbst zur Grenze hat. Der zweite Ausdruck bedeutet die erste Ableitung der Länge der Curve doppelter Krümmung.

Achter Abschnitt.

Von den krummen Flächen und ihren berührenden Ebenen. Theorie der Berührung der krummen Flächen. Von der Berührung der verschiedenen Ordnungen.

38.

Die krummen Flächen werden ebenfalls durch drei rechtwinklige Coordinaten bestimmt, wie die Linien doppelter Krümmung, aber mit dem Unterschiede, dass bei den Flächen zwei Coordinaten von einander unabhängig sind, und die dritte eine Function der beiden ist, so dass eine Fläche durch eine einzige Gleichung zwischen drei Coordinaten ausgedrückt wird. So bezeichnen die beiden Gleichungen, welche eine krumme Linie doppelter Krümmung bestimmen, jede einzeln, eine krumme Fläche und der Durchschnitt dieser beiden Flächen ist die Curve, welche das System jener beiden Gleichungen bezeichnet. Die Theorie der Flächen hängt also von der Rechnung

mit Functionen von zwei unabhängig veränderlichen Grössen ab, kann indessen, wie die Theorie der Curven, und nach den nemlichen Principien behandelt werden. Also, so wie eine grade Linie Tangente einer Curve sein kann, kann eine Ebene eine Fläche berühren und die berührende Ebene lässt sich durch die Bedingung finden, dass durch den Berührungs-Punct keine zweite Ebene zwischen jener und der krummen Fläche darf gezogen werden können.

Die drei Coordinaten einer gegebenen krummen Fläche, sollen x, y, z sein, p, q, r die Coordinaten der berührenden Ebene, auf die nemlichen Axen bezogen, so ist für die Fläche

$$z = fxy,$$

und für die Ebene

$$r = a + bp + cq,$$

wo a, b, c drei Constanten sind, welche die Lage der Ebene bestimmen. [*Diese letzte Gleichung ist nemlich die allgemeine Gleichung der Ebene. Man sehe deshalb die oben angeführten Schriften von Monge, Lacroix, etc.*]

Damit nun die Ebene zunächst einen Punct mit der Fläche gemein habe, muss ihre Gleichung Statt finden, wenn $p = x$, $q = y$, $r = z$ ist, welches die erste Gleichung

$$z = a + bx + cy$$

giebt.

Nun betrachte man einen zweiten, zu den Coordinaten $x + k$, $y + \lambda$ gehörigen Punct der Fläche, so ist die zugehörige senkrechte Ordinate $z = f(x + k, y + \lambda)$. [*Man stellt sich nemlich gewöhnlich die*

Ebene der x, y wagrecht vor; deshalb wird z hier senkrechte Ordinate genannt.] Man setze auch in die Gleichung der Ebene: $p = x + k$ und $q = y + \lambda$, so ist die senkrechte Ordinate r,

$$= a + b(x + k) + c(y + \lambda)$$

und die Entfernung der correspondirenden [*zu den nemlichen Abscissen und Ordinaten* $x + k$ *und* $y + \lambda$ *gehörenden*] Puncte der Fläche und der Ebene ist,

$$f(x + k, y + \lambda) - a - b(x + k) - c(y + \lambda).$$

Die Function $f(x + k, y + \lambda)$ kann, wie in (73. 1ster Theil) entwickelt werden und giebt [*wenn man, der Kürze wegen, statt* fxy *seinen Werth* z *setzt*]

$$z + k\frac{dz}{dx} + \lambda\frac{dz}{dy}$$
$$+ \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + k\lambda\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} \ldots\ldots$$

Also ist die Entfernung der correspondirenden Puncte, welche D heissen soll, weil $f(x, y) = z = a + bx + cy$ war,

$$D = k\left(\frac{dz}{dx} - b\right) + \lambda\left(\frac{dz}{dy} - c\right)$$
$$+ \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + k\lambda\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} \ldots\ldots$$

welche Grösse D, weil k und λ unbestimmt sind, wie man sieht, nur dann so klein ist, als möglich, wenn man die Grössen b und c so annimmt, dass die Coefficienten zu k und λ verschwinden [*aus denselben Gründen, wie oben in ähnlichen Fällen*]. Dieses giebt

$$\frac{dz}{dx} = b,\ \frac{dz}{dy} = c \text{ (77. 1ster Theil.)}$$

und da nun schon $a + bx + cy = z$ ist, so hat man die Werthe der drei Grössen a, b, c in x, y und z, nemlich:

$$b = \frac{dz}{dx},\quad c = \frac{dz}{dy},\quad a = z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy},$$

folglich ist nunmehr die Lage der Ebene [*welche die Fläche in dem, zu den Coordinaten x, y, z gehörenden, Puncte berührt*] vollständig bestimmt.

Da die Glieder, welche die Grössen k und λ enthalten, verschwunden sind, so enthält der Ausdruck für D nur noch Glieder mit Potenzen und Producten von k und λ. Legte man nun durch den Berührungs-Punct noch eine andere Ebene, so würde man für die Entfernung der, zu den nemlichen Coordinaten $x + k$ und $y + \lambda$ gehörenden, Puncte der Fläche und der neuen Ebene, die Δ heissen soll, einen Ausdruck finden, der zwar dem Ausdrucke für D ähnlich ist, in welchem aber die Glieder mit k und λ nicht weggefallen sind. Nun aber kann man die Grössen k und λ allemal so klein annehmen, dass die Glieder, welche die ersten Potenzen derselben enthalten, grösser sind, als die übrigen Glieder mit höheren Potenzen oder Producten dieser Grössen. Also lassen sich k und λ immer so klein annehmen, dass Δ grösser ist als D, so dass es also unmöglich ist, eine zweite Ebene, durch den Berührungs-Punct, zwischen die erste und die Fläche zu legen.

39.

Dieser Schluss, welcher völlig gerechtfertigt ist, so lange die Ausdrücke von D und Δ nur eine bestimmte Zahl von Gliedern haben, könnte einige Schwie-

rigkeit finden, wenn die Zahl der Glieder unbegrenzt ist. Diese Schwierigkeit lässt sich heben, wenn wir die Entwickelung des dreizehnten Abschnitts im ersten Theile anwenden, und bei den Gliedern der ersten Ordnung stehen bleiben. Man erhält alsdann

$$f(x+k, y+\lambda) = fxy + k\frac{dfxy}{dx} + \lambda\frac{dfxy}{dy}$$
$$+ \frac{k^2}{2}\frac{d^2f(x+\mu k, y+\mu\lambda)}{dx^2}$$
$$+ k\lambda\frac{d^2f(x+\mu k, y+\mu\lambda)}{dx\,dy}$$
$$+ \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2f(x+\mu k, y+\mu\lambda)}{dy^2}$$

und der Werth von D reducirt, sich [*wenn die Coefficienten zu k nnd λ verschwinden*] auf die drei letzten Glieder rechterhand.

Für jede andere Ebene, deren Gleichung

$$r = \alpha + \beta p + \gamma q$$

ist und die den nemlichen Punct mit der Fläche gemein hat, würde der Ausdruck der Entfernung D, die jetzt Δ ist, ausser jenen drei Gliedern, auch noch die beiden erster Ordnung

$$k\left(\frac{dfxy}{dx} - \beta\right) + \lambda\left(\frac{dfxy}{dy} - \gamma\right)$$

enthalten, woraus folgt, dass man immer k und λ so klein annehmen kann, dass Δ grösser ist als D. Also ist es unmöglich, dass die zweite Ebene, durch den Berührungs-Punct, zwischen die Fläche und die erste Ebene, deren Gleichung

$$r = a + bp + cq$$

war, hindurch gehen kann; mithin berührt letztere die Ebene allein, wenn man

$$a = z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy},\ b = \frac{dz}{dx} \text{ und } c = \frac{dz}{dy}$$

setzt, woraus folgt, dass die Lage der Ebene von den beiden ersten Ableitungen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ abhängt.

In der That ist es leicht, aus der Gleichung

$$r = a + bp + cq,$$

zu sehen, dass, wenn der Winkel der Neigung der durch diese Gleichung ausgedrückten Ebene gegen die Ebene der pq, α und der Neigungs-Winkel des Durchschnitts der beiden Ebenen gegen die Axe der p, β heisst

$$b = \sin\beta \tang\alpha,\quad c = \cos\beta \tang\alpha$$

ist, woraus folgt

$$\tang\alpha = \sqrt{(b^2 + c^2)} \text{ und } \tang\beta = \frac{b}{c}.$$

[*Denn, BAC Fig. 9., sey die Ebene der p, q, AB die Axe der p, AC die Axe der q, die senkrechte Linie AA' über A die Axe der r, BC der Durchschnitt der Ebene, welche von der Gleichung $r = a + bp + cq$ ausgedrückt wird, mit der Ebene der p, q; so erhält man, wenn man p und $q = 0$ setzt, $r = a = AA'$, wenn man p und r Null setzt, $q = -\frac{a}{c} = AC$, und wenn man q und r Null setzt, $p = -\frac{a}{b} = AB$; also schneidet die schiefe Ebene die Axen in den Entfernungen a, $-\frac{a}{b}$ und $-\frac{a}{c}$ vom Anfangs-Puncte A der Coordinaten. Nun sollte der Winkel CBA, β heissen. Es ist also $\tang\beta = \frac{AC}{AB} = -\frac{a}{c} : -\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Ferner sollte*

der Winkel A'DA, α heissen, wenn AD ein Perpendikel auf BC ist; also ist $tang\,\alpha = \frac{AA'}{AD} = -\frac{a}{AD} = -\frac{a}{AB\,sin\,\beta} = a : \frac{a}{b}\,sin\,\beta = b\,sin\,\beta = b\,cosec\,\beta = b\sqrt{(1 + cot\,\beta^2)} = b\sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)} = \sqrt{(b^2 + c^2)}$, *folglich ist*

$$tang\,\alpha = \sqrt{(b^2 + c^2)} \text{ und } tang\,\beta = \frac{b}{c}.]$$

Da nun die Axen, für die Coordinaten x, y, z und p, q, r, die nemlichen sind, so werden auch die, auf die berührende Ebene sich beziehenden, Winkel α und β ebenfalls durch die Ausdrücke

$$tg\,\alpha = \sqrt{\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)} \text{ und } tg\,\beta = \frac{dz}{dx} : \frac{dz}{dy}$$

bestimmt.

40.

Wenn allgemein

$$z = fxy$$

die Gleichung der gegebenen Fläche und

$$r = Fp, q,$$

die Gleichung einer anderen Fläche ist, so muss erstlich, wenn die beiden Flächen einen Punct gemein haben sollen, die Gleichung $r = Fp, q$ auch für $p = x$, $q = y$, $r = z$ Statt finden, welches

$$z = Fxy$$

giebt. Nimmt man darauf die Puncte der beiden Flächen, welche zu den Coordinaten $x + k$ und $y + \lambda$ gehören und nennt D ihre Entfernung, das heisst, den Theil der zu $x + k$ und $y + \lambda$ gehörigen Ordinate, welcher zwischen den beiden Flächen liegt,

so ist

$$D = f(x+k,\, y+\lambda) - F(x+k,\, y+\lambda).$$

Entwickelt man diesen Ausdruch nach (78. 1. Theil) und bleibt bei den Gliedern erster Ordnung stehen, so erhält man, wenn man, der Kürze wegen, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ statt fxy, $\frac{dfxy}{dx}$ und $\frac{dfxy}{dy}$ schreibt,

$$D = k\left(\frac{dz}{dx} - \frac{dFxy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{dz}{dy} - \frac{dFxy}{dy}\right)$$
$$+ \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2f(x+\mu k,\, y+\mu\lambda)}{dx^2} - \frac{d^2F(x+\mu k,\, y+\mu\lambda)}{dy^2}\right)$$
$$+ k\lambda\left(\frac{d^2f(x+\mu k,\, y+\mu\lambda)}{dx\, dy} - \frac{d^2F(x+\mu k,\, y+\mu\lambda)}{dx\, dy}\right)$$
$$+ \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{d^2f(x+\mu k,\, y+\mu\lambda)}{dy^2} - \frac{d^2F(x+\mu k,\, y+\mu\lambda)}{dy^2}\right)$$

Angenommen, die Glieder mit k und λ verschwinden, welches geschieht, wenn man $\frac{dz}{dx} = \frac{dFxy}{dx}$ und $\frac{dz}{dy} = \frac{dFxy}{dy}$ setzt, so enthält D nur noch Glieder mit höheren Potenzen und Producten von k und λ, und es ist leicht zu sehen, dass man immer k und λ so klein annehmen kann, dass der Werth von D kleiner ist, als der Werth einer ähnlichen Grösse für eine andere gegebene Fläche, für welche die Glieder mit k und λ nicht verschwinden. Enthält also die Gleichung $r = Fpq$ der berührenden Fläche drei willkürliche Constanten a, b, c, und man giebt diesen Constanten solche Werthe, dass

$$z = Fxy,\quad \frac{dz}{dx} = \frac{dFxy}{dx},\quad \frac{dz}{dy} = \frac{dFxy}{dy},$$

so ist es unmöglich, dass eine andere Fläche, welche

nicht den nemlichen Bedingungen genugthut, durch den gemeinschaftlichen Punct der beiden Flächen und zugleich zwischen diese beiden Flächen hindurchgehen kann.

Diese drei Gleichungen sind nichts anders, als die Gleichung der gegebenen Curve selbst, wenn man $p = x$, $q = y$, $r = z$ setzt und die beiden ersten Ableitungen davon nach x und y nimmt. Daraus folgt noch allgemeiner, dass, wenn $Fpqr = u = 0$ die Gleichung der berührenden Fläche ist, die drei obigen Gleichungen in folgenden:

$$u = 0, \quad \frac{d(u)}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d(u)}{dy} = 0$$

enthalten sind. [*Denn, in so fern die unentwickelt gegebene Gleichung* $u = 0$ *das nemliche Verhältniss zwischen* x, y *und* z *giebt, als die vorige entwickelte Gleichung* $z = fxy$, *müssen auch nothwendig die daraus folgenden Werthe von* $\frac{dz}{dx}$ *und* $\frac{dz}{dy}$ *die nemlichen sein.*]

Betrachtet man nun z als Function von x und y, so gehen die Gleichungen in folgende über:

$$u = 0, \quad \frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0.$$

Ist also die Gleichung der gegebenen [*berührten*] Fläche $fxyz = w = 0$, während die Gleichung der berührenden Fläche, die mit jener einen Punct gemein haben soll, $Fxyz = u = 0$ ist, so giebt die erste, wenn man die Ableitungen nach x und y nimmt,

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dw}{dy} + \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0.$$

Schafft man zwischen diesen und den vorigen Gleichungen die Grössen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ weg, so erhält man $\left[\frac{du}{dx}\cdot\frac{dw}{dz}-\frac{dw}{dx}\cdot\frac{du}{dz}=0 \textit{ und } \frac{du}{dy}\cdot\frac{dw}{dz}-\frac{dw}{dy}\cdot\frac{du}{dz}=0, \textit{ also}\right]$

$$\frac{dw}{dx}:\frac{du}{dx}=\frac{dw}{dz}:\frac{du}{dz} \textit{ und}$$

$$\frac{dw}{dy}:\frac{du}{dy}=\frac{dw}{dz}:\frac{du}{dz},$$

woraus folgt, dass die drei Ableitungen $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ sich verhalten, wie $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ [*oder, dass*

$$\frac{dw}{dx}:\frac{du}{dx}=\frac{dw}{dy}:\frac{du}{dy}=\frac{dw}{dz}:\frac{du}{dz}\Big].$$

41.

Entwickelt man von dem allgemeinen Ausdrucke der Entfernung D [40.] die beiden darin vorkommenden Functionen bis zu den Gliedern mit zwei Abmessungen von k und λ, und erwägt, dass die drei obigen Gleichungen $\left[z=Fxy,\ \frac{dz}{dx}=\frac{dFxy}{dx},\ \frac{dz}{dy}=\frac{dFxy}{dy}\right]$ schon Statt finden, so erhält man

$$D=\frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2Fxy}{dx^2}\right)$$
$$+k\lambda\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}-\frac{d^2Fxy}{dx\,dy}\right)$$
$$+\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{d^2Fxy}{dy^2}\right)$$
$$+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3A}{dx^3}+\frac{k^2\lambda}{2}\frac{d^3A}{dx^2\,dy}+\frac{k\lambda^2}{2}\frac{d^3A}{dx\,dy^2}+\frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3A}{dy^3},$$

wenn, der Kürze wegen,

$$\frac{d^3 f(x+\mu k, y+\mu\lambda)}{dx^3} - \frac{d^3 (x+\mu k, y+\mu\lambda)}{dx^3} = \frac{d^3 A}{dx^3}$$

$$\frac{d^3 f(x+\mu k, y+\mu\lambda)}{dx^2\, dy} - \frac{d^3 (x+\mu k, y+\mu\lambda)}{dx^2\, dy} = \frac{d^3 A}{dx^2\, dy}$$

u. s. w. gesetzt wird.

Ist also die berührende Fläche $r = Fpq$ von der Art, dass den drei Gleichungen

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 Fxy}{dx^2}, \quad \frac{d^2 z}{dx\, dy} = \frac{d^2 Fxy}{dx\, dy}, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d^2 Fxy}{dy^2}$$

Genüge geschehen kann, so verschwinden in dem Ausdruck von $\grave{D}$ auch die Glieder zweiter Ordnung und die Grössen k und λ können, wie leicht zu sehen, so klein angenommen werden, dass die Entfernung D kleiner als die ähnliche Δ für jede andere berührende Fläche ist, die nicht ebenfalls den nemlichen Bedingungen ein Genüge thut; woraus folgt, dass der Durchgang dieser dritten Fläche zwischen der Fläche, deren Gleichung $r = Fpq$, und der anderen, deren Gleichung $z = fxy$, unmöglich ist u. s. w.

Drückt allgemein $Fpqr = 0$ die Gleichung der berührenden Fläche aus, die einen Punct mit der andern Fläche, deren Coordinaten x, y, z sind, gemein haben soll, so sind die drei obigen Gleichungen in folgenden enthalten

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 u}{dx\, dy} = 0 \text{ und } \frac{d^2 u}{dy^2} = 0,$$

wenn man z als Function von x und y betrachtet u. s. w.

Die obige Theorie der Berührung der Curven in den verschiedenen Ordnungen lässt sich also auch auf Flächen ausdehnen und man erhält ähnliche Resultate.

sultate. Für die Berührung erster Ordnung müssen, die Gleichung

$$Fxyz = u = 0,$$

und ihre Ableitungen nach x und y erster Ordnung, erfüllt werden, für die Berührung zweiter Ordnung, ausser diesen drei Gleichungen, noch die drei Ableitungs-Gleichungen von $u = 0$, zweiter Ordnung, nach x und y u. s. w.

42.

Die berührende Fläche sey eine Kugelfläche, deren allgemeinste Gleichung

$$(p-a)^2 + (q-b)^2 + (r-c)^2 = g^2$$

ist, wenn p, q, r die Coordinaten eines beliebigen Puncts der Fläche, a, b, c die Coordinaten des Mittel-Puncts der Kugel und g den Halbmesser bedeuten.

Setzt man in diese Gleichung $p = x$, $q = y$, $r = z$ und nimmt die beiden nach x und y abgeleiteten Gleichungen, so erhält man die drei Gleichungen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = g^2$$

$$x - a + (z-c)\frac{dz}{dx} = 0$$

$$y - b + (z-c)\frac{dz}{dy} = 0,$$

woraus sich die drei Constanten a, b, c finden lassen, nemlich

$$a = x + \frac{g\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}},$$

$$b = y + \frac{g\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}},$$

$$c = z - \frac{g}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}},$$

in welchen aber der Halbmesser g noch willkürlich ist. [*Man kann sich, anstatt die Entwickelung der drei Grössen a, b, c zu wiederholen, von der Richtigkeit der Ausdrücke derselben leichter dadurch überzeugen, dass man die aus denselben folgenden Werthe von $x-a$, $y-b$, $z-c$ in die drei Gleichungen setzt, aus welchen sie gefunden werden. Diesen drei Gleichungen wird dadurch, wie leicht zu sehen, ein Genüge gethan.*]

Die hierdurch bestimmte Kugel berührt also die gegebene krumme Fläche. Ihr Halbmesser steht folglich auf der Kugelfläche senkrecht. Betrachtet man daher den Halbmesser als die unbestimmte Grösse, so sind a, b, c die Coordinaten eines Perpendikels auf die Fläche, g ist veränderlich, und x, y und z sind Constanten.

43.

Soll die Kugel die gegebene krumme Fläche in der zweiten Ordnung berühren, so hat man noch andere drei Gleichungen, nemlich die zweiten Ableitungen der obigen Gleichungen [$(x-a)^2 + (y+b)^2 + (z-c)^2 = g^2$]. Da aber nur noch eine willkürliche Grösse g übrig ist, so lässt sich allen diesen Gleichungen nicht Genüge thun. Mithin ist nicht für jeden beliebigen Punct einer krummen Fläche eine Berührungs-Kugel möglich, auf die Weise, wie überall ein Berührungs-Kreis für eine Curve möglich ist.

Wollte man statt einer Kugel, eine durch die

Umdrehung eines Kreis-Bogens um seine Sehne entstehende Fläche nehmen, so würden sich, weil in der Gleichung dieser Fläche sechs Constanten vorkommen, diese sämmtlichen Elemente so bestimmen lassen, dass überall eine Berührung zweiter Ordnung mit der gegebenen Fläche Statt findet. Eben so würde es sich mit jeder anderen Fläche verhalten, deren Gleichung mindestens sechs Constanten enthält.

Neunter Abschnitt.

Von den Berührungs-Kugeln. Von den Linien der grössten und kleinsten Krümmung. Eigenschaften dieser Linien.

44.

Wie wir oben sahen, giebt es unter allen berührenden Kugeln keine, welche eine wahre Berührungs-Kugel ist [*das heisst: eine Kugel, die die Fläche in der zweiten Ordnung berührt*]. Dagegen lässt sich allemal eine Kugel angeben, welche eine beliebige auf die Fläche gezogene Curve in der zweiten Ordnung berührt. Zu dem Ende darf man nur y als Function von x betrachten, wie bei den Curven doppelter Krümmung, und hiernach die erste und zweite Ableitung der Gleichung der Kugel $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$ nehmen. [*Denn, ist von einer auf die gegebene Fläche gezogenen Curve die Rede, so muss, ausser der Gleichung der Flä-*

che $u = fxyz = 0$, nothwendig noch eine zweite Gleichung zwischen x, y und z gegeben sein, damit beide, verbunden, die Curve bestimmen. Dadurch aber werden y und z, jedes einzeln, von x abhängig]. Die erste Ableitung giebt [*weil jetzt y von x und folglich auch z, durch y, von x abhängt*]

$$x - a + (y + b)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right)(z - c) = 0,$$

$\left[\textit{nemlich } \frac{d(z)}{dx} \textit{ ist gleich } \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right]$, wo immer z als Function von x und y betrachtet wird, welches die Ableitungen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ giebt, darauf aber y als Function von x, welches die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ giebt. Auf dieselbe Weise findet man durch die zweite Ableitung

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - b)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+ (z - c)\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Die erste Gleichung wird erfüllt durch die beiden ersten Gleichungen in (42.)

$$x - a + (z - c)\frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } y - b + (z - c)\frac{dz}{dy} = 0$$

[*wie es auch sein muss, weil eine Berührung in der ersten Ordnung immer Statt findet.*]

Also darf nur noch der zweiten Gleichung Genüge geschehen, welche sich, wegen $(y - b) + (z - c)\frac{dz}{dy}$

$=0$, auf folgende reducirt:

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+\left(\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{d^2z}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)(z-c)=0$$

[*weil das dritte und letzte Glied zusammen Null sind*]. Substituirt man in diese Gleichung den obigen Werth von $z-c$ $\left[=-\frac{g}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}\right]$ (42.), so lässt sich daraus der Werth von g finden, nemlich:

$$g=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)^2\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}{\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{d^2z}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Nachdem auf diese Weise der Halbmesser g der Krümmungs-Kugel gefunden worden, erhält man durch den Ausdruck (42.) die Werthe der Coordinaten a, b, c des Mittel-Puncts. [*Es wird hier eine Kugel gefunden, welche die gegebene Fläche selbst, in der ersten Ordnung, und zugleich die auf dieselbe gezogene Curve in der zweiten Ordnung berührt. Für die Fläche giebt es, zu ihrer Gleichung, zwei Gleichungen erster, und drei Gleichungen zweiter Ordnung. Zur Bestimmung der Kugel aber gehören nur vier Grössen, nemlich die drei Coordinaten des Mittel-Puncts a, b, c und der Halbmesser g; also ist nicht für jeden Punct der Fläche eine Kugel möglich, welche sie in der zweiten Ordnung berührt. Hingegen, wenn man die beiden Gleichungen der auf die gegebene Fläche gezogenen Curve combinirt, so entsteht eine einzelne Gleichung, in welcher y und z von x ab-*

hangen und die also in jeder Ordnung nur eine abgeleitete Gleichung hat. Nachdem also alle die Kugeln bestimmt worden, welche die gegebene Fläche in der ersten Ordnung berühren, kann man unter denselben diejenige, welche die Curve in der zweiten Ordnung berührt, dadurch finden, dass man sie jener einen abgeleiteten Gleichung zweiter Ordnung entsprechen lässt.]

45.

Da die, in dem obigen Ausdrucke vorkommende, Grösse $\frac{dy}{dx}$ von der Projection der in der Fläche gezogenen Curve auf die Ebene der x, y, abhängt, so kann man, weil die Fläche in der Curve willkürlich ist, diejenige suchen, deren Krümmungs-Halbmesser g ein Maximum oder Minimum ist. Zu dem Ende darf man nur die Ableitung von g, nach $\frac{dy}{dx}$ genommen, Null setzen (26.) Um aber die Rechnung abzukürzen, erwäge man, dass, weil

$$g = (z-c)\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$$

ist (42.), das Maximum oder Minimum von g, nach $\frac{dy}{dx}$, von dem Maximo oder Minimo von c abhängt [*weil in dem Ausdrucke von g die Grösse $\frac{dy}{dx}$ nicht anders als in c vorkommt und also die übrigen Grössen als Constanten betrachtet werden können*]. Man darf daher nur die erste Ableitung der obigen Gleichung zwischen c und $\frac{dy}{dx}$

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)(z-c)=o,\ 44.\right]$$

auf die Weise nehmen, dass man $\frac{dy}{dx}$ allein als veränderlich betrachtet. Dieses giebt

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dy}+\left(\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)(z-c)=o,$$

welches mit der vorigen [*ihrer Stammgleichung*] verbunden werden muss.

Multiplicirt man die gefundene Gleichung mit $\frac{dy}{dx}$ und zieht sie von der vorigen [*der Stammgleichung*] ab, so erhält man

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{dx}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)(z-c)=o,$$

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \qquad -\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\left(\qquad\frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{dx}\right.$$
$$\left.+\frac{d^2z}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)(z-c)=o,$$

also] die einfachere Gleichung

$$1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{dx}\right)(z-c)=o$$

welche mit der vorigen [*der abgeleiteten*] zu verbinden ist.

Eliminirt man $z-c$, so erhält man

$$\left[\frac{\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dy}}{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}}=\frac{\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx}}\right.$$

oder

$$\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx^2}+\left(\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$+\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dx\,dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=$$

$$\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dx\,dy}+\left(\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dy^2}\right.$$

$$\left.+\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

also,] wenn

$$\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dx\,dy}-\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dy^2}=A$$

$$\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dx^2}-\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dy^2}=-B$$

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}-\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dx\,dy}=-C$$

gesetzt wird, eine Gleichung von der Form

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-B\frac{dy}{dx}-C=0,$$

welche, wenn man sie auflöset, $\left[\frac{dy}{dx}=-\frac{B}{2A}\right.$ $\left.\pm\sqrt{\left(\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C}{A}\right)}\right.$, *oder*]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A}$$

giebt. Diese Gleichung ist von der ersten Ordnung in x, y und $\frac{dy}{dx}$, weil z, nach der Natur der Fläche, eine gegebene Function von x und y ist. Die Grössen A, B und C sind also auch gegebene Functionen von x und y. Folglich wird die Stammgleichung der ge-

fundenen Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ eine willkürliche Constante enthalten; mithin drückt sie unendlich viele Curven aus, welche von den Linien der grössten und kleinsten Krümmung in der gegebenen Fläche, die Projectionen sind.

Verbindet man die beiden obigen Gleichungen

$$\left[\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dy} + \left(\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dx}\right)(z-c) = 0\right.$$

und

$$\left.1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dy}{dx}\right)(z-c) = 0,\right]$$

auf die Weise, dass man die Glieder $\left[\frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dx}(z-c)\right.$ *und* $\left.\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{dy}{dx}(z-c)\right]$, welche $\frac{dy}{dx}$ und $z-c$ zugleich enthalten, wegschafft, so erhält man

$$z-c = \frac{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx\,dy} - A\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2}}.$$

Substituirt man hierin den obigen Werth von $\frac{dy}{dx}$ und setzt

$$2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx\,dy} - \left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dy^2} - \left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\frac{d^2z}{dx^2} = E,$$

so erhält man

$$z-c = \frac{E \pm \sqrt{(B^2+4AC)}}{2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2\right)}$$

und hieraus [*in* 42.]

$$g = \frac{E \pm \sqrt{(B^2+4AC)}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}{2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2\right)}.$$

[*Da alle zu diesen Resultaten nötigen Zwischenrechnungen weiter keine Schwierigkeit als die Weitläuftigkeit haben, so scheint es billig, den Raum derselben zu ersparen.*]

Die beiden Werthe des Wurzelzeichens geben, der eine das Maximum, der andere das Minimum von g.

Für jeden Punct der krummen Fläche giebt es also zwei Curven-Zweige, welche sich schneiden und von welchen der eine zu einer Curve grösster, der andere zu einer Curve kleinster Krümmung gehört. Der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, hängt von dem zwiefachen Werthe der Grösse $\frac{dy}{dx}$ ab, welche die trigonometrische Tangente des Winkels ausdrückt, den die Tangente der Projection der Curve auf die Ebene der x, y, mit der Axe der x macht. Da diese Ebene willkürlich ist, so kann man sie so annehmen, dass sie in die Ebene fällt, welche die krumme Fläche berührt. Dann ist die Projection der Curve die Curve selbst und die beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ sind die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Tangenten der beiden Curven-Zweige der grössten und kleinsten Krümmung mit einer und derselben graden Linie machen. Der Unterschied dieser Winkel also ist dann der gesuchte Winkel, unter welchem die Curven-Zweige sich schneiden. Heissen also die beiden Werthe von y, α und β, so ist die Tangente dieses Winkels, nach bekannten trigonometrischen Formeln,

$$\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}=\frac{\sqrt{(B^2+4AC)}}{A-C}.$$

[*Nemlich, wenn die beiden Winkel, welche die Curven-Zweige mit einer festen Linie machen,* φ *und* Ψ *heissen, so ist der Winkel der Curven unter sich* $\varphi-\Psi$. *Nun ist* $tang(\varphi-\Psi)=\frac{tang\,\varphi-tang\,\Psi}{1+tang\,\varphi\; tang\,\Psi}$ *und die beiden Werthe von* $\frac{dy}{dx}$, *nemlich*

$$\frac{B+\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A} \text{ und } \frac{B-\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A} \text{ sind}$$

tang φ *und tang* Ψ; *also ist* $tang(\varphi-\Psi)=$

$$\frac{tg\,\varphi-tg\,\Psi}{1+tg\,\varphi\; tg\,\Psi}=\frac{2\sqrt{(B^2+4AC)}:2A}{1+\frac{B^2-B^2-4AC}{4A^2}}=\frac{\sqrt{(B^2+4AC)}}{A-C}.]$$

Nun ist aus (38.) leicht zu sehen, dass, wenn die, eine krumme Fläche berührende Ebene, mit der Ebene der x, y zusammenfallen soll, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ Null sein müssen. Setzt man in die obigen Ausdrücke von A, B und C, $\frac{dz}{dx}=0$ und $\frac{dz}{dy}=0$, so erhält man

$$A=\frac{d^2z}{dx\,dy},\; B=\frac{d^2z}{dy^2}-\frac{d^2z}{dx^2},\; C=\frac{d^2z}{dx\,dy},$$

welches

$$A-C=0$$

giebt. Also ist die Tangente des Winkels, unter welchem sich die Curven schneiden, unendlich gross, folglich ist dieser Winkel ein rechter. Woraus ganz allgemein folgt: dass sich die Curven der grössten und kleinsten Krümmung, auf jeder beliebigen krummen Fläche, immer unter rechten Winkeln schneiden.

46.

Die Eigenschaft des Maximi und Minimi ist nicht die einzige, die diesen Linien zukommt. Auch ihre Evoluten haben besondere Eigenschaften. Denn, sucht man die Bedingungen, unter welchen der Krümmungs-Halbmesser überall die Mittel-Puncts-Curve berührt, so sieht man, auf eine ähnliche Weise, wie in (35.), wenn man die dortigen Betrachtungen auf die Ausdrücke der hiesigen Coordinaten der Mittel-Puncts-Curve a, b, c (42.) anwendet, leicht, dass jene Bedingungen darin bestehen, dass die Werthe der ersten Ableitung von a, b und c die nemlichen sein müssen, die Grösse g mag allein veränderlich sein, [*das heisst*, a, b, c *mögen die Coordinaten des Krümmungs-Halbmessers bezeichnen*], oder x, y, z mögen sich mit g zugleich verändern [*in welchem Falle* a, b, c *die Coordinaten der Mittel-Puncts-Curve sind*]. Nimmt man also die ersten Ableitungen der drei Gleichungen (42.)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = g^2$$

$$x-a + (z-c)\frac{dz}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$y-b + (z-c)\frac{dz}{dy} = 0 \quad (42.)$$

aus welchen a, b, c gefunden wurden, so muss der, von der Veränderung von x, y und z allein herrührende Theil, Null sein. Nun machen aber die zweite und dritte Gleichung zusammen diesen Theil in der ersten Ableitung der ersten Gleichung aus; also ist dieser Theil von selbst Null. Es ist daher genug, wenn man nur von den Gleichungen

$$(x-a)+(z-c)\frac{dz}{dx}=0 \text{ und } y-b+(z-c)\frac{dz}{dy}=0,$$

die ersten Ableitungen für dem Fall nimmt, dass a, b, c Constanten sind. Dieses giebt, wenn man, wie oben (44.) y als Function von x, und z als Function von x und y betrachtet,

$$1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{dx}\right)(z-c)=0$$

und

$$\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dx}\right)(z-c)=0.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit denen im vorigen Artikel, welche das Maximum und Minimum für g bestimmen, so findet sich, dass sie identisch die nemlichen sind, woraus folgt, dass die Curven, deren Krümmungs-Halbmesser die Mittel-Puncts-Curve berühren, keine anderen sind, als die Curven der grössten und kleinsten Krümmung selbst.

Nun geben ferner die Ausdrücke von a, b, c, in (42.), wenn man blos g sich verändern lässt,

$$\frac{da}{dx}=\frac{\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dg}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}},$$

$$\frac{db}{dx}=\frac{\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dg}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}},$$

$$\frac{dc}{dx}=-\frac{\frac{dg}{dx}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}},$$

woraus folgt:

$$\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\left(\frac{dc}{dx}\right)^2=\left(\frac{dg}{dx}\right)^2,$$

mithin

$$\frac{dg}{dx}=\sqrt{\left(\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\left(\frac{dc}{dx}\right)^2\right)}.$$

Die Grösse g ist also zufolge (37.), dem Bogen der Curve gleich, dessen Coordinaten a, b, c sind. Die [*Mittels-Puncts*-] Curve ist also die wahre Evolute der Curve grösster oder kleinster Krümmung in der krummen Fläche, und umgekehrt sind auf einer beliebigen krummen Fläche diese Curven grösster und kleinster Krümmung die einzigen, welche eine, durch die Krümmungs-Halbmesser entstehende Evolute haben.

Diese Eigenschaften der krummen Flächen, sind sehr merkwürdig und verdienen die Aufmerksamkeit der Geometer. Sie eignen sich besonders zu Anwendungen in der Technik. Man sehe die Berliner Mémoiren vom Jahre 1760, und den 9ten und 10ten Band der Mémoiren der Academie der Wissenschaften zu Paris, desgleichen die Anwendung der Analysis auf die Geometrie von Monge.

Zehnter Abschnitt.

Auflösung einiger Aufgaben, bei welchen bestimmte Verhältnisse zwischen den Elementen der Berührung krummer Flächen in der ersten Ordnung gegeben sind. Zeichnung der Auflösungen. Gleichung developpabler Flächen.

47.

Es lassen sich über die verschiedenen Berührungen der krummen Flächen ähnliche Aufgaben machen, wie diejenigen von den krummen Linien in der Ebene (im 3ten Abschnitt). Die Auflösung ist der, jener Aufgaben ähnlich. Wir wollen bei der Berührung erster Ordnung stehen bleibeu.

Damit die, durch die Gleichung $F(pqr)=0$ ausgedrückte, Fläche eine andere Fläche, deren Coordinaten x, y, z sind, in der ersten Ordnung berühre, müssen, nach (41.), wenn die Gleichung $w=0$ drei Constanten a, b, c enthält, diese Constanten aus den drei Gleichungen

$$F(xyz)=w=0,\quad \frac{d(w)}{dx}=0 \text{ und } \frac{d(w)}{dy}=0,$$

von welchen die beiden letzten

$$\frac{dw}{dx}+\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0 \text{ und } \frac{dw}{dy}+\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}=0$$

sind, entwickelt werden.

Soll also z. B. die Fläche gefunden werden, für welche die drei Elemente der Berührung a, b, c unter einander in einem gegebenen Verhältniss ste-

hen, so muss man in die Gleichung, welche dieses Verhältniss ausdrückt, die [*aus den obigen drei Gleichungen genommenen*] Werthe von a, b, c setzen. Enthält die [*Bedingungs-*] Gleichung [*zwischen a, b, c*] die Grössen a, b, c und x, y, z, so bekommt man eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen x, y, z, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, welche, nach der allgemeinen Methode von (92. im 1sten Theil) behandelt werden kann.

Enthält man dagegen die [*Bedingungs-*] Gleichung [*zwischen a, b, c*] nur die drei Grössen a, b, c [*allein, ohne x, y, z etc.*] so ist die Auflösung viel einfacher. Denn man kann alsdann a, b, c als constant betrachten [*weil sie durch die Bedingungs-Gleichung weiter nicht von x, y, z etc. abhängen*]. In diesem Fall ist

$$F(x, y, z) = 0$$

die Stammgleichung zu der, durch die Bedingungen der Aufgabe gegebenen, Ableitungs-Gleichung erster Ordnung, wenn man darin den Werth der einen von den drei Constanten a, b, c, aus der gegebenen [*Bedingungs-*] Gleichung setzt. [*Nemlich, wenn man a, b, c aus den drei Gleichungen $w = 0$, $\frac{dw}{dx} = 0$, $\frac{dw}{dy} = 0$ nimmt und in die Bedingungs-Gleichung zwischen a, b, c setzt, so entsteht eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung zwischen x, y, z, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$. Von dieser ist, umgekehrt, wie leicht zu sehen, $w = 0$ die Stammgleichung, wenn man darin die durch die Bedingungs-Gleichung*]

chung

chung vorgeschriebene Abhängigkeit der Grössen a, b, c dadurch berücksichtigt, dass man den Werth einer derselben aus der zwischen ihnen gegebenen Bedingungs-Gleichung nimmt und in $w = 0$ *setzt.*] Man erhält also eine Stammgleichung, die zwar nur particulair ist, aus welcher aber, weil sie zwei Constanten enthält, nach (83. im 1sten Theil), die allgemeine Stammgleichung, welche die vollständige Auflösung der Aufgabe enthält, gefunden werden kann.

Nach (83. 1ster Theil), kann man nemlich $b = \varphi a$ setzen, wo a und b zwei willkürliche Constanten sind, und a vermittelst der Gleichung $F(x, y, z) = w = 0$ und ihrer ersten Ableitung nach a, nemlich

$$\frac{dw}{da} + \frac{dw}{db} \cdot \frac{db}{da} = 0$$

eliminiren.

48.

Um zu sehen, wie das System dieser beiden Gleichungen die Aufgabe erfüllt, erwäge man zuerst, dass die Gleichung $F(x, y, z) = w = 0$ die gegebene Fläche ausdrückt, welche die zweite Fläche in der ersten Ordnung berührt. Diese Gleichung löset also die Aufgabe auf, was auch die willkürlichen Constanten a und b sein mögen. Aber, da die von der Aufgabe vorgeschriebene Berührung erster Ordnung nichts weiter verlangt, als, dass die Werthe von z und dessen beiden Ableitungen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ für beide Flächen die nemlichen sind, so folgt, dass die Berührung auch noch Statt findet, wenn a und b veränderlich sind, in so fern nur jene Ableitungen $\left[\frac{dz}{dx} \text{ und } \frac{dz}{dy}\right]$

die nemlichen bleiben. Dieses aber ist wirklich bei dem System der beiden Gleichungen der Fall, wie man sich aus (83. 1ster Theil) überzeugen kann.

Man erwäge ferner, dass die durch das System der beiden Gleichungen ausgedrückte Fläche keine andere ist, als diejenige, welche durch die, auf einander folgenden Durchschnitte der verschiedenen Flächen, entsteht, die durch die Gleichung $F(x, y, z) = o$, ausgedrückt werden, wenn man darin den Parameter a sich verändern lässt, so dass diese neue Fläche alle jene verschiedenen Flächen berührt, oder umfängt. Denn, wenn man, was angeht, die umfangende Fläche durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = w = o$$

bezeichnet, wo nun a veränderlich ist, und sucht diese Grösse dadurch zu bestimmen, dass man die Fläche, der Reihe nach, alle die gegebenen Flächen berühren lässt, so muss man der Gleichung

$$\frac{dw}{da} + \frac{dw}{db} \cdot \frac{db}{da} = o$$

genug thun, damit die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ die nemlichen sind, wie für die umfangenen Flächen. Dieses entspricht dem, was oben in (19.) für die Curven gefunden wurde.

49.

Da die Gleichung $F(x, y, z) = w = o$ drei willkürliche Constanten a, b, c enthält, welche durch Verbindung der Gleichung mit den beiden davon nach x und y abgeleiteten Gleichungen so bestimmt werden müssen, dass man a, b, c wirklich als Con-

stanten betrachtet (47.), so ist klar, dass man, wenn man nun a, b, c abhängig von x und y sein lässt, noch zwei Ableitungen der nemlichen Gleichung nach x und y [*in Hinsicht auf* a, b, c] erhält, nemlich die beiden Gleichungen

$$\frac{dw}{da}\cdot\frac{da}{dx}+\frac{dw}{db}\cdot\frac{db}{dx}+\frac{dw}{dc}\cdot\frac{dc}{dx}=0 \text{ und}$$

$$\frac{dw}{da}\cdot\frac{da}{dy}+\frac{dw}{db}\cdot\frac{db}{dy}+\frac{dw}{dc}\cdot\frac{dc}{dy}=0.$$

Es sey

$$c=f(a,b)$$

die Gleichung, welche das zwischen a, b, c gegebene Verhältniss ausdrückt, so erhält man, wenn man auch hiervon die ersten Ableitungen nimmt,

$$\frac{dc}{dx}=\frac{dc}{da}\cdot\frac{da}{dx}+\frac{dc}{db}\cdot\frac{db}{dx}$$

$$\frac{dc}{dy}=\frac{dc}{da}\cdot\frac{da}{dy}+\frac{dc}{db}\cdot\frac{db}{dx}.$$

Setzt man diese Werthe von $\frac{dc}{dx}$ und $\frac{dc}{dy}$ in die beiden vorigen Gleichungen, so erhält man

$$\frac{da}{dx}\left(\frac{dw}{da}+\frac{dw}{dc}\cdot\frac{dc}{da}\right)+\frac{db}{dx}\left(\frac{dw}{db}+\frac{dw}{dc}\cdot\frac{dc}{db}\right)=0,$$

$$\frac{da}{dy}\left(\frac{dw}{da}+\frac{dw}{dc}\cdot\frac{dc}{da}\right)+\frac{db}{dy}\left(\frac{dw}{db}+\frac{dw}{dc}\cdot\frac{dc}{db}\right)=0,$$

woraus folgt: $\left[\frac{da}{dx}:\frac{da}{dy}=\frac{db}{dx}:\frac{db}{dy}, \textit{ oder}\right]$

$$\frac{da}{dx}\cdot\frac{db}{dy}-\frac{db}{dx}\cdot\frac{da}{dy}=0,$$

worin die durch f angedeutete Abhängigkeit [*oder* c] nicht mehr vorkommt.

Substituirt man also in diese Gleichung $\frac{da}{dx} \cdot \frac{db}{dy} - \frac{db}{dx} \cdot \frac{da}{dy} = o$, die Werthe von a und b in x, y, z, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, so erhält man eine Ableitungs-Gleichung der zweiten Ordnung [*weil auch die Ableitungen von a, b, also von* $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, *folglich Grössen wie* $\frac{d^2 z}{dx}$, $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ *etc. vorkommen*], deren Stammgleichung erster Ordnung

$$c = f(a, b)$$

ist, wo die durch f bezeichnete Abhängigkeits-Form willkürlich ist [*weil sie in der Ableitungs-Gleichung gar nicht vorkommt*]. Die Stammgleichung dieser Ableitungs-Gleichung erster Ordnung [$c = f(a, b)$], ist das System der Gleichung $F(xyz) = w = o$ und ihrer Ableitung nach a, nachdem darin $f(a, b)$ statt c, oder φa statt b gesetzt worden, wo fa die zweite willkürliche Function ist. Es lässt sich also auf diese Weise die Stammgleichung jeder Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung finden, die auf die Form

$$\frac{da}{dx} \cdot \frac{db}{dy} - \frac{db}{dx} \cdot \frac{da}{dy} = o,$$

gebracht werden kann, wenn die Grössen a, b aus irgend einer Gleichung

$$F(x, y, z, a, b, c) = o,$$

zwischen den Grössen x, y, z, a, b, c und aus den beiden davon, in der Voraussetzung dass a, b, c Constanten sind, abgeleiteten Gleichungen hergenommen werden. Dieser Satz ist, für die Zurückleitungs-Rech-

nung zweier veränderlichen Grössen [*der Integration partieller Differential-Gleichungen mit zwei veränderlichen Grössen*] wichtig.

50.

Wir wollen diese Theorie auf die Tangenten anwenden. Wir fanden oben, dass die Elemente a, b, c der Berührung, einer durch die Gleichung

$$r = a + bp + cq$$

ausgedrückten Ebene [*mit einer Fläche, deren Coordinaten x, y, z sind*] durch

$$a = z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy},\ b = \frac{dz}{dx} \text{ und } c = \frac{dz}{dy}$$

bezeichnet werden.

Hat man also irgend eine Gleichung zwischen diesen drei Grössen, welche z. B.

$$c = f(a, b)$$

giebt, so ist die Stammgleichung dieser Ableitungs-Gleichung erster Ordnung in dem System der beiden Gleichungen

$$z = a + x\varphi a + yf(a\varphi a) \text{ und}$$

$$1 + x\frac{d\varphi a}{da} + y\frac{df(a\varphi a)}{da} = 0,$$

enthalten. [*Die erste dieser Gleichungen ist die Gleichung der berührenden Ebene selbst: $r = a + bp + cq$, wenn man darin $p = x$, $q = y$, $r = z$ setzt, damit die Ebene mit der gegebenen Fläche einen Punct gemein habe; dann aber für b, φa, und für c, das gegebene fa, b oder $f(a\varphi a)$ schreibt. Die zweite Gleichung ist die Ableitung der ersten nach a.*] Zwischen diesen beiden Gleichungen muss

a eliminirt werden, um eine Gleichung zwischen x, y und z zu erhalten. Die Function φa ist willkürlich.

Die entstehende Gleichung wird also die Gleichung der Fläche sein, die von den auf einander folgenden Durchschnitten aller, durch die Gleichung

$$z = a + x\varphi a + yf(a\varphi a)$$

ausgedrückten, Ebenen gebildet wird, wenn man den Parameter a sich verändern lässt. Diese Fläche ist folglich eine developpable, weil eine und dieselbe berührende Ebene sich, wie leicht zu sehen, wenn man sie sich als biegsam und unausdehnbar betrachtet, ohne Falten und Bruch, auf die Fläche legt und biegt, umgekehrt aber die Fläche sich auf die Ebene legt und ohne Falten und Bruch entwickelt.

Da $a = z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy}$ und $b = \frac{dz}{dx}$, so erhält man

$$\left[\frac{da}{dx} = \frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dx} - x\frac{d^2z}{dx^2} - y\frac{d^2z}{dx\,dy}\right.$$

$$\left.\frac{da}{dy} = \frac{dz}{dy} - x\frac{d^2z}{dx\,dy} - \frac{dz}{dy} - y\frac{d^2z}{dy^2},\ oder\right]$$

$$\frac{da}{dx} = -x\frac{d^2z}{dx^2} - y\frac{d^2z}{dx\,dy}$$

$$\frac{da}{dy} = -x\frac{d^2z}{dx\,dy} - y\frac{d^2z}{dy^2}$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2}$$

$$\frac{db}{dy} = \frac{d^2z}{dx\,dy}.$$

Also giebt die Gleichung $\frac{da}{dx}\cdot\frac{db}{dy} - \frac{da}{dy}\cdot\frac{db}{dx} = 0$ (49.)

$$\left[-x\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy}-y\frac{d^2z}{dx\,dy}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy}+x\frac{d^2z}{dx\,dy}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right.$$
$$\left.+y\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{d^2z}{dx^2},\ \textit{oder}\right]$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2-\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}=0.$$

Dieses ist die allgemeine Gleichung developpabler Flächen, deren Stammgleichung folglich in dem System der beiden Gleichungen

$$z=a+x\varphi a+yfa \text{ und}$$

$$1+\frac{a\,d\varphi a}{da}+y\frac{dfa}{da}=0$$

enthalten ist, wo φa und fa zwei willkürliche Functionen von a bedeuten. Man sehe den 10ten Band der novi comment: von Petersburg] und die am Ende des vorigen Abschnitts citirten Schriften. [*Man sehe auch die 20. Vorlesung im zweiten Bande, der gegenwärtigen Ausgabe von Lagrange's Werken.*]

Eilfter Abschnitt.

Von den grössten und kleinsten Werthen der Ordinaten krummer Flächen. Allgemeine Auflösung der Aufgabe de maximis et minimis. Mittel, die Maxima und Minima der Functionen mehrerer veränderlichen Grössen zu unterscheiden.

51.

Wenn man die grössten und kleinsten Ordinaten einer gegebenen krummen Fläche sucht, so ist leicht zu sehen, dass sie nur da Statt finden können, wo die, die Fläche berührende Ebene mit der Ebene der x, y parallel ist. Es tst also für dieselbe $tang\,\alpha = 0$ (39.) [*α war der Winkel, welchen die berührende Ebene mit der Ebene der x, y macht*], folglich ist

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = 0.$$

[*denn es ist zufolge* (39.) $tang\,\alpha = \sqrt{\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$.] Dieses kann nur Statt finden, wenn $\frac{dz}{dx} = 0$ und $\frac{dz}{dy} = 0$, [*weil* $\frac{dz}{dx}$ *und* $\frac{dz}{dy}$ *von einander unabhängig sind,*] welches also die Bedingungen sind, unter welchen die Ordinate z ein Maximum oder Minimum ist.

Da nun z jede beliebige Function von x und y ausdrücken kann, so folgt allgemein, dass, wenn eine Function zweier veränderlichen Grössen ein Maximum

oder Minimum sein soll, ihre Ableitungen nach den Grössen, von welchen sie abhängt, einzeln Null sein müssen.

Man kann Dieses auch unmittelbar aus der Betrachtung der Functionen einer veränderlichen Grösse nach (24.) nebst den, für das Maximum oder Minimum nothwendigen, Bedingungen finden. Denn es sey z eine Function von x und y, so kann man x als gegeben betrachten und das relative Maximum oder Minimum von z nach y suchen. Dieses giebt die Gleichung $\frac{dz}{dy} = 0$, und sodann $\frac{d^2z}{dy^2} < 0$, für das Maximum, und $\frac{d^2z}{dy^2} > 0$ für das Minimum. Setzt man also in z den aus der Gleichung $\frac{dz}{dy}$ folgenden Werth von y, so ist z blos Function von x und schon ein Maximum oder Minimum in Beziehung auf y. Man darf also nur noch machen, dass z auch noch in Beziehung auf das, bis jetzt unveränderlich angenommene x, ein Maximum oder Minimum sey. Da aber jetzt y als eine, durch die Gleichung $\frac{dz}{dy} = 0$ bestimmte, Function von x betrachtet werden muss, so ist klar, dass die erste Ableitung von z nach x nicht mehr blos $\frac{dz}{dx}$, sondern $\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$, und die zweite Ableitung $\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{d^2z}{dx\,dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2z}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ ist. Man erhält also

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

welches sich aber, weil schon $\frac{dz}{dy} = 0$ war, auf $\frac{dz}{dx} = 0$ reducirt, so, dass die beiden zur Bestimmung von x und y dienenden Bedingungen,

$$\frac{dz}{dx} = 0 \text{ und } \frac{dz}{dy} = 0$$

sind; wie oben.

Nun muss ferner $\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{d^2z}{dx\,dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2z}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ für das Maximum kleiner und für das Minimum grösser als Null sein und da der Werth von y aus der Gleichung $\frac{dz}{dy} = 0$ bestimmt wird, so dient zur Bestimmung von $\frac{dy}{dx}$ die erste [*von* $\frac{dz}{dy} = 0$ *nach* x] abgeleitete Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{d^2z}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

welche

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d^2z}{dx\,dy} : \frac{d^2z}{dy^2}$$

giebt. Man erhält also [*wenn man diesen Werth von* $\frac{dy}{dx}$ *in* $\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{d^2z}{dx\,dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2z}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ *setzt, in welchem Ausdruck das letzte Glied, weil* $\frac{dz}{dy} = 0$ *ist, wegfällt,*

$\frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{d^2z}{dx\,dy} \cdot \frac{d^2z}{dx\,dy} : \frac{d^2z}{dy^2} + \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 : \frac{d^2z}{dy^2}$, *oder*

$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2z}{dx\,dy} : \frac{d^2z}{dy^2}$, *also*]

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 : \frac{d^2z}{dy^2} < 0$$

für das Maximum und

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 : \frac{d^2z}{dy^2} > 0$$

für das Minimum. Da nun aber auch $\frac{d^2z}{dy^2}$ im ersten Fall < 0, im anderen Fall > 0 sein soll, so muss, sowohl für das Maximum als Minimum,

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 > 0$$

sein [*das heisst, die Grösse* $\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2$ *soll, sowohl für das Maximum als für das Minimum, positiv sein. Dies muss in der That der Fall sein, denn diese Grösse ist das Product der beiden Grössen* $\frac{d^2z}{dx^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 : \frac{d^2z}{dy^2}$ *und* $\frac{d^2z}{dy^2}$. *Diese beiden Factoren sind, nach der Bedingung, für das Maximum negativ, und für das Minimum positiv; also ist das Product, sowohl für das Maximum, als für das Minimum, positiv*]. Hieraus folgt, dass der aus den Gleichungen $\frac{dz}{dx} = 0$ und $\frac{dz}{dy} = 0$ hergenommene Werth von x und y ein Maximum oder Minimum [*für z*] giebt, je nachdem $\frac{d^2z}{dy^2}$ kleiner oder grösser als Null ist, in so fern zugleich

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{{}^2z}{dx\,dy}\right)^2 > 0$$

ist, welches letztere, wie leicht zu sehen, erfordert, dass $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ einerlei Zeichen haben. [*Denn, da*

das Quadrat $\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2$ *immer positiv ist, so muss auch das Product von* $\frac{d^2z}{dx^2}$ *und* $\frac{d^2z}{dy^2}$ *immer positiv sein, damit der Rest, wenn man das Quadrat von dem Product abzieht, eine positive Grösse sein kann.*]

Ist also $\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 < 0$, so ist weder ein Maximum noch ein Minimum möglich, in so fern nicht etwa die dritten Ableitungen ebenfalls verschwinden, in welchem Falle die vierten Ableitungen entscheiden u. s. w.

Es ist also für die Existenz das Maximi und Minimi nicht hinreichend, dass $\frac{d^2z}{dx^2} < 0$ und $\frac{d^2z}{dy^2} < 0$, oder $\frac{d^2z}{dx^2} > 0$ und $\frac{d^2z}{dy^2} > 0$, wie man aus dem eilften Abschnitt des zweiten Theils der Differential-Rechnung von Euler schliessen könnte. [*Vielmehr muss nicht allein für das Maximum* $\frac{d^2z}{dy^2}$ *negativ sein und* $\frac{d^2z}{dx^2}$ *das nemliche Zeichen haben, und für das Minimum* $\frac{d^2z}{dy^2}$ *positiv sein und* $\frac{d^2z}{dx^2}$ *das nemliche Zeichen haben, sondern es muss auch noch ausserdem* $\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2$ *positiv sein. Dieses hat Lagrange, seit Euler, zuerst bemerkt.*]

52.

Die Anwendung dieser Methode auf Functionen mit drei veränderlichen Grössen hat keine Schwierigkeit. Es sey z. B. u eine Function von x, y, z. Man betrachte zuerst x und y als unveränderlich und z allein als veränderlich, so ist $\frac{du}{dz} = 0$ die Bedingung für das Maximum und Minimum und $\frac{d^2u}{dz^2} < 0$ die Bedingung für das Maximum, $\frac{d^2u}{dz^2} > 0$ diejenige für das Minimum. Die Gleichung $\frac{du}{dz} = 0$ giebt den gehörigen Werth von z in x und y, welchen man in u substituiren, oder substituirt sich vorstellen kann. Ist solches geschehen, so enthält u nur noch die zwei veränderlichen Grössen x und y und kann also, wie oben, behandelt werden.

Um allgemeine Ausdrücke zu finden, bemerke man, dass, wenn u nur von x und y allein abhinge, die Bedingungen für das Maximum und Minimum $\frac{du}{dx} = 0$ und $\frac{du}{dy} = 0$, hernach für das Maximum $\frac{d^2u}{dy^2} < 0$, für das Minimum $\frac{d^2u}{dy^2} > 0$ und für beide zugleich $\frac{du^2}{dx^2} \cdot \frac{du^2}{dy^2} - \left(\frac{du^2}{dx\,dy}\right)^2 > 0$, sein würden. Enthält dagegen u noch die Grösse z, welche selbst von x und y abhängt, [*vermöge der Gleichung* $\frac{du}{dz} = 0$] so können die Werthe der Ableitungen nicht mehr blos durch $\frac{du}{dz}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ *etc.* ausgedrückt werden, sondern es müssen die Glieder hinzugefügt werden, die von z herkommen, wenn

man z als Function von x und y betrachtet. Nimmt man also hiernach die Ableitungen von u, so erhält man

$$\frac{d(u)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d(u)}{dy} = \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}$$

$$\frac{d^2(u)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dzdx} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

$$\frac{d^2(u)}{dy^2} = \frac{d^2u}{dy^2} + 2\frac{d^2u}{dzdy} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2$$

$$\frac{d^2(u)}{dxdy} = \frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2u}{dydz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dxdz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dxdy}$$
$$+ \frac{d^2u}{dz^2} \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy}.$$

Man erhält also für das Maximum oder Minimum zuerst die beiden Bedingungen

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0,$$

woraus, weil $\frac{du}{dz} = 0$ ist, die drei Gleichungen

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0$$

folgen; das heisst: die drei Ableitungen von u nach x, y und z müssen einzeln Null sein.

Sodann erhält man, weil $\frac{du}{dz} = 0$ ist, [*aus der vierten der obigen fünf Gleichungen, weil darin, wegen* $\frac{du}{dz}$, *das dritte Glied rechter Hand wegfällt,*]

$$\frac{d^2u}{dy^2} + 2\frac{d^2u}{dz\,dy}\cdot\frac{dz}{dy} + \frac{d^2u}{dz^2}\cdot\left(\frac{dz}{dy}\right)^2$$

$<$ o für das Maximum, und $>$ o für das Minimum, und für beide zugleich [*vermöge der obigen Bedingung* $\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} > \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2$ (51.), *die hier* $\frac{d^2(u)}{dx^2}\cdot\frac{d^2(u)}{dy^2} > \left(\frac{d^2(u)}{dx\,dy}\right)^2$ *ist, wenn man darin die Werthe von* $\frac{d^2(u)}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ *und* $\frac{d^2(u)}{dx\,dy}$ *aus der dritten, vierten und fünften der obigen fünf Gleichungen setzt und bemerkt, dass, wegen* $\frac{du}{dz} = 0$, *in der dritten und vierten Gleichung, das dritte, in der fünften, das vierte Glied rechterhand, wegfällt*]

$$(\nabla.)\left(\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2}+2\frac{d^2u}{dydz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)$$

$$> \left(\frac{d^2u}{dxdy}+\frac{d^2u}{dz\,dy}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d^2u}{dzdx}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\right)^2.$$

Da aber der Werth von z, in x und y ausgedrückt, von der Gleichung $\frac{du}{dz} = 0$ abhängt, so nehme man von $\frac{du}{dz} = 0$ die erste Ableitung nach x und y, um die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ zu finden. Dieses giebt

$$\frac{d^2u}{dz\,dx} + \frac{d^2u}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{d^2u}{dz\,dy} + \frac{d^2u}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dy} = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{d^2u}{dz\,dx} : \frac{d^2u}{dz^2} \text{ und } \frac{dz}{dy} = -\frac{d^2u}{dz\,dy} : \frac{d^2u}{dz^2}.$$

Man substituire diesen Werth [*von* $\frac{dz}{dy}$ *in* $\frac{d^2u}{dy^2} + 2\frac{d^2u}{dz\,dy}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \lessgtr 0$, *so erhält man* $\frac{d^2u}{dy^2} - 2\frac{d^2u}{dz\,dy}\frac{d^2u}{dz\,dy} : \frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)^2 : \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)^2 : \frac{d^2u}{dz^2} \lessgtr 0$,] und da man schon fand, dass für das Maximum $\frac{d^2u}{dz^2} < 0$ und für das Minimum > 0 sein muss, so erhält man [*wenn man mit* $\frac{d^2u}{dz^2}$ *multiplicirt*] eine Grösse, die immer > 0 ist. [*Sie ist* $\frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{d^2u}{dz^2} - \left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)^2$. *Substituirt man eben so die Werthe von* $\frac{dz}{dx}$ *und* $\frac{dz}{dy}$ *in die, oben mit* ▽ *bezeichnete Grösse, welche für das Maximum und Minimum die nemliche bleibt, so erhält man* $\left(\frac{d^2u}{dz^2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{d^2u}{dz\,dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^2u}{dz^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)^2\right) > \left(\frac{d^2u}{dz^2}\frac{d^2u}{dx\,dy} - \frac{d^2u}{dz\,dx}\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)^2$].

Die Bedingungen für das Maximum und Minimum sind also nunmehr folgende:

$\frac{d^2u}{dz^2} < 0$ für das Maximum und

$\frac{d^2u}{dz^2} > 0$ für das Minimum, und

$\frac{d^2u}{dz^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} - \frac{d^2u}{dz\,dy} > 0$ für beide,

nebst

nebst $\left(\frac{d^2u}{dz^2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}-\left(\frac{d^2u}{dz\,dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^2u}{dz^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}-\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)$

$>\left(\frac{d^2u}{dz^2}\cdot\frac{d^2u}{dx\,dy}-\frac{d^2u}{dz\,dx}\cdot\frac{d^2u}{dz\,dy}\right)^2$ für beide.

Man sieht aus dem Ganzen dieser Methode leicht, wie sie sich auf eine grössere Zahl veränderlicher Grössen ausdehnen lässt, und es folgt allgemein, dass man die Gleichungen für das Maximum und Minimum einer beliebigen Function mehrerer veränderlichen Grössen erhält, wenn man die Ableitungen der Function, nach den verschiedenen veränderlichen Grössen genommen, einzeln gleich Null setzt, welches so viele Gleichungen giebt, als veränderliche Grössen vorhanden sind. Die übrigen, für die Existenz des Maximi oder Minimi nothwendigen Bedingungen, findet man, nach einander, den obigen Principien und Ausdrücken gemäss.

53.

Um ein Beispiel der Methode für die Maxima und Minima zu geben, setze man, es werde die kleinste Entfernung zwischen zwei graden Linien im Raume, deren Lage gegeben ist, verlangt. Für die eine grade Linie sey die Abscisse x, so sind die beiden dazu gehörigen Ordinaten von der Form $a+bx$ und $m+nx$; die Abscisse der anderen Linie, für die nemliche Axe, sey y, so sind die beiden dazu gehörigen, ebenfalls auf die nemlichen Axen bezogenen, Ordinaten: $A+By$ und $M+Ny$. Diesemnach ist das Quadrat der Entfernung der beiden, zu den Abscissen x und y gehörigen, Puncte:

$$(x-y)^2+(a-A+bx-By)^2+(m-M+nx-Ny)^2,$$

für welches wir, der Kürze wegen, $= 2z$ setzen wollen.

Nimmt man die Ableitungen, so erhält man:

$$\frac{dz}{dx} = x - y + b(a - A + bx - By) + n(m - M + nx - Ny)$$

$$\frac{dz}{dy} = -(x - y) - B(a - A + bx - By) - N(m - M + nx - Ny)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 1 + b^2 + n^2$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = 1 + B^2 + N^2$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = -1 - bB - nN.$$

Man findet also, erstlich, zur Bestimmung der beiden unbekannten Grössen x und y, die Gleichungen

$$x - y + b(a - A + bx - By) + n(m - M + nx - Ny) = 0,$$
$$x - y + B(a - A + bx - By) + N(m - M + nx - Ny) = 0.$$

Zweitens folgt, dass nur ein Minimum möglich ist, weil $\frac{d^2z}{dx^2}$ nothwendig positiv ist [*indem es aus lauter Quadraten*, 1, b^2, n^2 *besteht*]. Es muss aber dann noch die Bedingung

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 > 0,$$

erfüllt werden, welches giebt

$$(1 + b^2 + n^2)(1 + B^2 + N^2) - (1 + bB + nN)^2 > 0$$

und dieses ist in der That der Fall, weil sich der Ausdruck der Bedingung in

$$(b - B)^2 + (n - N)^2 + (bN - nB)^2 > 0,$$

verwandeln lässt. [*Diese Grösse ist, als eine Summe von Quadraten, immer positiv. Die Verwandlung hat keine Schwierigkeit.*]

Da die Gleichungen für x und y diese Grössen nur in der ersten Potenz enthalten, so ist ihre Entwickelung leicht. Wir wollen uns dabei um so weniger aufhalten, als die Aufgabe, geometrisch, leichter aufgelöset werden kann.

54.

Man kann auch, bei der Untersuchung grösster und kleinster Werthe von Functionen mehrerer veränderlichen Grössen, alle veränderliche Grössen auf einmal sich verändern lassen, welches noch directer und klarer ist.

Es sey $f(x, y, z, u \ldots) = w$ die gegebene Function. Nimmt man an, dass die Grössen $x, y, z, u \ldots$ schon diejenigen Werthe haben, welche w zum Maximo oder Minimo machen, so muss das, was man erhält, wenn man $x+p$ statt x, $y+q$ statt y, $z+r$ statt z, $u+s$ statt u u. s. w. setzt, im Fall das Maximi immer kleiner, im Fall das Minimi immer grösser sein als w, was auch $p, q, r, s \ldots$ sein mögen. Dieses folgt unmittelbar aus der Eigenschaft der Maxima und Minima.

Man entwickele die Grösse $f(x+p, y+q, z+r, u+s \ldots)$ nach Potenzen und Producten der Grössen $p, q, r, s \ldots$, dem Ausdrucke des allgemeinen Lehrsatzes (78. 1ster Theil) gemäss, und bleibe bei den ersten Gliedern der Entwickelung stehen. Man erhält

$$f(x+p, y+q, z+r, u+s \ldots) =$$

$$w + p\frac{dw}{dx} + q\frac{dw}{dy} + r\frac{dw}{dz} + s\frac{dw}{du} \ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}p^2\frac{d^2(w)}{dx^2} + pq\frac{d^2(w)}{dx\,dy} + \tfrac{1}{2}q^2\frac{d^2(w)}{dy^2} + pr\frac{d^2(w)}{dx\,dz} \ldots$$

wenn (w) den Werth der Grösse $f(x+\lambda p, y+\lambda q, z+\lambda r, u+\lambda s \ldots.)$ und λ eine Grösse zwischen o und 1 bedeutet, welche in der nemlichen Function eine und dieselbe ist, aber in verschiedenen Functionen verschieden sein kann. [*Hier konnten an sechs Zeilen Beschreibung der Bedeutung der Zeichen, erspart werden.*]

Die, rechterhand, zu w hinzukommende Grösse, muss also immer positiv sein für das Minimum, und immer negativ für das Maximum, welche, und wie klein auch die Werthe von p, q, $r \ldots.$ sein mögen. Hieraus folgt, aus ähnlichen Gründen wie in (25.), dass die Bedingung nicht anders erfüllt werden kann, als wenn die Coefficienten zu p, q, $r \ldots.$ einzeln Null sind, welches die Gleichungen

$$\frac{dw}{dx} = 0, \quad \frac{dw}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dz} = 0, \quad \frac{dw}{du} = 0 \quad etc.$$

giebt, die für das Maximum und Minimum gemeinschaftlich Statt finedn und aus welchen sich, weil ihrer so viele sind, als Grössen, x, y, z, $u \ldots.$, diese Grössen bestimmen lassen.

55.

Aber, damit die gefundenen Werthe ein Maximum oder Minimum geben, muss noch die übrige Grösse

$$\tfrac{1}{2} p^2 \frac{d(w)}{dx^2} + pq \frac{d^2(w)}{dx\,dy} + \tfrac{1}{2} q^2 \frac{d^2(w)}{dy^2} + pr \frac{d^2(w)}{dx\,dz} \ldots.$$

für das Minimum immer positiv, für das Maximum immer negativ sein, was auch p, q, $r \ldots.$, und wie klein auch diese Grössen sein mögen.

Da die Coefficienten $\frac{d^2(w)}{dx^2}$, $\frac{d^2(w)}{dx\,dy}$ *etc.* zu den

Quadraten und Producten der Grössen $p, q, r \ldots$, selbst noch diese Grössen $p, q, r \ldots$ enthalten, so würde es an sich selbst schwer, ja vielleicht unmöglich sein, die nöthigen Bedingungen allgemein zu bestimmen. Man erwäge indessen, dass die Abhängigkeit der Grössen $\frac{d^2(w)}{dx^2}, \frac{d^2(w)}{dx\,dy} \ldots$ von $p, q, r \ldots$ aufhört, sobald man $\lambda = o$ setzt, und dass dann diese Grössen bestimmte Werthe erhalten. In diesem Fall findet man, wie wir sogleich sehen werden, die Bedingungen zwischen den Grössen, die in nichts anderem, als in Ungleichheiten der aus jenen Functionen zusammengesetzten Grössen bestehen. Setzt man, dass diese Ungleichheiten für bestimmte Werthe von x, y, $z \ldots$ Statt finden, so finden sie auch noch für wenig davon verschiedene Werthe $x + \lambda p$, $y + \lambda q$, $z + \lambda r \ldots$ Statt, so lange die Grössen λp, λq, $\lambda r \ldots$ nicht gewisse Grenzen überschreiten, die so enge angenommen werden können, als man will. Da nun die für das Maximum und Minimum nöthigen Bedingungen nur für beliebige Werthe von p, q, $r \ldots$ erfüllt werden dürfen, die so klein sein können, als man will, so folgt, dass es hinreichend ist, wenn man dieselben für $\lambda = o$ erfüllt. Folglich kann man sogleich $\lambda = o$ setzen, wodurch die, in dem obigen Ausdrucke vorkommenden Grössen $\frac{d^2(w)}{dx^2}, \frac{d^2(w)}{dx\,dy}, \frac{d^2(w)}{dy^2} \ldots$ in $\frac{d^2w}{dx^2}, \frac{d^2w}{dxdy}, \frac{d^2w}{dy^2} \ldots$ übergehen, welche nichts weiter als die zweiten Ableitungen der gegebenen Grösse $w = f(x, y, z, u \ldots)$ nach x allein, nach x und y u. s. w. sind.

56.

Es kommt also nur darauf an, die Bedingungen zu finden, unter welchen eine Grösse von der Form

$$P = Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dpr + Eqr + Fr^2 \ldots,$$

in welcher A, B, $C \ldots$ gegeben und p, q, $r \ldots$ unbestimmte Grössen sind, nothwendig positiv oder negativ sein muss, was auch p, q, $r \ldots$ sein mögen.

Man setze, die Grösse P solle immer positiv sein, so ist klar, dass es, für den entgegengesetzten Fall, hinreichend ist, blos die Grössen A, B, $C \ldots$ negativ zu machen. Da nun die Grösse [P] nie negativ soll sein können, so folgt, dass ihr [*der Grösse* P] Minimum positiv sein muss, und umgekehrt folgt, dass die Grösse [P], wenn sie nur positive Minima hat, nie negativ sein kann. Man darf daher nur die Bedingungen suchen, unter welchen die Grösse [P] blos positive Minima hat.

Man nehme nach (52.) die erste und zweite Ableitung der gegebenen Grösse [P] nach einer der veränderlichen Grössen z. B. p und setze ihre erste Ableitung gleich Null [*wie es das Maximum oder Minimum erfordert*], die zweite Ableitung aber positiv [*wie es für das Minimum sein muss*], so erhält man die Gleichung

$$\left[\frac{dP}{dp} =\right] 2Ap + Bq + Dr \ldots = 0$$

und die Bedingung $A > 0$. [*Denn es ist* $\frac{d^2P}{dp^2} = 2A$ *und die zweite Ableitung* $\frac{d^2P}{dp^2}$ *sollte positiv sein.*]

Man substituire den hieraus folgenden Werth von p in die gegebene Grösse $[P]$, so bekommt dieselbe die Form

$$Lq^2 + Mqr + Nr^2 + Qqs \ldots.$$

wenn

$$L = C - \frac{B^2}{4A},\ M = E - \frac{BD}{2A},\ N = F - \frac{D^2}{4A} \text{ etc.}$$

[*Aus* $\frac{dP}{dp} = 2Ap + Bq + Dr \ldots. = 0$ *nemlich folgt* $p = -\frac{Bq + Dr \ldots.}{2A}$. *Setzt man Dieses in* $P = Ap^2 + Bpq + Dpr \ldots.$, *so erhält man* $\frac{B^2q^2 + D^2r^2 + 2BDqr \ldots.}{4A^2} - \frac{B^2q^2 + BDqr}{2A} \ldots. - \frac{BDrq + D^2r^2 \ldots.}{2A} \ldots. + Cq^2 + Eqr + Fr^2 \ldots. = Cq^2 + Fr^2 + Eqr \ldots. - \frac{B^2q^2}{4A} - \frac{D^2r^2}{4A} - \frac{BDqr}{2A} \ldots.$ *welches, wenn man* $C - \frac{B^2}{4A} = L$, $E - \frac{BD}{2A} = M$, $F - \frac{D^2}{4A} = N$ *setzt*, $Lq^2 + Mqr + Nr^2 \ldots.$ *giebt.*]

Man nehme, auf dieselbe Weise, die erste und zweite Ableitung von dieser verwandelten Grösse nach der einzelnen veränderlichen Grösse q und setze wiederum die erste Ableitung gleich Null [*zufolge der Bedingung für das Maximum oder Minimum*] und die zweite Ableitung positiv [*zufolge der Bedingung für das Minimum*], so erhält man die neue Gleichung

$$2Lq + Mr + Qs \ldots. = 0$$

und die Bedingung $L > 0$ [*wie oben, weil* $\frac{dP}{dp} = 0$ *und* $\frac{d^2P}{dp^2} > 0$].

Man substituire hierin, wie oben, den hieraus genommenen Werth von q, so erhält man die, abermals verwandelte Grösse

$$Tr^2 + Vrs + Xs^2 \ldots.$$

in welcher die Coefficienten T, V, $X\ldots.$ eben so von denjenigen L, M, $N\ldots.$ abhängen, wie diese von A, B, $C\ldots.$ Setzt man das Verfahren fort, so erhält man

$$2Tr + Vs \ldots. = 0,$$

und die Bedingung $T > 0$ u. s. w.

Nun ist leicht zu sehen, dass der letzte dieser verwandelten Ausdrücke von P, welcher nur noch eine der unbestimmten Grössen p, q, $r\ldots.$ enthält und folglich von der Form Zs^2 ist, das Minimum der Grösse P selbst bezeichnet, woraus folgt, dass die Bedingungen, unter welchen die Grösse P ein positives Minimum ist,

$$A > 0,\ L > 0,\ T > 0 \ldots.\ Z > 0$$

sind [*nemlich grade ein* *positives* *Minimum, weil ein Quadrat, wie* s^2 *in* Zs^2 *immer positiv ist*]. Da nun diese Gleichungen, welche die, für das Minimum nöthigen Werthe von p, q, $r\ldots.$ bestimmen, die Grössen p, q, $r\ldots.$ blos in den ersten Potenzen enthalten, so folgt, dass dieses Minimum das einzige mögliche ist. Also ist auf diese Weise die Aufgabe vollständig aufgelöset.

Uebrigens ist leicht zu sehen, dass die gegebene Grösse P durch diese verschiedenen Verwandlungen die Form

$$A\left(p + \frac{Bq + Dr\ldots.}{2A}\right)^2$$

$$+ L\left(q + \frac{Mr + Qs \ldots}{2L}\right)^2$$

$$+ T\left(r + \frac{Vs + Wt \ldots}{2T}\right)^2 \text{ etc.}$$

erhält. [*Denn es ist z. B.*

$$A\left(p+\frac{Bq+Dr\ldots}{2A}\right)^2 = Ap^2+Bpq+Dpr\ldots+\frac{(Bq+Dr\ldots)^2}{4A}$$

$$L\left(q+\frac{Mr+Qs\ldots}{2L}\right)^2 = Lq^2+Mrq+Qsq\ldots+\frac{(Mr+Qs\ldots)^2}{4L}$$

$$= Cq^2+Erq+Gsq\ldots+\frac{(Mr+Qs\ldots)^2}{4L}$$

$$-\frac{B^2}{4A}q^2-\frac{BDrq}{2A}-\ldots$$

$$T\left(r+\frac{Vs\ldots}{2T}\right)^2 = Tr^2+Vsr+\ldots+\frac{(Vs\ldots)^2}{4T}$$

$$= Fr^2\ldots \quad +\frac{(Vs\ldots)^2}{4T}$$

$$-\frac{M^2}{4L}\ldots$$

Rechnet man diese Gleichungen zusammen, so ist leicht zu sehen, dass sich die negativen Glieder $-\frac{B^2}{4A}q^2-\frac{BDrq}{2A}\ldots$ *in* $L\left(q+\frac{Mr\ldots}{2L}\right)^2$ *mit dem Theile* $\frac{(Bq+Dr\ldots)^2}{4A}$ *von* $A\left(p+\frac{Bq\ldots}{2A}\right)^2$, *die negativen Glieder von* $T\left(r+\frac{Vs\ldots}{2T}\right)^2$ *mit dem Theile* $\frac{(Mr+Qs\ldots)^2}{4L}$ *von* $L\left(q+\frac{Mr\ldots}{2L}\right)^2$ *u. s. w. aufheben, so dass, weil die letzte Grösse keine Quotienten, wie* $\frac{Vs\ldots}{2T}$, *mehr enthält, sondern blos von der Form* $Z(s)^2$ *ist, blos*

$Ap^2+Bpq+Dpr\ldots+Cq^2+Erq+Gsq\ldots+Fr^2+\ldots$ übrig bleibt, welches genau die Grösse P ist.]

Dieser Ausdruck ist offenbar positiv oder negativ, je nachdem die Coefficienten $A, L, T\ldots$ sämmtlich positiv oder negativ sind. [*Denn diese Coefficienten sind sämmtlich in Quadrate multiplicirt, welche immer positiv sind.*] Auch sieht man, dass die Grössen $A, L, T\ldots$ auch Null sein können, wenn sie es nur nicht alle zugleich sind.

Diese Bedingungen sind also diejenigen des Maximi und Minimi der Grösse $w=f(x, y\, z, u\ldots)$ wenn man für das Minimum

$$A=\tfrac{1}{2}\frac{d^2w}{dx^2},\ B=\frac{d^2w}{dxdy},\ C=\tfrac{1}{2}\frac{d^2w}{dy^2}\ldots$$

und für das Maximum

$$A=-\tfrac{1}{2}\frac{d^2w}{dx^2},\ B=-\frac{d^2w}{dx\,dy},\ C=-\tfrac{1}{2}\frac{d^2w}{dy^2}\ldots$$

setzt. Die Uebereinstimmung dieser Resultate mit denen von (52.), ist leicht zu sehen; aber die gegenwärtige Methode hat den Vorzug, dass sie ein einfaches Mittel an die Hand giebt, die Untersuchung auf eine beliebige Zahl veränderlicher Grössen auszudehnen. [*Nemlich hier wurde gefunden* $A>0$, $L=C-\frac{B^2}{4A}>0$ *u. s. w. und es ist für das Minimum* $A=\pm\tfrac{1}{2}\frac{d^2w}{dx^2}$, $\pm B=\frac{d^2w}{dx\,dy}$, $C=\pm\tfrac{1}{2}\frac{d^2w}{dy^2}$ *etc. Also soll sein* $\pm\tfrac{1}{2}\frac{d^2w}{dx^2}>0$, $\pm\tfrac{1}{2}\frac{d^2w}{dy^2}-\frac{\left(\frac{d^2w}{dx\,dy}\right)^2}{\pm 2\frac{d^2w}{dx^2}}>0$ *etc. oder* $\pm\frac{d^2w}{dx^2}>0$, $\frac{d^2w}{dy^2}\cdot\frac{d^2w}{dx^2}-\left(\frac{d^2w}{dx\,dy}\right)^2>0$

welches das Nemliche ist, was in (51.) *für zwei veränderliche Grössen gefunden wurde. Die nemliche Uebereinstimmung findet für mehrere veränderliche Grössen, wie in* (52.) *Statt.*]

57.

Diese Untersuchungen über die Theorie des Grössten und Kleinsten geben folgendes Resultat. Setzt man in eine beliebige Function von $x, y, z \ldots.$ $x+p, y+q, z+r \ldots.$ statt $x, y, z \ldots.$ und entwickelt die Function nach Potenzen und Producten von $p, q, r \ldots.$, so geben die Glieder, welche $p, q, r \ldots.$ nur in der ersten Abmessung enthalten, wenn man sie einzeln gleich Null setzt, die Gleichungen welche erfüllt werden müssen, damit überhaupt die Function einen grössten oder kleinsten Werth habe. Sodann muss die aus den Gliedern mit zwei Abmessungen von $p, q, r \ldots.$ zusammengesetzte Grösse, für das Minimum immer positiv, für das Maximum immer negativ sein, was auch $p, q, r \ldots.$ sein mögen.

Verschwinden alle Glieder zugleich, so muss, wenn ein Grösstes oder Kleinstes existirt, auch die Grösse mit drei Abmessungen von $p, q. r \ldots.$ verschwinden und die Grösse mit vier Abmessungen von $p, q, r \ldots.$ muss für das Minimum immer positiv, für das Maximum immer negativ sein, was auch $p, q, r \ldots.$ sein mögen. Dieses stimmt, wie man sieht, mit (25.) überein.

Wir haben hier ein einfaches Mittel angegeben, die Bedingungen zu finden, unter welchen eine Grösse von der Form $Ap^2 + Bpq \ldots.$ immer positiv oder negativ ist. Man könnte auf demselben Wege die

Bedingungen suchen, unter welchen Grössen von der Form $Ap^4 + Bp^3 q \ldots.$ immer positiv oder negativ sind; aber die Anwendung der allgemeinen Methode auf diesen Fall würde Rechnungs-Schwierigkeiten haben, wegen welcher sie vielleicht unausführbar ist. Dieses ist eine algebraische Aufgabe, von welcher wohl eine Auflösung zu wünschen wäre.

58.

Wir haben bisher angenommen, dass die in der gegebenen Function vorkommenden veränderlichen Grössen von einander unabhängig sind. Wären aber zwischen denselben eine oder mehrere Gleichungen gegeben, so müsste man zuerst, vermittels dieser Gleichungen, aus der gegebenen Function [$f(x, y, z \ldots.) = w$], so viele Grössen, als Gleichungen da sind, zu eliminiren suchen. Hierauf erst könnte man für die übrig gebliebenen veränderlichen Grössen die Bedingungen der Maxima und Minima [*nach der obigen Methode*] finden. Dieses ist das sich zunächst darbietende Verfahren. Dasselbe lässt sich indessen sehr vereinfachen, wenn man die veränderlichen Grössen alle beibehält und die Elimination dagegen auf die Grössen $p, q, r \ldots.$ bezieht.

Man setze z. B. es sey zwischen den veränderlichen Grössen $x, y, z \ldots.$ die Bedingungs-Gleichung

$$\varphi(x, y, z \ldots.) = 0$$

gegeben. Da diese Gleichung für jeden Werth von $x, y, z \ldots.$ Statt finden soll, so gilt sie auch, wenn man $x + p, y + q, z + r \ldots.$ statt $x, y, z \ldots.$ setzt. Man erhält also, wenn man die Grösse nach (78. 1ster Th.)

entwickelt [*und der Kürze wegen*, $\varphi(xyz\ldots) = \varphi$ *setzt*]

$$p\frac{d\varphi}{dx} + q\frac{d\varphi}{dy} + r\frac{d\varphi}{dz}\ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}p^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + pq\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \tfrac{1}{2}q^2\frac{d^2\varphi}{dy}\ldots = 0$$

woraus man den Werth von p in einer Reihe finden kann, die man dann in die Entwickelung der Function selbst setzen kann, deren Werth ein Grösstes oder Kleinstes sein soll. Oder, man kann auch blos zu der Entwickelung der gegebenen Function die Grösse addiren, welche das erste Glied der vorigen Gleichung ausmacht, nachdem sie mit einer beliebigen Grösse multiplicirt worden, die selbst von der Form

$$a + bp + cq + \ldots + lp^2 + mpq\ldots$$

sein kann, wo die Coefficienten a, b, $c\ldots$ unbestimmte Grössen bedeuten. Sodann kann man alle Glieder zusammen, welche p enthalten, gleich Null setzen, welches zur Bestimmung von a, b, $c\ldots$ dient.

Da die Gleichungen für das Maximum und Minimum sich nur auf die Glieder mit einer Abmessung von p, q, $r\ldots$ beziehen, so ist es hinreichend, wenn man nur jedes dieser Glieder, einzeln, gleich Null setzt, welches die Gleichungen

$$\frac{dw}{dx} + a\frac{d\varphi}{dx} = 0,\quad \frac{dw}{dy} + a\frac{d\varphi}{dy} = 0,\quad \frac{dw}{dz} + a\frac{d\varphi}{dz} = 0 \text{ etc.}$$

giebt, die durch die Wegschaffung der unbekannten Grösse a auf eine weniger reducirt werden können. Für die Glieder mit zwei Abmessungen von p, q, $r\ldots$ kann man, durch das obige Verfahren, die Bedingungen zwischen den Coefficienten der Glieder finden.

Diesen Bedingungen muss man auf die allgemeinste Weise, vermittelst der Grössen a, b, c.... zu genügen suchen.

Wir begnügen uns, dieses Verfahren blos anzudeuten, weil die Anwendung desselben leicht ist. Es kommt im Allgemeinen nur darauf an, dass man, wenn eine Function mehrerer veränderlichen Grössen ein Maximum oder Minimum sein soll, und zwischen den veränderlichen Grössen eine, oder mehrere Bedingungs-Gleichungen gegeben sind, die Grössen, welche [*in den Bedingungs-Gleichungen*] Null sein sollen, jede mit einer beliebigen unbestimmten Grösse multiplicirt, die Producte zu der gegebenen Grösse addirt und von der Summe das Maximum oder Minimum auf die nemliche Weise sucht, als wenn die Grössen gänzlich von einander unabhängig wären. Die Gleichungen, welche man auf diese Weise findet, verbunden mit den gegebenen Bedingungs-Gleichungen, dienen zur Bestimmung der unbekannten Grössen. [*Dieses sinnreiche Mittel, gegebene Bedindungs-Gleichungen dadurch in Rechnung zu bringen, dass man sie auf Null bringt, die Grössen, welche auf diese Weise Null sind, mit beliebigen unbestimmten Coefficienten multiplicirt, und die Producte zu den gegebenen Grössen, von welchen die Aufgabe handelt, addirt, ist das nemliche, welches in der Variations-Rechnung in ähnlichen Fällen gebraucht wird. Von der hier blos angedeuteten Anwendung auf Untersuchung grösster und kleinster Werthe von Ausdrücken, die von mehreren, wegen gegebener Bedingungs-Gleichungen, nur zum Theil von einander unabhängigen*

Grössen abhängen, hat der Herausgeber, in seiner Sammlung mathematischer Abhandlungen, eine ausführliche Entwickelung aufgenommen und dieselbe mit mehreren Beispielen begleitet. Man findet sie daselbst im zweiten Bande S. 262. etc.]

59.

Man kann auf dieselbe Weise die Aufgabe behandeln: Curven zu finden, welche in allen ihren Puncten diese oder jene Eigenschaften eines Maximi oder Minimi haben.

Man setze z. B. es solle die Curve gefunden werden, für welche die Grösse K in (15.) [*also das Product der Stücke, welche eine beliebige Tangente der Curve, von zwei festen Perpendikeln auf die Axe abschneidet*] für jeden Punct der Curve ein Maximum oder Minimum ist. Die Grösse war

$$K = \left(y + (m-x)\frac{dy}{dx}\right)\left(y + (n-x)\frac{dy}{dx}\right)$$

und die Aufgabe besteht darin, diejenigen Werthe von y in x zu finden, welche diesen Ausdruck zu einem Grössten oder Kleinsten machen. Wären die beiden Grössen y und $\frac{dy}{dx}$ von einander unabhängig, so liesse sich das Maximum oder Minimum nach beiden bestimmen; da sie aber, eine von der andern, abhängen und zwar ihre Abhängigkeit unbestimmt ist, so lange nicht eine von ihnen, auf eine gegebene Weise, durch x bestimmt wird, so kann man nur das Maximum oder Minimum nach einer dieser Grössen suchen, und es ist natürlich, die Grösse $\frac{dy}{dx}$ zur

veränderlichen zu nehmen, weil dieselbe die Lage der Tangente bestimmt, indem man die Coordinaten x und y für jeden Punct der Curve als gegeben betrachtet.

Man nehme also die erste und zweite Ableitung der gegebenen Function nach $\frac{dy}{dx}$, so, als wenn diese Grösse allein veränderlich wäre. [*Man kann sich nemlich vorstellen, dass* $\frac{dy}{dx}$ *seinen Werth verändert, ohne dass* y *ein Gleiches thut. Zwar kann sich* $\frac{dy}{dx}$ *nicht ändern, ohne dass sich die Abhängigkeit der Grösse* y *von der Grösse* x *änderte, allein diese Abhängigkeit kann sich auch wirklich ändern, ohne dass sich der Werth von* y *ändert; also kann* y *constant sein, während sich* $\frac{dy}{dx}$ *verändert.*] Setzt man die erste Ableitung von K, nach $\frac{dy}{dx}$ genommen, gleich Null, so erhält man:

$$\left(y+(n-x)\frac{dy}{dx}\right)(m-x)+\left(y+(m-x)\frac{dy}{dx}\right)(n-x)=0,$$

welches, wie in (15.)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x-m-n)y}{2(m-x)(n-x)},$$

giebt, woraus sich die Gleichung der Curve findet.

Sodann ist die zweite Ableitung von $K, =2(m-x)(n-x)$, woraus folgt, dass das Maximum für denjenigen Theil der Curve Statt findet, für welchen die beiden Grössen $m-x$ und $n-x$ verschiedene Zeichen haben, das Minimum für denjenigen Theil der Curve, für welchen die Zeichen dieser Grössen die nem-

nemlichen sind, so dass also das Maximum für alle Werthe von x, zwischen m und n, und das Minimum für diejenigen x Statt finden, welche über m und n hinaus liegen.

Da die für die Curve gefundene Gleichung von der ersten Ordnung ist, so hat sie eine Stammgleichung mit einer willkürlichen Constante. Bringt man sie auf die Form

$$2\frac{dy}{dx}:y\left[=\frac{x-m+x-n}{(m-x)(n-x)}\right]=\frac{1}{x-m}+\frac{1}{x-n},$$

so erhält man die Stammgleichung

$$2\,log\,y = log\,(x-m) + log\,(x-n) + log\,h,$$

oder, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht,

$$y^2 = h\,(x-m)\,(x-n),$$

wo h eine willkürliche Constante bedeutet. Diese Gleichung hat die nemliche Form, wie die oben in (15.), gefundene, wie es auch sein muss, weil die abgeleitete Gleichung, von welcher man ausging, an beiden Orten die nemliche war. Denn, die oben für das Maximum und Minimum gefundene Gleichung, mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ multiplicirt, hat

$$\left(y+(m-x)\frac{dy}{dx}\right)\left(y+(n-x)\frac{dy}{dx}\right)=K$$

zur Stammgleichung, wo K eine willkürliche Constante ist. Diese Stammgleichung, verbunden mit ihrer abgeleiteten, um $\frac{dy}{dx}$ zu eliminiren, giebt das oben gefundene Resultat.

Nimmt man das Gegenwärtige mit dem Obigen, in (15.) zusammen, so sieht man, dass die Kegel-

schnitte nicht allein die oben bemerkte Eigenschaft haben, dass die Tangenten von den beiden, auf die Axe in ihren End-Puncten errichteten, Perpendikeln Stücke abschneiden, deren Product für alle Puncte gleich gross ist, sondern auch, dass die Tangente wenn man sie, für einen beliebigen Punct der Curve, als gegeben betrachtet, eine solche Lage hat, dass das genannte Product für die Ellipse ein Maximum und für die Hyperbel ein Minimum, oder vielmehr ein negatives Maximum ist.

60.

Allgemein, wenn man die Curve sucht, in welcher eine gegebene Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ ein Maximum oder Minimum sein soll, so kann man solches rücksichtlich aller der Grössen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ suchen, welches eben so viele verschiedene Auflösungen giebt und man erhält, allgemein gesprochen, für jede gesuchte Curve eine Gleichung von der nemlichen Ordnung, die die gegebene Function hat. [*Denn, wenn man z. B. von* $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$ *die Ableitung nach* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *nimmt, so erhält man eine Grösse, die wieder* $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ *enthalten kann.*]

Wäre diese gegebene Function blos eine Function von den Elementen der Berührung $a, b, c \ldots$ (10.) so würde man, wenn man das Maximum oder Minimum nach der letzten der Grössen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$

sucht, nothwendig die nemliche Gleichung finden, welche man erhielte, wenn man die gegebene Function einer Constante gleich setzte. [*In beiden Fällen ist der Werth der Ableitung Null.*] Hiervon kann man sich leicht aus (10. und 18.) überzeugen. Denn, setzt man die erste Ableitung von $f(a, b, c \ldots.)$, nach der höchsten der Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots.$ genommen, gleich Null, so erhält man die nemliche Gleichung, welche man findet, wenn man, allgemein, die erste Ableitung der Gleichung

$$f(a, b, c \ldots.) = \text{Const.}$$

nach $x, y, \frac{dy}{dx} \ldots.$ nimmt. Hieraus folgt, dass diese beiden Arten von Aufgaben, obgleich im Grunde sehr verschieden, dennoch einerlei Resultate haben, und folglich auf einerlei Weise aufgelöset werden können. Mithin lässt sich Alles, was oben in [10. 15. *etc.*] gesagt worden ist, auch hier anwenden. Das Beispiel des vorigen Artikels ist, wie man sieht, ein einzelner Fall dieser Art von Aufgaben.

Zwölfter Abschnitt.

Von den Aufgaben über Maxima und Minima, die sich auf die Variations-Rechnung beziehen. Von der für das Maximum und Minimum gemeinschaftlich Statt findenden Gleichung und vom Unterscheidungs-Zeichen der Maxima und Minima.

61.

Wenn das Maximum oder Minimum, anstatt eine gegebene Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.... zu sein, vielmehr die Stammgrösse einer gegebenen Function wäre, so dürfte man die Grössen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.... nicht mehr als unabhängig von einander und isolirt betrachten, weil die Stammgrösse einer Function jener Grössen von dem Verhältniss der Grössen unter einander selbst abhängt. Dergleichen Aufgaben gehören in die, unter den Namen „Variations-Calcul" bekannte Rechnung. Sie erfordern keine neue Grundsätze, sondern nur eine besondere Anwendung der Functionen-Theorie, welche wir hier, wegen der Wichtigkeit des Gegenstandes, vortragen zu müssen glauben.

Es sey die Function $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right)$ [$= v$] gegeben, in welcher y als Function von x betrachtet wird, so ist klar, dass sich allgemein die Stammgrösse der gegebenen Function nicht finden lässt, ohne den Werth von y in x zu kennen. Aber,

man kann suchen, welchen Werth y in x haben müsse [*das heisst, in welcher Form y von x abhängen müsse*] damit die Stammgrösse von $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots\right) = v$, ein Maximum oder Minimum zulässt, in der Voraussetzung nemlich, dass diese Stammgrösse, für irgend einen gegebenen Werth a von x, Null ist und für irgend einen anderen gegebenen Werth b von x, einen grössten oder kleinsten Werth hat. Es ist aus den Eigenschaften der Maxima und Minima klar, dass, wenn y der gesuchte Werth ist, die Stammgrösse von

$$f\left(x, y + \omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2y}{dx} + \frac{d^2\omega}{dx}\ldots\right),$$

welche aus der gegebenen Function v entsteht, wenn man darin $y + \omega$ statt y setzt, innerhalb der nemlichen Grenzen von x, im Falle des Maximi immer kleiner, im Falle des Minimi immer grösser, als die Stammgrösse von $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots\right) = v$ selbst sein müsse, was auch die Grösse ω, welche man als irgend eine Function von x betrachten kann, und wie klein auch dieselbe sein möge.

Entwickelt man $f\left(x, y + \omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx}\ldots\right)$ nach Potenzen und Producten von $\omega, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2}\ldots,$ gemäss (78. 1ster Theil), so erhält man

$$v + \omega\frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{d^2\omega}{dx^2}\cdot\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}\omega^2\frac{d^2(v)}{dy^2} + \omega\frac{d\omega}{dx}\frac{d^2(v)}{dy\, d\frac{dy}{dx}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\omega^2}{dx}\right)\frac{d^2(v)}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2}\ldots$$

wo man [*damit die Reihe bei den Gliedern, die die Grössen* ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ *in zwei Abmessungen enthalten, abbreche*] unter $d^2(v)$ die zweite Ableitung der Grösse

$$f\left(x, y+\lambda\omega, \frac{dy}{dx}+\lambda\frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}+\lambda\frac{d^2\omega}{dx^2}\ldots\right)$$

verstehen kann. Die Zahl λ ist unbestimmt, oder vielmehr unbekannt; sie kann in verschiedenen Functionen verschieden, aber in einer und derselben Function nur immer die nemliche sein und nur zwischen o und 1 liegen. [*dv hingegen bedeutet blos die Ableitung der Grösse* $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\ldots\right)$].

Die Stammgrösse von

$$\omega\frac{dv}{dy}+\frac{d\omega}{dx}\frac{dv}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}+\frac{d^2\omega}{dx^2}\frac{d^2v}{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}\ldots$$

$$+\tfrac{1}{2}\omega^2\frac{d^2(v)}{dy^2}+\omega\frac{d\omega}{dx}\frac{d^2(v)}{dy\,d\frac{dy}{dx}}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\frac{d^2(v)}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2}\ldots$$

muss also für das Maximum immer negativ, für das Minimum immer positiv sein, was, und wie klein auch ω sein mag, in so fern man nur die Stammgrösse so nimmt, dass sie Null ist für $x = o$, und hernach in dieselbe $x = b$ setzt.

Aber, ohne ω zu kennen, lässt sich zeigen, dass man ω immer so klein annehmen kann, dass die Stammgrösse desjenigen Theils, welcher ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$.... nur in einer Abmessung enthält, immer einen positiv

oder negativ grösseren Werth hat, als die Stammgrösse des anderen Theils. Denn man setze $i\alpha$ statt ω, wo i eine beliebige Grösse und α ein constanter Coefficient ist, so hat der erste Theil überall i und der zweite überall i^2 zum Factor; ihre Stammgrössen haben also die nemlichen Factoren und es ist leicht zu sehen, dass man i immer so klein annehmen kann, dass die erste Grösse kleiner ist, als die zweite, in so fern i nicht verschwindet. Hieraus folgt, dass sich ω immer so klein annehmen lässt, dass der Werth der ganzen Stammgrösse nothwendig positiv oder negativ ist, sobald es ihr erster Theil ist. Nun aber ist klar, dass dieser erste Theil mit ω das Zeichen verändert [*weil er blos ω zum Coefficienten hat*]. Also ist es unmöglich, dass die ganze Function, unabhängig von dem Werthe von ω, immer positiv oder negativ sein kann, so lange nicht die Stammgrösse desjenigen Theils, welcher ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$.... nur in einer Abmessung enthält, verschwindet, was auch ω sein mag. Das Maximum oder Minimum kann also nur dann Statt finden, wenn die Stammgrösse von

$$\omega \frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dx} \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{d^2\omega}{dx^2} \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \ldots,$$

für jeden Werth von ω, Null ist. [*Alles beruht auf ähnlichen Gründen, wie bei den gewöhnlichen Maximis und Minimis, wo ebenfalls der Coefficient zur ersten Potenz der willkürlichen Zunahmen der veränderlichen Grössen Null sein muss.*]

Wenn diese Grösse Null ist, so muss also dann die Stammgrösse des anderen Theils

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 \frac{d^2(v)}{dy^2} + \omega \frac{d\omega}{dx} \frac{d^2(v)}{dy\, d\frac{dy}{dx}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \frac{d^2(v)}{\left(d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)^2} \dots$$

für das Minimum positiv, für das Maximum negativ sein, wenn ω einen beliebigen Werth erhält, der so klein sein kann, als man will.

62.

Um die erste Bedingung auf die allgemeinste Weise zu erfüllen, bemerken wir, dass weil die Grösse ω unbestimmt bleiben soll, die Stammgrösse von

$$[P =]\, \omega \frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dx} \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{d^2\omega}{dx^2} \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx}} \dots$$

nur von der Form

$$[Q =]\, \alpha + \omega\beta + \frac{d\omega}{dx}\gamma + \frac{d^2\omega}{dx^2}\varepsilon \dots$$

sein kann, wo die höchste Ordnung der Ableitungen $\frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2} \dots$ um Eins niedriger ist, als in der gegebenen Function, wovon man sich durch ein wenig Nachdenken über die Form der Ableitungen leicht überzeugen kann. [*Denn die Ableitung von Q ist, wenn z. B. das $m+1$ste Glied von Q, $\frac{d^m\omega}{dx^m}v$ wäre,*

$$\frac{dQ}{dx} = P = \frac{d\alpha}{dx} + \omega\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\omega}{dx}\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d^2\omega}{dx^2}\frac{d\varepsilon}{dx} \dots + \frac{d^m\omega}{dx^m}\frac{dv}{dx}$$
$$+ \frac{d\omega}{dx}\beta + \frac{d^2\omega}{dx^2}\gamma \dots + \frac{d^m\omega}{dx^2}v + \frac{d^{m+1}\omega}{dx^{m+1}}v,$$

wo, wie man sieht, die Ordnung der Ableitung von ω in P um Eins höher steigt als in Q.] Nimmt

man also die erste Ableitung dieser Grösse [Q], indem man α, β, γ.... als Functionen von x, und y ebenfalls als Function von x betrachtet, so erhält man

$$\frac{d\alpha}{dx}+\omega\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\omega}{dx}\left(\beta+\frac{dy}{dx}\right)+\frac{d^2\omega}{dx^2}\left(\gamma+\frac{d\varepsilon}{dx}\right)\ldots.$$

[*wie eben vorhin gezeigt ist.*] Vergleicht man diesen Ausdruck mit der gegebenen Function, $\left[P=\omega\frac{dv}{dy}+\frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}\ldots.\right]$ so erhält man [*wenn man die Coefficienten zu* ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx}$.... *gleich setzt*]

$$\frac{d\alpha}{dx}=0,\ \frac{d\beta}{dx}=\frac{dv}{dy},\ \beta+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}},\ \gamma+\frac{d\varepsilon}{dx}=\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx}}\ etc.$$

Die erste von diesen Gleichungen giebt $\alpha = Const.$ die anderen Gleichungen dienen zur Bestimmung von β, γ, ε...., und da leicht zu sehen, dass die Zahl dieser Grössen nothwendig um Eins kleiner ist, als die Zahl der Gleichungen, so entsteht daraus eine Bedingungs-Gleichung, welcher für das Maximum oder Minimum genuggethan werden muss.

Zu dem Ende darf man die Gleichungen nur auf folgende Form bringen

$$\frac{d\beta}{dx}=\frac{dv}{dy},\ \frac{d\beta}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^3\varepsilon}{dx^3}=\frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2}\ etc.$$

indem man nemlich von der zweiten die erste, von der dritten die zweite u. s. w. Ableitung [*nach* x] nimmt. Zieht man wechselseitig eine von der anderen ab, so erhält man

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2 \, d\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \frac{d^3 \, d\frac{dv}{d\frac{d^3y}{dx^3}}}{dx^3} \ldots = 0$$

[*weil nemlich, wenn man die Glieder der Gleichungen rechterhand wechselseitig von einander abzieht,* $\frac{d\beta}{dx} - \left(\frac{d\beta}{dx} + \frac{d^2\gamma}{dx^2}\right) + \frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^3\varepsilon}{dx^3}$ $-\left(\frac{d^3\varepsilon}{dx^3} + \frac{d^4\gamma}{dx^4}\right) \ldots = 0$ *ist.*]

Diese Gleichung entspricht also dem Maximo und Minimo zugleich, und dient zur Bestimmung des Werths von y in x. Die Ableitungs-Ordnung der Gleichung ist, wie leicht zu sehen, doppelt so hoch, als die Ordnung der gegebenen Function $f\left(x, \gamma, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2\gamma}{dx^2} \ldots\right)$ [*Diese Gleichung ist keine andere, als die in der Variations-Rechnung bekannte Bedingungs-Gleichung, für die Unabhängigkeit der veränderlichen Grössen x und y von einander. Alles Bisherige in diesem Abschnitte scheint noch etwas dunkel und muss es auch wohl sein, da Lagrange selbst, den Gegenstand in den leçons sur le calcul des fonctions wieder aufgenommen und deutlicher auseinander gesetzt hat. Man findet ihn daselbst klar und ausführlich vorgetragen. Uebrigens hat der gegenwärtige Vortrag einige Schwierigkeiten und erfordert in der That noch Modificationen für verwickeltere Fälle. Da die hierher gehörigen Erinnerungen und Erweiterungen für eine Einschaltung zu weitläuftig sind, so verweiset der Uebersetzer deshalb auf die zehnte Abhandlung im zweiten Bande seiner Samm-*

lung mathematischer Abhandlungen S. 44 etc. wo man einen weitern und elementaren Vortrag der Variations-Rechnung, durch mehrere und zum Theil neue Beispiele erläutert findet.]

63.

Die nemlichen Gleichungen

$$\beta + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}},\ \gamma + \frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx}} \ldots,$$

geben auf dieselbe Weise [*wenn man die Ableitungen davon nimmt und sie abwechselnd addirt und substrahirt*]

$$\beta = \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx}}}{dx} + \frac{d\frac{dv}{d\frac{d^3y}{dx}}}{dx^2} \ldots.$$

$$\gamma = \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx}}}{dx} \ldots.$$

$$\varepsilon = \frac{dv}{d\frac{d^3y}{dx^3}} \ldots.$$

Es sey, der Kürze wegen,

$$\omega\beta + \frac{d\omega}{dx}\gamma + \frac{d^2\omega}{dx^2}\varepsilon \ldots. = \Omega,$$

so ist die Stammgrösse von $\omega\frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dx} \cdot \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} \ldots,$ $= \alpha + \Omega$ und da diese Grösse, für $x = 0$, Null sein soll, so erhält man, wenn man den Werth von Ω, für $x = a$, durch A bezeichnet, weil α eine Con-

stante ist, $\alpha + A = 0$ und folglich $\alpha = -A$. Also ist $\Omega - A$ die Stammgrösse, welche, für $x = b$, ein Maximum oder Minimum sein soll. Bezeichnet man also den Werth von Ω, für $x = b$, durch B, so erhält man die Gleichung

$$B - A = 0,$$

welcher, vermittelst der Constanten, genuggethan werden muss, die in dem Ausdruck von y vorkommen, welchen man aus der obigen Gleichung erhält, bei welcher ausserdem die besonderen Bedingungen der Aufgabe berücksichtigt werden müssen.

So muss z. B. wenn der Werth von y für die Werthe a und b von x gegeben wäre, der Werth von ω in den beiden Grössen A und B Null sein. Wäre auch der Werth von $\frac{dy}{dx}$ für den nemlichen Werth von x gegeben, so muss auch $\frac{d\omega}{dx}$ in A und B gleich Null sein u. s. w.

Nachdem die Zahl der Grössen $\omega, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2} \ldots\ldots$ auf die möglich kleinste gebracht worden, so wohl in A, als in B, muss man die Coefficienten derer die übrig bleiben, um der Gleichung $B - A = 0$, unabhängig von diesen Grössen, ein Genüge zu thun, gleich Null setzen. [*Man sehe wegen dieses Alles den zweiten Theil und die oben angeführte Abhandlung.*]

64.

Nachdem auf diese Weise die erste Bedingung erfüllt worden, bleibt nur noch die zweite übrig, welche darin besteht, dass die Stammgrösse von

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 \frac{d^2(v)}{dy^2} + \omega \frac{d\omega}{dx} \frac{d^2(v)}{dy\, d\frac{dy}{dx}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \frac{d^2(v)}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2} \ldots,$$

zwischen den nemlichen Grenzen a und b von x, für das Minimum immer positiv, für das Maximum immer negativ sein soll, ω mag sein, was und so klein man will.

Ich bemerke zuförderst, dass sich, obgleich die Grössen $\frac{d^2(v)}{dy^2}$, $\frac{d^2(v)}{dy\, d\frac{dy}{dx}}$ *etc.* allerdings noch selbst die Grössen ω, $\frac{d\omega}{dx}$.... enthalten (61.), wie in (55.) zeigen lässt, dass es für das Maximum und Minimum hinreichend ist, wenn nur die Bedingung für $\lambda = 0$ erfüllt wird, wodurch die Grössen ω, $\frac{d\omega}{dx}$.... in $\frac{d^2(v)}{dy^2}$ $\frac{d^2(v)}{dy\, d\frac{dy}{dx}}$.... verschwinden und diese letzten Grössen blos in $\frac{d^2 v}{dy^2}$, $\frac{d^2 v}{dy\, d\frac{dy}{dx}}$.... übergehen, die kein ω, $\frac{d\omega}{dx}$.... mehr, sondern nur x, y, $\frac{dy}{dx}$.... enthalten.

Nun erinnere man sich des Lehrsatzes von (38. 1ster Theil) so folgt, dass die hier vorgeschriebene Bedingung erfüllt wird, sobald die gegebene Grösse $\tfrac{1}{2}\omega^2 \frac{d^2 v}{dy^2} + \omega \frac{d\omega}{dx} \frac{d^2 v}{dy\, d\frac{dy}{dx}}$.... von der Art ist, dass sie unabhängig von ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$...., für jeden Werth von x zwischen $x = a$ und $x = b$, ohne zu wechseln, positiv und negativ bleibt. [*In (38. 1. Theil) wurde nemlich bewiesen, dass, wenn der Werth*

irgend einer ***Ableitung****, wie* $\frac{dfx}{dx}$*, für alle Werthe von* x*, von* a *bis* b*, wo* $b > a$*, immer positiv ist, die Differenz der* ***Stammgrössen*** *der gegebenen Ableitung, wenn man darin* x *die nemlichen Werthe beilegt, also die Grösse* $fb - fa$*, nothwendig ebenfalls positiv ist. Die gegenwärtige Bedingung, dass die Stammgrösse von* $\frac{1}{2}w^2 \frac{d^2v}{dy^2} + \omega \frac{d\omega}{dx} \frac{d^2v}{dy\, d\frac{dy}{dx}} \ldots$*, von* a *bis* b*, positiv oder negativ sein soll, wird also erfüllt, sobald die Ableitung* $\frac{1}{2}\omega \frac{d^2\omega}{dy^2} + \omega \frac{d\omega}{dx} \frac{d^2v}{dy\, d\frac{dy}{dx}} \ldots$*, von* a *und* b*, selbst das Zeichen nicht wechselt.*] Da wir nun weiter oben in (56.) ganz allgemein die Bedingungen gefunden haben, unter welchen eine Grösse von der Form der gegenwärtigen, beständig positiv oder negativ ist, so darf man nur untersuchen, ob diese Bedingungen bei der gegenwärtigen Grösse zutreffen. Fänden sie nicht Statt, oder würden sie nur für einen Theil der Grösse erfüllt, so müsste man die Stammgrösse des übrigen Theils suchen und diesen Theil Null setzen, oder wenigstens machen, dass er, unabhängig von ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$, für das Minimum positiv, für das Maximum negativ ist.

65.

Um die Auflösung zu erleichtern, wollen wir annehmen, die gegebene Grösse enthielte nur allein die Quadrate und Producte der beiden Grössen ω und

$\frac{d\omega}{dx}$. Wie leicht zu sehen, ändert sich die Methode für verwickeltere Fälle nicht. Wir wollen also durch

$$[R=]\,\omega^2 M + \omega \frac{d\omega}{dx} N + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 P$$

denjenigen Theil der gegebenen Grösse bezeichnen, der, zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$, immer positiv oder negativ ist, so ist der andere Theil

$$\omega^2\left(\tfrac{1}{2}\frac{d^2v}{dy^2} - M\right) + \omega\frac{d\omega}{dx}\left(\frac{d^2v}{dy\,d\frac{dy}{dx}} - N\right)$$
$$+\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\frac{d^2v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2} - P\right).$$

[*Denn beide zusammen machen die gegebene Grösse* $\tfrac{1}{2}\omega^2\frac{d^2v}{dy^2} + \omega\frac{d\omega}{dx}\frac{d^2v}{dy\,d\frac{dy}{dx}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\frac{d^2v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2}$ *aus.*] Hiervon muss man also die Stammgrösse nehmen, und es ist leicht, sich im Voraus zu überzeugen, dass die Stammgrösse, wenn ω unbestimmt bleiben soll, nur die Form $\mu + \omega^2 v$ haben kann. [*Denn die erste Ableitung von dieser Grösse ist* $\frac{d\mu}{dx} + 2\omega\frac{d\omega}{dx}v + \omega^2\frac{dv}{dx}$ *welche mit der zurückzuleitenden Grösse, der Form nach, in so fern übereinkommt, dass beide die Coefficienten* ω^2 *und* $\omega\frac{d\omega}{dx}$ *enthalten.*] Nimmt man also [*die eben hergesetzte*] erste Ableitung von $\mu + \omega^2 v$ und vergleicht sie Glied um Glied mit der zurückzuleitenden Grösse, so erhält man

$$\frac{d\mu}{dx} = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = \tfrac{1}{2}\frac{d^2v}{dy^2} - M,$$

$$2v = \frac{d^2v}{dy\, d\frac{dy}{dx}} - N,$$

$$o = \tfrac{1}{2}\frac{d^2v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2} - P.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt $\mu = Const.$ die drei anderen dienen zur Bestimmung der Werthe von M, N und P, welche

$$M = \tfrac{1}{2}\frac{d^2v}{dy^2} - \frac{dv}{dx},$$

$$N = \frac{d^2v}{dy\, d\frac{dy}{dx}} - 2v,$$

$$P = \tfrac{1}{2}\frac{d^2v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

sind, und diese Werthe müssen nun den Bedingungen der Formeln in (56.) genugthun. Setzt man die gegenwärtigen Grössen $\frac{d\omega}{dx}$ und ω an die Stelle der dortigen p und q, und folglich P, N und M an die Stelle von A, B, woraus $M - \frac{N^2}{4P}$ [56.] $= T$ folgt, so erhält man für das Minimum die beiden Bedingungen $P > o$ und $T > o$, und für das Maximum die entgegengesetzten $P < o$ und $T < o$ [*das dortige* $A \gtrless o$ *und* $L \gtrless o$], oder auch, sowohl für das Maximum, als für das Minimum, eine der beiden Grössen P und T gleich Null. Und diese Bedingungen müssen erfüllt werden für alle x zwischen a und

a und b, wenn die Grösse $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 P + \omega \frac{d\omega}{dx} M$ $+ \omega^2 M$, zwischen den nemlichen Grenzen, im ersten Falle beständig positiv, im zweiten beständig negativ sein soll. Da P gegeben ist $\left[\textit{nemlich } P = \frac{1}{2} \frac{d^2 v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]$, so zeigt sie sogleich das Maximum oder Minimum an, aber man versichert sich von der Existenz desselben erst durch die andere Bedingung $T >$ oder < 0, oder $= 0$ für beide Fälle.

66.

Sodann ist es auch noch eine wesentliche Bedingung, dass die Grössen M, N, P zwischen den nemlichen Grenzen nicht unendlich gross sind, wenn man überzeugt sein will, dass die Stammgrösse der gegebenen Ableitung, nach (38. 1ster Theil) nothwendig positiv oder negativ ist. Denn da der Lehrsatz in (38. 1ster Theil) auf die Entwickelung der Functionen in Reihen nach positiven Potenzen des der veränderlichen Grösse beigefügten Wachsthums gegründet ist, so ist derselbe nothwendig den mit dieser Form der Entwickelung verbundenen Ausnahmen unterworfen, welche wir in (30. 1ster Theil) und in (13. 2ter Theil) näher untersucht haben. Die Anwendung desselben kann also aufhören, wenn die Ableitungen der gegebenen Grösse unendlich gross sind, weil alsdann nicht mehr die nemliche Form der Entwickelung Statt findet. Dieser Fall erfolgt nothwendig, sobald die Stammgrösse, wie etwa die Tangente eines Winkels, vom Positiven, durch das Unendliche hindurch, zum Negativen übergeht. In die-

sem Falle ist das erste Glied der Entwickelung der Function von $x+k$, für denjenigen Werth von x, der dem Uebergange entspricht, von der Form Ak^m, wo m eine ungrade negative Zahl ist, und die erste Ableitung, nebst allen folgenden, sind unendlich gross. In diesem [*Ausnahme*] Falle kann die Stammgrösse das Zeichen wechseln, während die erste Ableitung immer das nemliche Zeichen behält.

Um diesen Umstand an einem sehr einfachen Beispiele zu zeigen, darf man nur die Function $\frac{x}{1-x}$ nehmen, welche für $x=\frac{1}{2}$, 1 und für $x=2$, -2 ist. Gleichwohl ist ihre erste Ableitung $\left[\frac{1}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\right]\frac{1}{(1-x)^2}$ immer positiv, für jeden beliebigen reellen Werth von x. Hier ist die Stammgrösse mit allen ihren Ableitungen unendlich gross für $x=1$.

Dieses ist eine Modification des obigen Lehrsatzes [38. 1ster *Theil*], die aber auf den daraus in (39.) gezogenen Schluss keinen Einfluss hat.

67.

Nachdem die Bedingungen erfüllt worden, erhält man die Stammgrösse $\mu+\omega^2 v$, in welcher μ eine willkürliche Constante ist, die so bestimmt werden muss, dass die Stammgrösse Null ist, für $x=a$. Man setze $\omega^2 v=(\Omega)$ und den Werth von (Ω) für $x=a$, (A), so ist $\mu=-(A)$; also ist die vollständige Stammgrösse $[\mu+\omega^2 v]$

$$=(\Omega)-(A),$$

welche für das Minimum Null oder positiv, für das

Maximum negativ ist, wenn man $x = b$ setzt. Es sey also (B) der Werth von (Ω) für $x = b$, so muss $(B) - (A) > 0$ sein für das Minimum und < 0 für das Maximum, oder $= 0$ für beide Fälle, und zwar unabhängig von ω, welches unbestimmt bleiben muss.

Wäre der Werth von y für die Werthe a und b von x gegeben, so würde, weil alsdann der zugehörige Werth von ω Null ist, $(A) = 0$ und $(B) = 0$ sein, und die Bedingung wäre sowohl für das Maximum als Minimum erfüllt. Wäre aber der Werth von y nicht gegeben, so wäre für das Minimum $v =$ oder > 0 für $x = b$, und $v =$ oder < 0 für $x = a$, und für das Maximum $v = 0$ oder < 0 im ersten Fall und $v = 0$ oder > 0 im zweiten Fall.

Was die Grösse v betrifft, so hängt dieselbe blos von der Bedingung T oder $M - \frac{N^2}{4P} > 0$ für das Minimum und < 0 für das Maximum ab. [66.] Diese Bedingung giebt, wenn man die Werthe von M $\left[= \frac{1}{2}\frac{d^2v}{dy^2} - \frac{dv}{dx}\right]$, $N \left[= \frac{d^2v}{dy\, d\frac{dy}{dx}}\right]$ und P $\left[= \frac{1}{2}\frac{d^2v}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ 66.\right]$ substituirt,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dy^2} - \frac{dv}{dx} - \frac{\left(\frac{d^2v}{dy\, d\frac{dy}{dx}} - 2v\right)^2}{2\frac{d^2v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2}} > 0 \text{ oder } < 0,$$

wo man für v jede beliebige Function nehmen kann, welche dieser Bedingung genug thut.

Das Einfachste würde sein, $T = 0$ zu setzen (65.), welches giebt

$$4MP - N^2 = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{d^2v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(\frac{d^2v}{dy^2} - 2\frac{dv}{dx}\right) - \left(\frac{d^2v}{dy\, d\frac{dy}{dx}} - 2v\right)^2 = 0,$$

woraus man den Werth von v bestimmen könnte. Das Maximum oder Minimum würde dann blos von dem Zeichen der Grösse $P = \frac{1}{2}\frac{d^2v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2}$ abhängen [*weil, zufolge* 66. *die beiden Bedingungen* $P \gtrless 0$ *und* $T \gtrless 0$ *nöthig wären, jetzt aber* $T = 0$ *gesetzt worden ist, also blos noch die Bedingung* $P \gtrless 0$ *übrig bleibt.*]

Auf diese Weise würde man das nemliche Resultat erhalten, welches die, in den Mémoiren der Academie der Wissenschaften von 1786, vorgeschlagene Methode zur Unterscheidung der Maxima und Minima in der Variations-Rechnung giebt. Aber, der obigen Erinnerung zufolge, muss man sich noch, wenn das Resultat zuverlässig sein soll, überzeugen können, dass der Werth von v für keinen Werth von x zwischen a und b unendlich gross ist; welches zuweilen, wegen der Schwierigkeit, die Stammgleichung mit v und x zu finden, nicht wohl angeht. Ohne das ist man, obgleich die Grösse $\omega^2 M + \omega\frac{d\omega}{dx}N + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 P$ die Form $P\left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{\omega N}{2P}\right)^2$ annimmt und folglich immer positiv oder negativ ist, wenn P es ist, [*weil der Coefficient von* P *ein immer posi-*

tives Quadrat ist,] nie versichert, dass die Stammgrösse wirklich grösser oder kleiner als Null ist.

68.

Um ein Beispiel zu geben, welches zugleich zur Erläuterung der hier vorgetragenen Methode dienen kann, setze man, die Function [$v =$] $f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$ deren erste Stammgrösse ein Maximum oder Minimum sein soll, sey

$$[v =] \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2my\frac{dy}{dx} + ny^2.$$

Nimmt man die erste und zweite Ableitung, so erhält man

$$\frac{dv}{dy} = 2\left(m\frac{dy}{dx} + ny\right), \quad \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} = 2\left(\frac{dy}{dx} + my\right)$$

$$\frac{d^2v}{dy^2} = 2n, \quad \frac{d^2v}{dy\,d\frac{dy}{dx}} = 2m, \quad \frac{d^2v}{d^2\frac{dy}{dx}} = 2.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die allgemeine Gleichung (62.), welche für diesen Fall

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} = 0$$

ist, [*weil* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *etc. nicht vorkommt,*] so erhält man

$$2\left(m\frac{dy}{dx} + ny\right) - 2\left(\frac{d^2y}{dx} + m\frac{dy}{dx}\right) = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - ny = 0,$$

für die Gleichung des Maximi oder Minimi. Diese

Gleichung kann nach (55. 1ster Theil) zurückgeleitet werden und giebt

$$y = g e^{x\sqrt{n}} + h e^{-x\sqrt{n}},$$

wo g und h zwei willkürliche Constanten sind. Wäre n negativ, wie $-k^2$, so erhielte man, wenn man andere Constanten g und h nähme,

$$y = g \sin(kx + h).$$

Nun setze man, um den Fall zu vereinfachen, die Werthe von y wären für die beiden Grenzwerthe a und b von x gegeben, so sind die beiden Grössen A und B von selbst Null und die Gleichung $B = A$ ist schon erfüllt. (63.) Man darf also nur die Constanten a und b so bestimmen, dass y für $x = a$ und $x = b$ gegebene Werthe erhält.

Nun ist ferner, nach (65.)

$$M = n - \frac{dv}{dx}, \; N = 2(m - v), \; P = 1,$$

[*wenn man nemlich die, für das jetzige Beispiel, oben gefundenen Werthe von* $\frac{d^2v}{dy^2}, \frac{d^2v}{dy\, d\frac{dy}{dx}}$ *etc. substituirt*], woraus folgt, dass, weil $P > 0$ ist, nur allein ein Minimum Statt findet. Dieses Kennzeichen ist indessen nicht hinreichend, um von der Existenz des Minimi versichert zu sein; es muss auch $M - \frac{N^2}{4P} > 0$ oder $= 0$ sein.

Es sey erstlich $M - \frac{N^2}{4P} > 0$, so giebt dieses [*wenn man die Werthe von M, N und P substituirt*]

$$n - \frac{dv}{dx} - (m - v)^2 > 0,$$

wo für v eine Grösse genommen werden muss, die für kein x, zwischen a und b, unendlich ist. Ist n positiv, so ist klar, dass die Bedingung durch $v = m$ erfüllt werden kann. [*Denn dieses giebt* $n - \frac{dv}{dx}$, *oder, weil* $v = m = Const.$ *und folglich* $\frac{dv}{dx} = 0$ *ist*, $N > 0$ *wie gehörig.*] In diesem Falle also ist man von der Existenz des Minimi versichert, weil ausserdem die beiden Grössen (A) und (B) vermöge der Voraussetzung, dass die Werthe von y für $x = a$ und $x = b$ gegeben sind (67.) verschwinden. Ist hingegen n negativ, wie $-k^2$ so erhält man die Bedingung

$$-\frac{d\varrho}{dx} > k^2 + (m - v)^2$$

und es ist nicht leicht, einen entsprechenden Werth von v zu finden, oder auch nur zu sehen, dass er sich finden lasse.

Es sey zweitens $M - \frac{N^2}{4P} = 0$, so erhält man

$$-\frac{dv}{dx} = k^2 + (m - v)^2.$$

Man setze

$$m - v = k\varrho,$$

so ist

$$\frac{d\varrho}{dx} : k = 1 + \varrho^2,$$

[*denn es ist* $v = m - k\varrho$, *also* $\frac{dv}{dx} = -\frac{kd\varrho}{dx}$ *und folglich* $\frac{kd\varrho}{dx} = k^2 + k^2\varrho^2$, *also* $\frac{d\varrho}{dx} : k = 1 + \varrho^2$]

welches giebt

$$\frac{d\varrho}{dx} : (1 + \varrho^2) = k,$$

und wenn man auf beiden Seiten die Stammgrössen nimmt:

$$Arc\ tang\ \varrho = kx + l, \text{ oder}$$
$$\varrho = tang\,(kx + l),$$

wo l eine willkürliche Constante bedeutet. Dieser Werth ist unendlich gross für $kx + l = \frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ *etc.* Also ist die Existenz des Minimi nicht sicher, sobald $(b - a)\,k$ grösser ist als zwei rechte Winkel.

Denn nach (64.) muss, wenn das Minimum allgemein Statt finden soll, die Grösse $n\,\omega^2 + 2\,m\,\omega\,\frac{d\omega}{dx} + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2$ positiv sein, was auch ω sey. Man setze $\omega = i\ sin\,x$, so geht die eben genannte Grösse in folgende über:

$$i^2\,(n\,sin\,x^2 + 2m\,sin\,x\,cos\,x + cos\,x^2)$$
$$\Big[= i^2\,(cos\,x^2 + n\,(1 - cos\,x^2) + 2m\,sin\,x\,cos\,x)$$
$$= i^2\left(cos\,x^2 - n\,cos\,x^2 - \frac{1-n}{2} + \frac{1+n}{2} + 2m\,sin\,x\,cos\,x\right)$$
$$= i^2\left(\frac{(1-n)(2\,cos\,x^2 - 1)}{2} + \frac{1+n}{2} + 2\,m\,sin\,x\,cos\,x\right)\Big]$$
$$= i^2\left(\frac{1+n}{2} + \frac{1-n}{2}\,cos\,2x + m\,sin\,2x\right),$$

wovon die Stammgrösse

$$i^2\left(\frac{1+n}{2}\,x + \frac{1+n}{4}\,sin\,2x - \tfrac{1}{2}\,m\,cos\,2x\right) + c$$

ist, wo c die willkürliche Constante bedeutet, die so bestimmt werden muss, dass die Stammgrösse für $x = a$ verschwindet. Hernach setzt man $x = b$. Setzt man also $a = 0$ und $b = \pi$, damit ω für $x = a$ und $= b$ nach der Voraussetzung Null sey,

so erhält man $c = \frac{i^2 m}{2}$ und der vollständige Werth der Stammgrösse ist $i^2 (1 + n) D$, wo D einen rechten Winkel bedeutet und es ist klar, dass dieser Werth für $n = -k^2$ negativ sein kann, wenn man $k > 1$ nimmt.

69.

Wir wollen nun ferner annehmen, dass in der Grösse welche ω, $\frac{d\omega}{dx}$ *etc.* in zwei Abmessungen enthält, auch $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ vorkomme, so dass sie von der Form

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 \frac{d^2 v}{dy^2} + \omega \frac{d\omega}{dx} \frac{d^2 v}{dy \cdot d\frac{dy}{dx}} + \tfrac{1}{2}\omega^2 \frac{d^2 v}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \omega \frac{d^2\omega}{dx^2} \frac{d^2 v}{dy\, d\frac{d^2 y}{dx^2}}$$
$$\frac{d\omega}{dx} \frac{d^2\omega}{dx} \frac{d^2 v}{d\frac{dy}{dx}\, d\frac{d^2 y}{dx^2}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2 \frac{d^2\omega}{\left(d\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2}$$

ist. (61.) Derjenige Theil dieser Grösse, welcher den Bedingungen von (56.) unterworfen werden soll, sey

$$\omega^2 M + \omega \frac{d\omega}{dx} N + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 P + \omega \frac{d^2\omega}{dx^2} Q + \frac{d\omega}{dx} \frac{d^2\omega}{dx^2} R$$
$$+ \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2 S,$$

so muss der Unterschied beider Grössen, unabhängig von ω, eine Stammgrösse haben können. Diese Stammgrösse kann also nur die Form

$$\mu + \omega^2 \nu + \omega \frac{d\omega}{dx} \pi + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \varrho$$

haben [*aus einem ähnlichen Grunde wie oben*] und man findet, wenn man [*davon die erste Ableitung nimmt und*] die Glieder vergleicht

$$\frac{d\mu}{dx} = 0,$$

$$\frac{d\nu}{dx} = \tfrac{1}{2}\frac{d^2 v}{dy^2} - M,$$

$$2\nu + \frac{d\pi}{dx} = \frac{d^2 v}{dy\, d\frac{dy}{dx}} - N,$$

$$\pi + \frac{d\varrho}{dx} = \tfrac{1}{2}\frac{d^2 v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2} - P,$$

$$\pi = \frac{d^2 v}{dy\, d\frac{d^2 y}{dx^2}} - Q,$$

$$2\varrho = \frac{d^2 v}{d\frac{dy}{dx}\, d\frac{d^2 y}{dx^2}} - R,$$

$$0 = \frac{d^2 v}{\left(d\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2} - S,$$

welche

$$\mu = Const.$$

$$M = \frac{d^2 v}{dy^2} - \frac{d\nu}{dx},$$

$$N = \frac{d^2 v}{dy\, d\frac{dy}{dx}} - 2\nu - \frac{d\pi}{dx},$$

$$P = \tfrac{1}{2}\frac{d^2 v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2} - \pi - \frac{d\varrho}{dx},$$

$$Q = \frac{d^2 v}{dy\, d\frac{d^2 y}{dx^2}} - \pi,$$

$$R = \frac{d^2 v}{d\frac{dy}{dx}\, d\frac{d^2 y}{dx^2}} - 2\varrho,$$

$$S = \tfrac{1}{2}\frac{d^2 v}{\left(d\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2}$$

geben, wo die drei Grössen ν, π, ϱ unbestimmt bleiben. Man muss jedoch dieselben so annehmen, dass sie den Bedingungen entsprechen, welchen die Grössen M, N, P *etc.* unterworfen sind, und welche man aus (56.) finden kann, wenn man die Grössen $\frac{d^2\omega}{dx^2}$, $\frac{d\omega}{dx}$ und ω statt p, q, r setzt. Nennt man also

$$P - \frac{R^2}{4S} = T,\ N - \frac{QR}{2S} = V,$$

$$M - \frac{Q^2}{4S} = X,\ X - \frac{V^2}{4T} = Y,$$

so sind die Bedingungen des Minimi

$$S > 0,\quad T > 0 \text{ und } Y > 0$$

und die Bedingungen des Maximi

$$S < 0,\quad T < 0 \text{ und } Y < 0,$$

und diese Bedingungen müssen für alle Werthe von x, von $x = a$ bis $x = b$, erfüllt werden. Der Werth von S zeigt das Maximum oder Minimum an, aber man wird von dessen Existenz nur durch die beiden anderen Bedingungen zugleich, versichert. Ferner dürfen die Grössen M, N, P, Q, R, S zwischen den nemlichen Grenzen nie unendlich gross sein, aus den oben (66.) angezeigten Gründen.

Endlich muss, wenn man $\omega^2\nu + \omega\frac{d\omega}{dx}\pi + \left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\varrho = (\Omega)$ setzt und die zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Werthe von (Ω), (A) und (B) nimmt, die Grösse $(B) - (A)$ für das Minimum positiv, für das Maximum negativ sein, unabhängig von ω und $\frac{d\omega}{dx}$ (67.)

Das Verfahren bleibt das Nemliche für noch mehr zusammengesetzte Grössen.

70.

Wären die Werthe von $y, \frac{dy}{dx} \ldots$ für die Werthe a und b von x nicht gegeben, sondern es fände blos ein, durch die Aufgabe bedingtes, und durch die Gleichung

$$[t =] \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right) = 0$$

ausgedrücktes Verhältniss zwischen diesen Grössen Statt, so dürfte man nur, nach (58.) zu der Function, welche für das Minimum positiv, für das Maximum negativ sein soll, die Grösse

$$\omega \frac{dt}{dy} + \frac{d\omega}{dx} \cdot \frac{dt}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{d^2\omega}{dx^2} \cdot \frac{dt}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}\omega^2 \frac{d^2 t}{dy^2} + \omega \frac{d\omega}{dx} \frac{d^2 t}{dy\, d\frac{dy}{dx}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\omega^2}{dx}\right) \frac{d^2 t}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2} \ldots$$

addiren, nachdem sie durch irgend einen unbestimmten Coefficienten σ multiplicirt worden. Ist dieses geschehen, so kann man die Grössen $\omega, \frac{d\omega}{dx}$ als unabhängig betrachten. [*Dieses ist, hier in der Variations-Rechnung, die oben in* (58.) *erwähnte Methode, gegebene Bedingungs-Gleichungen in Rechnung zu bringen.*] Soll also die Bedingung für den Werth a von x erfüllt werden, so muss man zu den beiden Grössen A und (A) (63. 67.) die Grössen

$$\sigma\left(\omega \frac{dt}{dy} + \frac{d\omega}{dx} \frac{dt}{d\frac{dy}{dx}} \ldots\right) \text{ und}$$

$$\sigma\left(\frac{1}{2}\,\omega^2\,\frac{d^2 t}{dy^2}+\omega\,\frac{d\omega}{dx}\,\frac{d^2 t}{dy\,d\frac{dy}{dx}}\cdots\right)$$

für den nemlichen Werth von x addiren und wenn die Bedingung für $x = b$ erfüllt werden sollte, so müsste man zu den Werthen von B und (B) die nemlichen Grössen für den Werth b von x hinzuthun.

Das Verfahren findet Statt für jede gegebene Bedingungs-Gleichung, wenn deren mehrere vorhanden sein sollten.

[*Die Entscheidung, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden sey, erfordert, wie man hier sieht, besonders in der Variations-Rechnung, mühsame und verwickelte Rechnungen. In vielen Fällen kann man aus der Aufgabe selbst leichter erkennen, ob der vorhandene Wechsel des Zunehmens und Abnehmens der gegebenen Grösse, einem grössten oder einem kleinsten Werthe entspreche.*]

Dreizehnter Abschnitt.

Ausdehnung der obigen Methode auf Functionen einer beliebigen Zahl veränderlicher Grössen. Aufgabe von der Brachystochrone. Kennzeichen an einer gegebenen Grösse, ob sie eine Ableitung erster, oder überhaupt beliebiger Ordnung sey.

71.

Die gegebene Function, von welcher die Stammgrösse ein Grösstes oder Kleinstes sein soll, könnte, ausser den veränderlichen Grössen x und y, noch eine dritte, von jenen beiden unabhängige veränderliche Grösse z enthalten. Man kann in diesem Falle mit z eben so verfahren wie mit y. Ist also die gegebene Function

$$[=v=]\, f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \dots\right)$$

so setze man $y+\omega$ und $z+\zeta$ zugleich statt y und z. Hat man darauf die Grösse entwickelt, so muss die Stammgrösse desjenigen Theils der Entwickelung, welcher $\omega, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2} \dots \zeta, \frac{d\zeta}{dx}, \frac{d^2\zeta}{dx^2} \dots$ nur in einer Abmessung enthält, Null sein, die Stammgrösse desjenigen Theils hingegen, welcher diese Grössen in zwei Abmessungen enthält, muss für das Minimum positiv, für das Maximum negativ sein, unabhängig von ω und ζ.

Hieraus folgen, aus ähnlichen Gründen, wie in (62.) die beiden Gleichungen

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots\ldots = 0,$$

$$\frac{dv}{dz} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dz}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2z}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots\ldots = 0,$$

welche zur Bestimmung der Grössen y und z in x dienen. [*Man findet Alles dieses ausführlicher im zweiten Theil.*] Sodann muss man, hinsichtlich der Grössen z und ζ, ähnliche Bedingungen erfüllen, wie oben für y und ω. Die weitere Auseinandersetzung würde uns zu weit führen· Wir überlassen sie dem Leser. [*Man findet sie im zweiten Theil.*]

Man sieht hieraus, dass man, wenn eine vierte Grösse u vorhanden wäre, in Hinsicht auf diese Grösse eine ähnliche Gleichung erhalten würde, wie oben für y und z u. s. w.

72.

Hinge aber, in der Grösse v, die Grösse z von x und y auf irgend eine durch die Gleichung

$$[t =]\, \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\ldots z, \frac{dz}{dx} \ldots\ldots\right) = 0$$

gegebene Weise ab, so müsste man, nach (58.) die Function t, nachdem sie mit irgend einem unbestimmten Coefficienten $\triangle$ multiplicirt worden, zu v addiren. Alsdann kann man das Maximum oder Minimum der Stammgrösse dieser zusammengesetzten Function nach der obigen Methode finden, und dabei y und z als unabhängig von einander betrachten.

Man findet also, zunächst, für das Maximum und Minimum, die beiden Gleichungen

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots$$

$$+ \triangle\frac{dt}{dy} - \frac{d\left(\triangle\frac{dt}{d\frac{dy}{dx}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\triangle\frac{dt}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\right)}{dx^2} \ldots = 0$$

und

$$\frac{dv}{dz} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dz}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2z}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots$$

$$+ \triangle\frac{dt}{dz} - \frac{d\left(\triangle\frac{dt}{d\frac{dz}{dx}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\triangle\frac{dt}{d\frac{d^2z}{dx^2}}\right)}{dx^2} - \ldots = 0.$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen die Grösse $\triangle$, so erhält man eine Gleichung, welche, mit der gegebenen Bedingungs-Gleichung $t = 0$ verbunden, zur Bestimmung der Werthe y und z in x dient.

Sollte endlich die Stammgrösse von v nur in so fern ein Maximum oder Minimum sein, als die Stammgrösse einer anderen Function $[t =]\ \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$, zwischen den nemlichen Werthen a und b von x, einen gegebenen Werth hat, so dürfte man nur das Maximum oder Minimum der Summe der beiden Stammgrössen suchen, nachdem die zweite mit einem unbestimmten und von x unabhängigen Coefficienten multiplicirt worden, das heisst, das Maximum oder Minimum der Stammgrösse von

$f(x, y,$

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right) + \Delta \varphi \left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right),$$

wo Δ eine Constante ist. Dann hat man zunächst die Gleichung

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots$$

$$+ \Delta\frac{dt}{dy} - \Delta\frac{d\frac{dt}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \Delta\frac{d^2\frac{dt}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots = 0.$$

Die Constante Δ wird so bestimmt, dass die Stammgrösse von t, von $x = a$ bis $x = b$ genommen, den gegebenen Werth erhält u. s. w. [*Auch über diesen Fall bedingter oder relativer Maxima und Minima findet man ausführlichere Auskunft im zweiten Theil. Dort zeigt sich auch, warum, in diesem letzten Falle, hier,* Δ *eine Constante ist, was nicht unmittelbar folgt.*]

73.

Die isoperimetrischen Aufgaben und diejenigen von der Brachystochrone, welche die beiden Brüder Bernoulli vorlegten und auflöseten, öffneten der Behandlung dieser neuen Art von Aufgaben über die Grössten und Kleinsten, den Weg. Man hat seitdem allmälig allgemeinere und einfachere Methoden gefunden und ist endlich auf die Variations-Rechnung gekommen, welche für diesen Gegenstand nichts zu wünschen übrig zu lassen scheint. Da die oben (62. und 70.) gefundenen Gleichungen, bis auf die Bezeichnung, die nemlichen sind, welche der Variations-

Calcul giebt, so sind hier keine besondere Beispiele nöthig; aber es scheint nicht unnütz, den Gebrauch der Regeln für die Unterscheidung der Maxima und Minima und den Beweis der Existenz derselben noch an einem bekannten Beispiele zu zeigen.

Wir wollen dazu, wegen ihrer Berühmtheit, die Aufgabe von der Brachystochrone, oder von der Linie des schnellsten Falles nehmen; sie besteht, wie bekannt, darin, die Curve zu finden, nach welcher ein schwerer Körper in der kürzesten Zeit von einem gegebenen Puncte nach einem, in einer anderen Verticale liegenden, anderen gegebenen Puncte gelanget. Da, nach den Grundsätzen der Mechanik, die erste Ableitung der Zeit gleich ist der ersten Ableitung des durchlaufenen Raumes, dividirt durch die Geschwindigkeit, und die Geschwindigkeit fallender schwerer Körper sich wie die Quadratwurzel der Höhen verhält, von welchen die Körper herabgefallen sind, so ist die Geschwindigkeit, wenn man die von dem Körper beschriebene Curve auf drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z bezieht und die Abscisse x vertical annimmt, der Grösse $\sqrt{(h+x)}$ proportional [*h ist die Höhe, von welcher der Körper, schon vor dem Anfange der Bewegung, in der Curve herabgefallen ist*]. Ferner ist die erste Ableitung des Curven-Bogens $\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}$ (37.); also ist die Grösse $\frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}}{\sqrt{(h+x)}}$ der ersten Ableitung der Zeit proportional, von welcher Grösse also die Stammgrösse ein Minimum sein soll. Man erhält folglich

$$[v=]f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots z, \frac{dz}{dx} \ldots\right) = \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}}{\sqrt{(h+x)}}.$$

Nimmt man hiervon die ersten Ableitungen, so erhält man

$$\frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}},$$

$$\frac{dv}{dz} = 0, \quad \frac{dv}{d\frac{dz}{dx}} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}},$$

welches, nach (70.) die Gleichungen

$$\frac{d\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}}\right)}{dx} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{d\left(\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}}\right)}{dx} = 0$$

giebt, woraus die beiden Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}} = m \text{ und}$$

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)}} = n,$$

folgen, wo m und n zwei willkürliche Constanten bedeuten.

Dividirt man diese Gleichungen, eine durch die

andere, so erhält man $\frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx} = \frac{m}{n}$, also $\frac{dz}{dx} = \frac{m}{n} \cdot \frac{dy}{dx}$, und wenn man hiervon die Stammgleichung nimmt,

$$z = \frac{m}{n} y + l,$$

wo l eine neue willkürliche Constante bedeutet. Da diese Gleichung die einer Ebene, und zwar einer verticalen Ebene ist, indem die verticale Abscisse x nicht darin vorkommt, so folgt, dass die gesuchte Curve ganz in einer solchen verticalen Ebene liegt. Legt man also die Axe der y in die nemliche Ebene, so kann man $z = 0$ setzen, indem man zugleich $n = 0$ und $l = 0$ setzt. Es bleibt auf diese Weise für die Curve blos die eine Gleichung

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(h+x)}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}} = m$$

übrig, woraus folgt $\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2(h+x)\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\right.$, *oder* $\left.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (1 - m^2(h+x)) = m^2(h+x),\ \textit{also}\right]$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\sqrt{(h+x)}}{\sqrt{(1-m^2(h+x))}},$$

welches die Gleichung der Cycloïde ist, wenn man die Abscisse x im Durchmesser des beschreibenden Kreises, und die Ordinate y darauf senkrecht annimmt.

Da vorausgesetzt wird, dass die beiden Endpuncten der Curve gegeben sind, so sind die Grössen ω und ζ, welche sich auf diese Endpuncte beziehen

Null, und auch die Grössen A und B sind Null, wenn man a und b für diejenigen Werthe von x nimmt, welche den Endpuncten entsprechen. Also wird die Bedingung $B - A = 0$ von selbst erfüllt. Machte man für die Endpuncte andere Voraussetzungen, so würde man andere Resultate finden. Wir wollen uns dabei nicht aufhalten, weil diese verschiedenen Fälle schon in der Variations-Rechnung untersucht und aufgelöset sind. Dagegen wollen wir sehen, was die Glieder geben, die ω und ζ in zwei Abmessungen enthalten und von welchen die Stammgrösse positiv sein muss, wenn das Minimum wirklich Statt finden soll.

Da die gegebene Function $f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots z, \frac{dz}{dx} \ldots\right) = v$ in dem gegenwärtigen Falle, die Grössen y und z gar nicht enthält, sondern blos ihre ersten Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dz}$, so ist leicht zu sehen, dass die erwähnten Glieder blos die Form

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 \frac{d^2v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{d\omega}{dx}\frac{d\zeta}{dx}\frac{d^2v}{d\frac{dy}{dx}d\frac{dz}{dx}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 \frac{d^2v}{\left(d\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

haben können und man findet, wenn man die ersten Ableitungen der Grössen $\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}$ und $\frac{dv}{d\frac{dz}{dx}}$ nach $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ nimmt,

$$\frac{d^2v}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{\sqrt{(h+x)}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2 v}{d\frac{dy}{dx}\, d\frac{dz}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}}{\sqrt{(h+x)}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2 v}{d\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\sqrt{(h+x)}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

so, dass die Grösse, auf welche es ankommt [*die vorhin angegebene*],

$$\frac{\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) - 2\frac{d\omega}{dx}\frac{d\zeta}{dx}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{2\sqrt{(h+x)}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ist, welches sich auf

$$\frac{\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dx}\frac{dz}{dx} - \frac{d\zeta}{dx}\frac{dy}{dx}\right)^2}{2\sqrt{(h+x)}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

bringen lässt, welche Grösse, wie man sieht, von selbst die Eigenschaft hat, dass sie nothwendig immer positiv ist, was auch ω und ζ sein mögen, [*weil der Zähler, worin ω und ζ vorkommen, aus lauter Quadraten besteht, die immer positiv sind,*] und da die Grösse ausserdem nie unendlich gross werden kann, so lange nicht $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ unendlich gross sind, so folgt, dass in der Cyclöide das Minimum nothwendig Statt findet. [*Man kann auch neben der Cyclöide irgend eine andere Linie annehmen, und die Resultate der Auflösung für beide vergleichen, so zeigt sich ob die Cyclöide ein Maximum oder Minimum giebt.*]

Wir wollen uns nicht weiter in das Detail

dieser Aufgabe einlassen, welche verschiedene Fälle darbietet, je nachdem verschiedene Bedingungen für die Anfangs- und Endpuncte der Curve, so wie für die Curve selbst, die man z. B. in einer gegebenen Fläche liegend verlangen kann, gegeben sind. Die Auflösung aller dieser Fälle ist, nach den obigen Grundsätzen, leicht. Man sehe das Ende der 22sten Vorlesung über die Functionen-Rechnung.

74.

Die obige Untersuchung der Maxima und Minima von Stammgrössen veranlasst noch eine wichtige Bemerkung. Wir haben nemlich oben (62.) gefunfunden, dass, wenn die Grösse

$$\omega \frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dx} \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{d^2\omega}{dx^2} \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \ldots$$

eine Stammgrösse haben soll, was auch ω ist, der Gleichung

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots = 0$$

ein Genüge geschehen muss. Wäre also diese Grösse sebst die Stammgrösse irgend einer Function von x, y, $\frac{dy}{dx} \ldots \omega$, $\frac{d\omega}{dx} \ldots$, so würde die vorstehende Gleichung von selbst erfüllt werden und folglich idenisch sein.

Nun aber folgt aus (61.) dass die Grösse, von welcher die Rede ist, nichts anders ist, als derjenige Theil der Entwickelung von

$$f\left(x,\, y+\omega,\, \frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx},\, \frac{d^2y}{dx}+\frac{d^2\omega}{dx} \dots\right),$$

welcher ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ nur in einer Abmessung enthält und, wie wir sogleich sehen werden, ist diese Grösse nothwendig allein eine erste Ableitung, sobald $f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \frac{d^2y}{dx^2} \dots\right)$ die erste Ableitung irgend einer Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$ ist.

Denn, wenn diese Function eine erste Ableitung ist, welches auch der Werth von y in x sein mag, so ist sie es auch nothwendig noch, wenn man $y+\omega$ statt y setzt, was auch ω sein mag. Also ist auch die Function $f\left(x,\, y+\omega,\, \frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx} \dots\right)$ nothwendig eine erste Ableitung, wenn ω irgend eine Function von x bedeutet. Man setze, diese Function sey nach Potenzen und Producten von ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ entwickelt, und bezeichne durch P, Q, R diejenigen Theile der Entwickelung, welche ω, $\frac{d\omega}{dx}$ in einer zwei, drei Abmessungen u. s. w. enthalten, so erhält man

$$f\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx}+\frac{d\omega}{dx} \dots\right) = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots\right) + P + Q + R \dots$$

Also muss $P+Q+R$ die erste Ableitung irgend einer Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$ und von ω, $\frac{d\omega}{dx}$... sein, und es ist leicht zu sehen, dass die Grössen P, Q, R, einzeln, erste Ableitungen sein mü-

sen, weil sie ω und dessen Ableitungen $\frac{d\omega}{dx}$ *etc.* in verschiedenen, Abmessungen enthalten und es nach der Natur der Ableitungen unmöglich ist, dass die Stammgrössen von P, Q, R von einander abhängen. Nun ist

$$P = \omega \frac{dv}{dy} + \frac{d\omega}{dx} \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{d^2\omega}{dx^2} \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \dots \quad (61.)$$

also ist diese Grösse selbst eine erste Ableitung. Folglich ist, endlich, wenn die Function $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots\right)$ eine erste Ableitung ist, die Gleichung

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \dots = 0$$

nothwendig identisch.

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass, wenn diese Gleichung identisch ist, die Function $f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots\right) = v$ nothwendig eine erste Ableitung sein muss. Denn wir haben gesehen, dass die Grösse P, wenn diese Gleichung erfüllt wird, eine erste Ableitung ist, was auch y und ω sein mögen. Also ist sie es auch noch, wenn man $y + \omega$ statt y setzt. Angenommen, die Grösse P gehe durch diese Substitution und durch die Entwickelung nach den verschiedenen Abmessungen von ω, $\frac{d\omega}{dx}$ *etc.* in $P + p$ *etc.* über, wo die Grösse p die ersten Glieder der Entwickelung bezeichnet, welche ω, $\frac{d\omega}{dx}$ nur in zwei Abmessungen enthalten, so folgt daraus, wie oben, dass die Grösse p

für sich allein, die erste Ableitung irgend einer Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$ ω, $\frac{d\omega}{dx}$ ist. Nun aber ist aus den allgemeinen Formeln von (76. 1ster Theil) leicht zu sehen, dass $p = 2Q$; also ist die Grösse Q eine erste Ableitung, was auch y und ω sein mögen, also ist sie es auch noch, wenn man $y + \omega$ statt y setzt. Nimmt man ferner an, diese Function gehe durch die Substitution von $y + \omega$ statt y und durch die Entwickelung nach Potenzen und Producten von ω, $\frac{d\omega}{dx}$ in $Q + q$ über, wo q die ersten Glieder der Entwickelung bezeichnet, welche ω, $\frac{d\omega}{dx}$ nur in drei Abmessungen enthalten, so folgt, wie oben, dass die Grösse q wieder für sich allein eine erste Ableitung ist. Nun findet man, nach den Formeln von (76. 1ster Theil) $q = 3R$, also ist die Grösse R für sich allein eine erste Ableitung u. s. w. Denn in der That, wenn r, s die ersten Glieder der Entwickelung der Grössen R, S sind und man darin $y + \omega$ statt y setzt, so erhält man $r = 4S$, $s = 5T$ *etc.* (76. 1ster Theil) woraus, wie oben, folgt, dass auch die Grössen S, T...., einzeln, erste Ableitungen sind.

Also ist die ganze Reihe $P + Q + R$.... nothwendig die erste Ableitung irgend einer Function von x, y, $\frac{dy}{dx}$ ω, $\frac{d\omega}{dx}$, welches auch die Werthe von y und ω in x sein mögen. Folglich ist die Grösse

$$f\left(x, y + \omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx} \ldots\right) - f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right),$$

welche diese Reihe ausdrückt, nothwendig eine erste

Ableitung, wenn man ω einen beliebigen Werth giebt, mithin auch, wenn man $\omega = -y$ setzt. In diesem Falle aber ist $f\left(x, y+\omega, \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx} \ldots\right)$ nur noch eine Function von x allein, ohne y und ω, die also immer als eine erste Ableitung irgend einer Function von x betrachtet werden kann. Also ist $f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$ selbst nothwendig eine erste Ableitung irgend einer Function von $x, y, \frac{dy}{dx} \ldots$.

75.

Es folgt daraus, dass die Gleichung

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots = 0$$

diejenige ist, an welcher sich erkennen lässt, ob die gegebene Function $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$ eine erste Ableitung ist, oder nicht.

Auf dieselbe Weise findet man, dass die beiden Gleichungen

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots = 0,$$

$$\frac{dv}{dz} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dz}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2z}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots = 0,$$

es sind, an welchen sich erkennen lässt, ob die Function $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots z, \frac{dz}{dx} \ldots\right)$, in welcher

y und z von einander unabhangig sind, eine erste Ableitung ist, oder nicht.

Hinge die Grösse z von der Gleichung

$$t = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right) = 0$$

ab, so erhielte man, wie in (71.)

$$\frac{dv}{dy} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots$$

$$+ \triangle \frac{dt}{dy} - \frac{d\frac{\triangle dt}{d\frac{dy}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{\triangle dt}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots = 0$$

$$\frac{dv}{dz} - \frac{d\frac{dv}{d\frac{dz}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^2z}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots$$

$$+ \triangle \frac{dt}{dz} - \frac{d\frac{\triangle dt}{d\frac{dz}{dx}}}{dx} + \frac{d^2\frac{\triangle dt}{d\frac{d^2z}{dx^2}}}{dx^2} - \ldots = 0$$

und an der Gleichung die man erhält, wenn man $\triangle$ eliminirt, lässt sich erkennen, ob die Function $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots z, \frac{dz}{dx} \ldots\right)$ eine erste Ableitung ist, oder nicht.

Weil die Stammgrösse der Grösse

$$\omega \frac{dy}{dx} + \frac{d\omega}{dx} \frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} + \frac{d^2\omega}{dx^2} \frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}} \ldots$$

durch

$$\omega\beta + \frac{d\omega}{dx}\gamma + \frac{d^2\omega}{dx^2}\varepsilon \ldots$$

ausgedrückt werden kann (62.) wenn man, welches angeht, die willkürliche Constante α weglässt, so findet man, auf dieselbe Weise, dass sich an der Gleichung

$$\beta - \frac{dy}{dx} + \frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - \ldots = 0$$

erkennen lässt, ob die Stammgrösse selbst wieder eine erste Ableitung ist, oder nicht. Diese Gleichung ist, wenn man statt β, γ, ε.... ihre Werthe (63.) substituirt,

$$\frac{dv}{d\frac{dy}{dx}} - 2\frac{d\frac{dv}{d\frac{d^2y}{dx^2}}}{dx} + 3\frac{d^2\frac{dv}{d\frac{d^3y}{dx^3}}}{dx^2} - \ldots = 0.$$

Also lässt sich an dieser Gleichung, zusammen mit der vorhin gefundenen, erkennen, ob die Function $v = f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots\right)$ eine zweite Ableitung irgend einer Function von $x, y, \frac{dy}{dx} \ldots$ ist, oder nicht u. s. w.

76.

Diese verschiedene Gleichungen sind diejenigen, welche in der Differential-Rechnung **Bedingungen der Integrabilität** heissen und mit welchen man sich neuerdings viel beschäftigt hat. Wir begnügen uns hier, direct und strenge das Princip des Zusammenhanges dieser Gleichungen mit denen des Maximi oder Minimi der Stammgrössen gezeigt zu haben. Wir verweisen, wegen der Anwendungen dieser Bedingungs-Gleichungen, auf die davon handelnden Schriften und besonders auf die 21ste der Vorlesungen über die Functionen-Rechnung [*im zweiten Theil*], wo man

diesen Gegenstand noch ausführlicher und allgemeiner vorgetragen findet [*weswegen auch alle weitere Erläuterungen hier unterblieben sind. Man sehe auch die oben erwähnte Abhandlung des Herausgebers über die Variations-Rechnung in dem ersten Theil seines Versuches über die Rechnung mit veränderlichen Grössen.*] Man findet in der genannten 21sten Vorlesung auch eine kurze Geschichte der isoperimetrischen Aufgaben, deren allgemeine Auflösung durch die Variations-Rechnung den Gegenstand der 22sten Vorlesung über die Functionen-Rechnung ausmacht, auf welche wir, wegen der Vervollständigung der obigen Theorie der Variations-Rechnung verweisen.

Vierzehnter Abschnitt.

Von der Berechnung des Inhalts und der Oberfläche von Körpern von gegebener Gestalt.

77.

Wir haben im sechsten Abschnitt gezeigt, wie durch die Functionen-Rechnung das Volumen und die Oberfläche von Conöiden, die durch die Umdrehung einer Curve um ihre Axe entstehen, ausgedrückt werden können. Es bleibt noch übrig, diese Analyse auf beliebige Körper auszudehnen, deren Oberfläche durch eine Gleichung zwischen drei Coordinaten ausgedrückt ist.

Man nehme einen Körper, dessen Oberfläche die Gleichung

$$z = fxy$$

bezeichnet, so lässt sich sein Volumen allgemein durch eine Function von x und y ausdrücken, welche wir durch Fxy [$= u$] bezeichnen wollen [*eigentlich durch eine von* x, y *und* z *abhängige Grösse, wie* Ψxyz, *die sich aber, weil* z, *vermöge der Gleichung* $z = fxy$, *von* x *und* y *abhängt, auf eine, von zwei Grössen* x *und* y *abhängige Grösse, wie* fxy, *reduciren lässt*]. Der Flächen-Inhalt des Schnittes, senkrecht auf die Abscissen-Axe, in dem Puncte, dessen Abscisse x ist, sey φxy [$= v$]. Alsdann ist, wenn man y als einen unveränderlichen Parameter betrachtet und nur x sich verändern lässt, nach (27.)

$$\frac{du}{dx} = v.$$

[*Dieses lässt sich, wie leicht zu sehen, auf die nemliche Art beweisen wie oben der Satz, dass die Ordinate die erste Ableitung der Fläche einer Curve in der Ebene unter ihren Coordinaten ist.*]

Nun ist der Schnitt, dessen Fläche $v = \varphi xy$ ausdrückt, eine Curve, deren Abscisse y und die senkrechte Ordinate z sind, und deren Gleickung

$$z = fxy$$

ist, wenn man jetzt x als einen veränderlichen Parameter betrachtet, welcher sich nur von einem Schnitte zum andern ändert. Setzt man also z statt y, und y statt x in (27.), so erhält man

$$z = \frac{dv}{dy}$$

[*denn die erste Ableitung der Fläche des Schnitts v, nach seiner Abscisse genommen, ist dessen Ordinate z.*]

Es ist also überhaupt

$$\frac{du}{dx} = v \text{ und } \frac{dv}{dy} = z.$$

Daraus folgt:

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = z.$$

[*Diese Stelle konnte, wegen der veränderten Zeichen, nicht wörtlich übersetzt werden.*] Um also das Volumen des Körpers u zu finden, von dessen Oberfläche die Gleichung

$$z = fxy$$

ist, muss man $z = fxy$ zweimal, nach x und nach y, zurückleiten. [*Der Herausgeber drückt diesen Satz und seinen Vordersatz, mit seinen Zeichen, wie folgt, aus,*

$$\frac{d^2}{xy} u = z, \text{ folglich } \frac{xy}{d^2} z = u.]$$

78.

Man kann dieses Resultat auch, wie folgt, unmittelbar finden. Da $u = Fxy$ im Allgemeinen das Volumen desjenigen Theils des Körpers ausdrückt, welcher zu den Coordinaten x und y gehört, so ist klar, dass $F(x+k, y)$ in Fxy den Abschnitt bezeichnet, welcher zwischen Ebenen liegt, die auf der Ebene der x, y senkrecht sind und zu den Abscissen x und $x+k$ gehören, aber von der nemlichen Ordinate y begrenzt werden. Also ist

$F(x+k,$

$F(x+k, y+\lambda) - F(x, y+\lambda) - F(x+k, y) + Fxy$, der Ueberschuss des Abschnitts, welcher zur Ordinate $y+\lambda$ gehört, über denjenigen der der Ordinate y entspricht, und es ist klar, dass diese Differenz nichts anders ist, als ein Prisma, dessen Grundfläche das Rectangel $k\lambda$ ist, dessen Kanten die Ordinaten z der Oberfläche sind, welche den vier Winkel-Puncten des Rectangels entsprechen, das heisst, die Ordinaten fxy, $f(x+k, y)$, $f(x, y+\lambda)$, $f(x+k, y+\lambda)$ und dessen obere Fläche, der zwischen diesen diesen vier Ordinaten liegende Theil der Oberfläche des Körpers ist.

[*Die Ebene des Papiers (Fig. 10) sey die Ebene der x, y, A sey der Anfangs-Punct der Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, $MM' = z$, $PQ = k$, $MR = \lambda$. Unter den mit Strichen bezeichneten Buchstaben, wie M', stelle man sich diejenigen Puncte der Oberfläche des Körpers vor, welche senkrecht über den, auf dem Papiere mit den nemlichen Buchstaben bezeichneten Puncten in der Ebene der x, y liegen. Dann ist Fxy das Volumen des Körpers $APMBA'P'M'B'$, $F(x+k, y+\lambda)$ das Volum des Körpers $AQSCA'Q'S'C'$, $F(x+k, y) - Fxy$ das Volumen des Körpers $ABNQA'B'N'Q'$, $F(x, y+\lambda) - Fxy$ das Volumen des Körpers $ACRPA'C'R'P'$; also ist*

$$F(x+k, y+\lambda) - (F(x+k) - Fxy) - (F(x, y+\lambda) - Fxy) - Fxy,$$

oder $F(x+k, y+\lambda) - F(x+k, y) - F(x, y+\lambda) + Fxy$, *das Volumen des Körpers $MNRSM'N'R'S'$.*]

Nun ist leicht zu sehen, dass das Volumen dieses Prisma mit krummer Oberfläche nothwendig zwischen den

Inhalten der beiden rechtwinkligen Prismen enthalten sein muss, deren gemeinschaftliche Grundfläche $k\lambda$ und deren Höhe die grösste und die kleinste der vier Ordinaten [MM', NN', RR', SS'] ist. Die Function Fxy muss also von der Art sein, dass die Grösse

$$F(x+k, y+\lambda) - F(x+k, y) - F(x, y+\lambda) + Fxy$$

immer zwischen dem grössten und kleinsten Werthe der Grössen

$$k\lambda f(xy),\ k\lambda f(x+k, y),\ k\lambda(fx, y+k) \text{ und } k\lambda f(x+k, y+\lambda)$$

liegt, wie klein auch k und λ sein mögen. [*Denn* $f(xy)$, $f(x+k, y)$, $f(x, y+\lambda)$, $f(x+k, y+\lambda)$ *sind die vier Ordinaten* MM', NN', RR', SS'.]

Man entwickele die mit F bezeichneten Functionen nach (78. 1ster Theil). Man erhält, wenn man bis zu den Gliedern mit drei Abmessungen von k und λ geht

$$[F(x+k, y+\lambda) = Fxy + k\frac{dFxy}{dx} + \lambda\frac{dFxy}{dy}$$

$$+ \frac{k^2}{2}\frac{d^2Fxy}{dx^2} + k\lambda\frac{d^2Fxy}{dx\,dy} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2Fxy}{dy^2}$$

$$+ \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3F(x+k\omega, y+\lambda\omega)}{dx^3} + \frac{k^2\lambda}{2}\frac{d^2F(x+k\omega, y+\lambda\omega)}{dx^2\,dy}$$

$$+ \frac{k\lambda^2}{2}\frac{d^3F(x+k\omega, y+\lambda\omega)}{dx\,dy^2} + \frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3F(x+k\omega, y+\lambda\omega)}{dy^3}$$

$$F(x, y+\lambda) = Fxy + \lambda\frac{dFxy}{dy} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{d^2Fxy}{dy^2}$$

$$+ \frac{\lambda^3}{2.3}\frac{d^3F(x, y+\lambda\omega)}{dy^3}$$

$$F(x+k, y) = Fxy + k\frac{dFxy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Fxy}{dx^2}$$

$$+ \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3F(x+k\omega\, y)}{dx^3}$$

$$Fxy = Fxy,$$

wo ω eine Grösse ist die zwischen o *und* 1 *liegt. Substituirt man Dieses in die Grösse* $F(x+k, y+\lambda) - F(x+\lambda, y) - F(x, y+\lambda) + Fxy$, *so erhält man*]

$$k\lambda\frac{d^2Fxy}{dx\,dy} + \frac{k^2\lambda}{2}\frac{d^3F(x+k\omega, y+\lambda\omega)}{dx^2\,dy}$$

$$+ \frac{k\lambda^2}{2}\frac{d^3F(x+k\omega, y+\lambda\omega)}{dx\,dy^2}$$

$$+ \frac{k^3}{2.3}\left(\frac{d^3F(x+k\omega, y+\lambda\omega)}{dx^3} - \frac{d^3F(x+k\omega, y)}{dx^3}\right)$$

$$+ \frac{\lambda^3}{2.3}\left(\frac{d^3F(x+k\omega, y+\lambda\omega)}{dy^3} - \frac{d^3F(x, y+k\omega)}{dy^3}\right)$$

Entwickelt man auf die nemliche Weise die durch f bezeichneten Functionen [$fxy, f(x+k, y), f(x, y+\lambda), f(x+k, y+k)$], bleibt aber schon bei der ersten Abmessung von k und λ stehen, weil die Glieder dann schon mit $k\lambda$ multiplicirt sind, so erhält man

$$k\lambda f(x, y)$$

$$k\lambda f(x, y) + k^2\lambda\frac{df(x+\omega k, y)}{dx}$$

$$k\lambda f(x, y) + k\lambda^2\frac{df(x, y+\omega\lambda)}{dy}$$

$$k\lambda f(x, y) + k^2\lambda\frac{df(x+\omega k, y)}{dx} + k\lambda^2\frac{df(x, y+\omega\lambda)}{dy}.$$

Die obige Grösse muss also zwischen der grössten und kleinsten von diesen vier Grössen enthalten sein, k und λ mögen so klein sein, als man will. Der Coefficient ω kann in den verschiedenen Functionen verschieden sein, muss aber immer zwischen o und 1 liegen.

Nun enthält die Differenz zwischen den vier letzten Grössen, k und λ mindestens in drei Abmessungen, (wenn man k und λ als sehr kleine Grössen der er-

sten Ordnung betrachtet). [*Wozu diese letzten in Klammern eingeschlossenen Worte des Originals nöthig sind, ist nicht deutlich.*] Hingegen die Differenz zwischen der ersten Grösse und einer der vier letzten ist

$$k\lambda\left(\frac{d^2 Fxy}{dx\,dy}-f(x,y)\right),$$

nebst Gliedern der dritten Ordnung. Also muss, damit die letzte Differenz immer kleiner sey, als die erste, welche nur von der dritten Ordnung ist, das erste Glied, welches nur von der zweiten Ordnung ist, Null sein; sonst würden sich k und λ so klein annehmen lassen, dass das erste Glied grösser ist, als alle übrigen dritter Ordnung, und folglich die erste Grösse ausser die, durch die vier letzten Grössen vorgeschriebenen, Grenzen fällt. Es muss folglich

$$k\lambda\left(\frac{d\,Fxy}{dx\,dy}-fxy\right)=0,$$

und folglich

$$\frac{d^2\,Fxy}{dx\;dy}=fxy$$

[*oder* $\frac{d^2u}{dx\,dy}=z$] sein, wie oben.

[*Der Beweis, auf die Art, wie oben bei den Curven in der Ebene, ist folgender.*

Der Inhalt des Körpers MNRS M'N'R'S' ist gleich einem Prisma, dessen Grundfläche das Rechteck $MS=k\lambda$, *und dessen Höhe eine Ordinate ist, deren Fuss nothwendig innerhalb des Rechtecks MS fällt, und die sich folglich durch* $f(x+mk,\ y+nk)=z+mk\frac{dz}{dx}+nk\frac{dz}{dy}\ldots.$ *ausdrücken*

lässt, wenn m und n Coefficienten sind, die zwischen o und 1 liegen. Also ist der Inhalt dieses Körpers MS'

$$= k\lambda\left(z + mk\frac{dz}{dx} + nk\frac{dz}{dy}\ldots\right).$$

Der Inhalt des nemlicheu Körpers ist, wie oben gefunden,

$$k\lambda\left(\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{k}{2}\frac{d^3u}{dx^2dy} + \frac{\lambda}{2}\frac{d^3u}{dxdy^2}\right) + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3u}{dx^3}\ldots;$$

also ist, wenn man beides gleich setzt und mit kλ dividirt,

$$z + mk\frac{dz}{dx} + nk\frac{dz}{dy}\ldots = $$

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{k}{2}\frac{d^3u}{dx^2\,dy} + \frac{\lambda}{2}\frac{d^3u}{dx\,dy^2} + \frac{k^2}{\lambda.2.3}\frac{d^3u}{dx^3}\ldots$$

welches für $k = o$ und $\lambda = o$, weil λ und k willkürlich sind und folglich k gegen λ, oder umgekehrt, nicht verschwinden darf,

$$z = \frac{d^2u}{dx\,dy}$$

giebt, wie oben.]

79.

Die Function Fxy drücke ferner die Oberfläche des Körpers aus. In diesem Falle bedeutet offenbar die Grösse

$$F(x+k, y+\lambda) - F(x+k, y) - F(x, y+\lambda) + Fxy,$$

den Theil der Oberfläche, welcher zwischen den vier Seiten-Flächen des Prisma liegt, dessen Grundfläche $k\lambda$ ist.

Man stelle sich von den Endpuncten der vie Ordinaten, welche die Kanten des Prisma sind, vier

die Oberfläche des Körpers in diesen Puncten berührende, Ebenen vor, so lässt sich, wie bei den Tangenten, in (29.), beweisen, dass der Theil der Körper-Oberfläche, welcher das Prisma bedeckt, zwischen den grössten und kleinsten Flächen liegt, welche die Seiten-Ebenen des Prisma von den vier Tangenten-Ebenen abschneiden. [*Der strenge Beweis dieser Behauptung hat einige Schwierigkeit, die in dem Beweise des Satzes liegt, dass eine krumme Fläche grösser ist als derjenige Theil einer von ihr geschnittenen Ebene, der von dem Durchschnitte der Fläche und der Ebene umschlossen ist. Die ausführlichere Auseinandersetzung ist für eine Einschaltung zu weitläuftig. Man sehe, wegen des Beweises jenes Satzes, den zweiten Band der Sammlung mathematischer Abhandlungen des Uebersetzers S. 30. §. 226. etc.*]

Der Winkel, welchen die berührende Ebene an den Endpuncten der Ordinate z mit der Ebene der x, y macht, sey α, so ist, nach (59.)

$$tang\,\alpha = \sqrt{\left(\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}.$$

Nun weiss man aus der Geometrie, dass der Inhalt der Projection einer Ebene dem Product des Inhalts der Ebene selbst in den Cosinus des Winkels gleich ist, welchen die Ebene mit ihrer Projection einschliesst. Da nun die Projection aller Schnitte des Prisma [*MS' Fig. 10. gleich dem Rechtecke MNRS*] $= k\lambda$ ist, so ist der Inhalt des über dieser Projection liegenden Theils der, die krumme Oberfläche an den Endpuncten der Ordinate z, berührenden Ebene,

$= \frac{k\lambda}{\cos\alpha}$. Nun ist $\cos\alpha \left[= \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\sqrt{(1 + tg\alpha^2)}}\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}$, also ist jener Theil der berührenden Ebene $= k\lambda\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$, oder, wenn man wieder fxy statt z schreibt,

$$= k\lambda\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dfxy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dfxy}{dy}\right)^2\right)}.$$

Es sey, der Kürze wegen,

$$\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dfxy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dfxy}{dy}\right)^2\right)} = \varphi xy,$$

so ist der [*über MS liegende*] Theil der Tangenten-Ebene [*an M'*] $= k\lambda\varphi xy$. Daraus erhält man für die drei anderen Tangenten-Ebenen [*an N', R' und S'*]

$$f(x + k, y),\ f(x, y + \lambda) \text{ und } f(x + k, y + \lambda);$$

folglich muss die Grösse

$$F(x + k, y + \lambda) - F(x + k, y) - F(x, y + \lambda) + Fxy$$

immer zwischen der grössten und kleinsten, der vier Grössen

$$k\lambda\varphi xy,\ k\lambda\varphi(x + k, y),\ k\lambda\varphi(x, y + \lambda),\ k\lambda\varphi(x + k, y + \lambda)$$

liegen und, auf eine ähnliche Weise, wie im vorigen Artikel, folgt daraus

$$\frac{d^2 Fxy}{dx\,dy} = \varphi xy = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dfxy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dfxy}{dy}\right)^2\right)}.$$

[*Der Beweis auf die andere, bei der Berechnung des Volumens erwähnte, Art ist dem bei der Rectification der Curven in der Ebene ähnlich.*]

80.

Man sieht hieraus, dass die Ordinate z einer krummen Fläche die zweite Ableitung nach x und y des Ausdrucks ist, welcher das Volumen des von der Fläche umschlossenen Körpers bezeichnet, und dass $\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$ die zweite Ableitung der Grösse ist, welche die Oberfläche des Körpers ausdrückt.

Ist also die Ordinate z in x und y gegeben, so muss man ihre zweite Stammgrösse [*nach x und y*] nehmen, um das Volumen zu finden, und die zweite Stammgrösse von $\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$, um die Oberfläche zu haben. Es ist gleichviel, ob man die Stammgrösse erst nach x, oder erst nach y nimmt; aber die erste Stammgrösse [*nach einer der beiden veränderlichen Grössen x und y*] lässt allemal, als Constante, eine Function der anderen Grösse zu, die nach den gegebenen Grenzen der krummen Fläche bestimmt werden muss. Sodann bestimmt man, nach denselben Grenzen, die erste Grösse, als Function der zweiten, nach welcher sodann von Neuem die Stammgrösse genommen wird.

81.

Wenn man, entweder um die Zurückleitung zu erleichtern, oder zu irgend einem anderen Zwecke, statt der veränderlichen Grössen x und y andere veränderliche Grössen t und u setzen wollte, von welchen jene, gegebene Functionen sind, so müsste man zunächst, zufolge (50. 1ster Theil) die, als zweifache

Ableitungen betrachteten Functionen, mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{du}$ multipliciren. Aber hernach kann man nicht ohne Weiteres die Werthe von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{du}$ in $\frac{dt}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ substituiren, weil, wenn man die Stammgrösse nach einer dieser Grössen nimmt, die andere als constant betrachtet werden muss.

Es sey $f(x, y)$ [$= v$] die Function, von welcher die zweite Stammgrösse gefunden werden soll. Um statt x und y zwei andere veränderliche Grössen u und t setzen zu können, schreibe man zunächst $v\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{du}$ statt v. [*Es ist nemlich Bedingung, dass bei jeder der beiden Ableitungen oder Zurückleitungen nur immer eine der beiden Grössen als veränderlich betrachtet werden und dass also, eben wie bei x, y, auch wenn u und t eingeführt sind, immer nur eine von diesen beiden Grössen zugleich sich verändern soll. Wenn also die zweite Stammgrösse von v, w heisst, so dass* $v = \frac{d^2w}{dx\,dy}$ *ist, so ist es Bedingung, dass bei der ersten Ableitung von w, eben so wie z. B. nur x veränderlich ist, auch nur die eine von den beiden Grössen t und u als veränderlich betrachtet werden soll. Unter dieser Bedingung kann, bei der ersten Ableitung, x als von t allein, und, ähnlicher Weise, bei der zweiten, y als nur allein von u abhängig betrachtet werden. Dieses giebt* $\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$ *und* $\frac{d^2w}{dt\,du} = \frac{d^2w}{dx\,dy}\cdot\frac{dx}{dt}\frac{dy}{du}$. *Ob es möglich sey, ungeachtet dieser Bedingung, t und u so an-*

zunehmen, dass x und y dennoch als willkürliche Functionen von t und u zugleich betrachtet werden können, wird sich sogleich zeigen.] Statt der Grösse x, nach welcher man zunächst die Stammgrösse nehmen will, während y als constant betrachtet wird, setze man eine Function von t und y, wo t eine neue veränderliche Grösse ist, welche an die Stelle von x tritt.

Es sey also $x = \varphi(ty)$. Man lasse nur t allein sich verändern. [*Nemlich, weil y bei der ersten Zurückleitung constant sein soll, kann sich nur t allein verändern, oder wenn man* $x = \varphi t y$ *setzt, x nur von t allein abhängig sein, wodurch die Voraussetzung* $\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}$ *gerechtfertigt wird.*] Dieses giebt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi(ty)}{dt}$$

und die gegebene Function fxy geht in

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{d\varphi(ty)}{dt} \cdot fxy, \text{ oder in}$$

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot v$$

über, von welcher zuerst die Stammgrösse nach t genommen werden müsste und wobei y unveränderlich wäre, und dann die Stammgrösse nach y, wobei t constant wäre. Man kann aber auch statt y eine andere Grösse u, und weil t dagegen jetzt unveränderlich sein soll,

$$y = \Psi(tu)$$

setzen, welches, wenn man nur u sich verändern lässt,

$$\frac{dy}{du} = \frac{d\Psi(tu)}{du}$$

giebt. [*Nach der Bedingung soll nur* u *allein sich verändern und* t *constant sein; also ist* y *in* $y = \Psi(tu)$ *wirklich nur allein als von* u *abhängig zu betrachten, wodurch die zweite Voraussetzung*

$$\frac{d^2w}{dt\,du} = \frac{d\left(\frac{dw}{dt}\right)}{du} = \frac{d\left(\frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}\right)}{du} = \frac{d^2w}{dx\,du}\cdot\frac{dx}{dt}\frac{dy}{du}$$

gerechtfertigt wird.] Also geht die gegebene Function fxy in

$$fxy\,.\,\frac{d\varphi(ty)}{dt}\,.\,\frac{d\Psi(tu)}{du}$$

über, welche nur noch t und u enthält, weil

$$x = \varphi(ty) \text{ und } y = \Psi(tu)$$

$$[\textit{also } y = \Psi(tu),\ x = \varphi(t\,\Psi(tu)) \textit{ ist,}]$$

und von welcher man also die zweite Stammgrösse nach t und u nehmen kann.

Weil $x = \varphi(ty)$ und $y = \Psi(tu)$, so ist, wenn man y substituirt, x gleich einer Function von t und u, welche wir durch $\chi(tu)$ bezeichnen wollen, [*also ist* $\chi(tu) = \varphi(t\,\Psi(tu))$], so, dass, nach der Transformation durch t und u,

$$x = \chi(tu),\ y = \Psi(tu)$$

ist. [*Dieses zeigt, dass wirklich, ungeachtet der vorausgesetzten Bedingungen,* t *und* u *so angenommen werden können, dass* x *und* y*, beide, als willkürliche Functionen von* t *und* u *betrachtet werden dürfen.*] Nun aber erhält man aus [$x =$] $\varphi(ty) = \chi(tu)$, wenn man einzeln t und u sich verändern lässt,

$$\frac{d\varphi(ty)}{dt} + \frac{d\varphi(ty)}{dy} \cdot \frac{d\Psi(tu)}{dt} = \frac{d\chi(tu)}{dt}.$$

$$\text{und } \frac{d\varphi(ty)}{dy} \cdot \frac{d\Psi(tu)}{du} = \frac{d\chi(tu)}{du}.$$

Eliminirt man $\frac{d\varphi(ty)}{dy}$, so erhält man

$$\frac{d\varphi(ty)}{dt} = \frac{d\chi(tu)}{dt} - \frac{\frac{d\Psi(tu)}{dt} \cdot \frac{d\chi(tu)}{du}}{\frac{d\Psi(tu)}{du}}$$

und dieser Ausdruck, in den letzten obigen transformirten Ausdruck von $\int xy \left[\int xy \frac{d\varphi(ty)}{dt} \cdot \frac{d\Psi(tu)}{du}\right]$ gesetzt, giebt

$$\left(\frac{d\chi(tu)}{dt} \cdot \frac{d\Psi(tu)}{du} - \frac{d\Psi(tu)}{dt} \cdot \frac{d\chi(tu)}{du}\right) \int xy,$$

oder, kürzer,

$$\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{du} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{du}\right) v$$

wo x und y beliebige Functionen von t und u sein können.

82.

Betrachtet man also z als eine, durch die Beschaffenheit der krummen Fläche gegebene, Function von x und y, und stellt sich vor, dass t und u an die Stelle von x und y treten, so erhält man für die zweite Ableitung des Volumens und der Oberfläche des Körpers folgende Ausdrücke

$$\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{du} - \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{dt}\right) z$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{du} - \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{dt}\right) \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}.$$

Für den zweiten Ausdruck ist noch

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{du}.$$

[*Hier konnten mehrere Zeilen des Originals, die blos Erklärungen der Zeichen in der zweiten Formel enthalten, erspart werden, weil die ältere, obgleich sonst unvollkommene Bezeichnung, Alles was dort mit Worten gesagt wird, schon von selbst vollständig ausdrückt.*] Daraus folgt:

$$\left[\frac{dz}{dx}\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{du} - \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{dt}\right) = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dy}{du} - \frac{dz}{du} \cdot \frac{dy}{dt},\right.$$

also]

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dt} \cdot \frac{dy}{du} - \frac{dz}{du} \cdot \frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{du} - \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{dt}}$$ und [*eben so*]

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\frac{dz}{dt} \cdot \frac{dx}{du} - \frac{dz}{du} \cdot \frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{du} - \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{dt}}.$$

Diese Ausdrücke müssen noch in $\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$ substituirt werden. Geschieht dies, so ist der Ausdruck der zweiten Ableitung der Oberfläche des Körpers folgender:

$$\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\frac{dy}{du} - \frac{dz}{du}\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\frac{dx}{du} - \frac{dz}{du}\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}.$$

Die zweite Stammgrösse hiervon, nach t und u, giebt die Oberfläche des Körpers, wobei die veränderlichen Grössen z, x und y als einfache Functionen von t und u betrachtet werden.

83.

Diese Ausdrücke des Volumens und der Oberfläche eines beliebigen Körpers, dessen Coordinaten x, y, z als Functionen von t und u betrachtet werden, in Zeichen der Differential-Rechnung übersetzt, sind folgende:

$$dt\,du\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{du}-\frac{dx}{du}\cdot\frac{dy}{dt}\right)z \text{ und}$$

$$dt\,du\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\frac{dy}{du}-\frac{dx}{du}\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\frac{dx}{du}-\frac{dz}{du}\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\frac{dy}{du}-\frac{dz}{du}\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}$$

[*wo aber die Factoren dt du weiter keinen Sinn haben*]. Sie drücken das unendlich kleine Element des Volumens und der Oberfläche aus und müssen integrirt und erst nach einer, dann nach der anderen der beiden veränderlichen Grössen t und u vervollständigt werden.

84.

Um eine Anwendung dieser Formeln zu zeigen, wollen wir annehmen, der Körper, dessen Volumen und Oberfläche gesucht werden, sey ein beliebiges Ellipsoïd, dessen drei halbe Axen a, b, c sind, so ist die Gleichung der Oberfläche dieses Körpers, zwischen drei rechtwinkligen, mit den Axen parallel laufenden Coordlnaten, folgende:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

welche Gleichung z in x und y giebt.

Die Irrationalität von z lässt sich vermindern, wenn man zwei unbestimmte Winkel t und u einführt, und $x = a \sin t \cos u$, $y = b \sin t \sin u$ und $z = c \cos t$ setzt. [*Die dritte Gleichung ist nicht mehr willkürlich, sondern folgt aus den beiden ersten. Denn aus der gegebenen Gleichung* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ *folgt* $\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, *also, wenn man* $x = a \sin t \cos u$ *und* $y = b \sin t \sin u$ *setzt,* $\frac{z^2}{c^2} = 1 - \sin t^2 \cos u^2 - \sin t^2 \sin u^2 = 1 - \sin t^2 (\sin u^2 + \cos u^2) = 1 - \sin t^2 = \cos t^2$, *also* $z = c \cos t$.] Um nun das Volumen und die Oberfläche des Ellipsoïds zu finden, darf man nur, nachdem das Nöthige substituirt worden, die Stammgrösse einzeln nach t und u nehmen und zwar von $t = 0$ bis $t = \pi$ und von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ [*weil von der Hälfte des Ellipsoïds, über oder unter der Ebene der* x, y, *die Rede ist, und folglich die äusserste Veränderung der Lage der Linie* c *in* $z = c \cos t$ *als Radius-Vector betrachtet,* π, *hingegen die äusserste Veränderung der Lage der Linien* a *und* b *in* $x = a \sin t \cos u$ *und* $y = b \sin t \sin u$, *als Radii-Vectores betrachtet,* 2π *ist.*] Diese Transformation der Coordinaten des Ellipsoïds, welche zuerst Ivory bei Berechnung der Anziehung dieses Körpers angewendet zu haben scheint, [*trans. phil. von* 1809. 11*ter Theil*] hat den Vortheil, die Stammgrössen nach t und u von einander unabhängig zu machen, wenn

sich die doppelte Stammgrösse über die ganze Oberfläche erstrecken soll.

Nimmt man die Ableitungen von x, y, z nach t und u, so erhält man

$$\frac{dx}{dt} = a \cos t \cos u, \ \frac{dy}{dt} = b \cos t \sin u, \ \frac{dz}{dt} = -c \sin t,$$

$$\frac{dx}{du} = -a \sin t \sin u, \ \frac{dy}{du} = b \sin t \cos u, \ \frac{dz}{du} = 0,$$

und hieraus

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dt} [= ab(\sin t \cos t \cos u^2 + \sin t \cos t \sin u^2)]$$

$$= ab \sin t \cos t$$

$$\frac{dz}{dt}\frac{dx}{du} - \frac{dz}{du}\frac{dx}{dt} = ac \sin t^2 \sin u$$

$$\frac{dz}{dt}\frac{dy}{du} - \frac{dz}{du}\frac{dy}{dt} = -bc \sin t^2 \cos u,$$

so, dass die Ausdrücke der zweiten Ableitung des Volumens und der Oberfläche des Ellipsoïdes folgende sind

$$abc \sin t \cos t^2 \quad \text{und}$$

$$\sin t \sqrt{(a^2 b^2 \cos t^2 + a^2 c^2 \sin u^2 \sin t^2 + b^2 c^2 \cos u^2 \sin t^2)}$$

wovon die ersten Stammgrössen, von $t = 0$ bis $t = \pi$ und von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ genommen werden müssen, wenn π den halben Kreisumfang [*für den Halbmesser* 1] bedeutet.

85.

Wir wollen nun zuerst den Ausdruck des Volumens

$$abc \sin t \cos t^2$$

weiter untersuchen. Setzt man $1 - \sin t^2$ statt $\cos t^2$ [*welches* $abc(\sin t - \sin t^3)$ *giebt*] und sodann

$-\frac{3}{4} \sin t$

$-\frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t$ statt $\sin t^3$ [*weil* $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ $\cos 2t = \cos t^2 - \sin t^2$ $\sin 3t = \sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t = 2 \sin t \cos t^2 + \cos t^2 \sin t - \sin t^3 = 3 \sin t \cos t^2 - \sin t^3 = 3 \sin t - 4 \sin t^3$, *also* $\sin t^3 = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t$ *ist*], so erhält man

$$\frac{abc}{4} (\sin t + \sin 3t),$$

wovon die erste Stammgrösse, so genommen dass sie bei $t = 0$ anfängt,

$$\frac{abc}{4}\left(1 - \cos t + \frac{1 - \cos 3t}{3}\right)$$

ist. [*Nemlich sie ist, wenn man sie z. B. durch K bezeichnet,* $K = \frac{abc}{4}\left(-\cos t - \frac{\cos 3t}{3}\right) + Const.$ *Da* $K = 0$ *sein soll für* $t = 0$, *so ist* $0 = \frac{abc}{4}$ $(-1 - \frac{1}{3}) + Const.$, *also* $Const = \frac{abc}{4} (1 + \frac{1}{3})$, *mithin vollständig*

$$K = \frac{abc}{4}\left(1 - \cos t + \frac{1 - \cos 3t}{3}\right).]$$

Setzt man $t = \pi$, welches $\cos t = -1$ und $\cos 3t = -1$ giebt, so erhält man $\left[\frac{abc}{4}\left(1 + 1 + \frac{1+1}{3}\right), oder\right]$

$$\frac{2abc}{3}.$$

Hiervon muss man noch die Stammgrösse nach u, von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ nehmen. Da die Grösse u, von welcher die erste Ableitung 1 ist, gar nicht vorkommt, so darf man nur blos mit 2π multipliciren, welches $\frac{4abc}{3}\pi$ giebt. [*Denn die Stammgrösse*

von $\frac{2abc}{3}$, *nach* u, *ist*, *wenn sie* L *heisst*, $L = \frac{2abcu}{3} + Const.$ *Da* $L = 0$ *sein soll*, *für* $u = 0$, *so ist* $Const = 0$, *also* $L = \frac{2abcu}{3}$. *Setzt man*, *für den vollen Umfang der Stammgrösse*, $u = 2\pi$, *so erhält man* $\frac{4abc\pi}{3}$.] Das Volumen des ganzen Ellipsoids, dessen halbe Axen a. b, c sind, ist also

$$\frac{4abc\pi}{3}.$$

86.

Wir kommen ferner zu dem Ausdrucke der Oberfläche. Man setze, zur Vereinfachung der Rechnung, $a = b$, so dass also jetzt von einem Sphäroïde die Rede ist, welches durch Umdrehung um die Axe $2c$ entsteht, so erhält man [*allgemein*
$(\sqrt{a^2 b^2 \sin t^2 \cos t^2 + a^2 c^2 \sin t^4 \sin u^2 + b^2 c^2 \sin t^4 \cos u^2})$,
also, *wenn* $a = b$ *ist*,]

$$a \sin t \sqrt{(b^2 \cos t^2 + c^2 \sin t^2)},$$

wo, wie man sieht, der Winkel u nicht mehr vorkommt. Mehrerer Allgemeinheit wegen behalte ich b unter dem Wurzelzeichen bei.

Man setze $\cos t = s$, so ist $\sin t = -\frac{ds}{dt}$ und zugleich $\sin t^2 [= 1 - \cos t^2] = 1 - s^2$, also ist der transformirte Ausdruck

$$-a \frac{ds}{dt} \sqrt{(c^2 + (b^2 - c^2) s^2)},$$

wovon die Stammgrösse, von $s = 1$ bis $s = -1$

[*nemlich von* $s = \cos(t = 0)$ *bis* $s = \cos(t = \pi)$] genommen werden muss.

Es sey $b^2 - c^2 = e^2$, so ist die Stammgrösse nach s:

$$-\frac{as}{2}\sqrt{(c^2 + e^2 s^2)} + \frac{ac^2}{2e} \log\left(\sqrt{(c^2 + e^2 s^2)} - es\right).$$

[*Durch Ableitung dieser Grösse nach s kann man sich überzeugen, dass sie den Ausdruck, welcher zurückzuleiten war, giebt.*]

Setzt man $s = 1$, so erhält man

$$-\frac{ab}{2} + \frac{ac^2}{2e} \overset{e}{\log}(b - e)$$

[*weil* $c^2 + e^2 = b^2$]. Setzt man $s = -1$, so erhält man

$$\frac{ab}{2} + \frac{ac^2}{2e} \overset{e}{\log}(b + e),$$

also ist die vollständige Stammgrösse nach s oder t [*wenn man Eins vom Andern abzieht, welches die vollständige Stammgrösse zwischen den beiden Grenzen giebt*]

$$ab + \frac{ac^2}{e} \overset{e}{\log} \frac{b + e}{b - e}.$$

Hiervon muss man abermals die Stammgrösse nach u nehmen. Da aber u nicht mehr vorkommt, so darf man nur mit 2π multipliciren [*wie vorhin im ähnlichen Falle*]. Man erhält, wenn man nunmehr $b = a$ setzt, [*wie angenommen wurde,*] für die ganze Oberfläche eines Sphäroïdes, welches entsteht, wenn sich eine Ellipse, deren halbe Axen a und c sind, um die kleine Axe $2c$ dreht, den Ausdruck

$$2\pi a^2 + \frac{\pi a c^2}{e} \overset{e}{\log} \frac{a + e}{a - e},$$

wo e die Excentricität $\sqrt{(a^2 - c^2)}$ ist.

Wenn e reel sein soll, so muss $a > c$ und folglich das Sphäroïd gedrückt und durch die Umdrehung einer Ellipse um die kleine Axe $2c$ entstanden sein.

Verlangte man die Oberfläche eines gedehnten Ellipsoïds, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um die grosse Axe entsteht, so müsste man $2c$ zu der grossen Axe nehmen. Alsdann wäre e imaginair. Es sey für diesen Fall $c^2 - a^2 = E^2$, so ist

$$e = E\sqrt{-1}$$

und wenn man von den unmöglichen Logarithmen zu den reellen Kreisbogen übergeht, so erhält man, zufolge den Formeln von (22. 1ster Theil) für die gesuchte Oberfläche, den Ausdruck

$$2\pi a^2 + \frac{2\pi a c^2}{E} . \, arc\, tang \, \frac{E}{a}.$$

87.

Hätte man nicht $a = b$, sondern, allgemeiner,

$$\frac{a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2}{a^2} \; [in\ 84.] = V^2$$

gesetzt, so hätte man für die erste Stammgrösse nach t, den Ausdruck

$$ab + \frac{ac^2 V^2}{2e} \overset{e}{log} \frac{b+e}{b-e} \text{ erhalten, wo}$$

$$e^2 = b^2 - c^2 . V^2$$

ist, und es wäre mit den bisherigen Hülfsmitteln der Analysis nicht wohl möglich gewesen, hiervon weiter, unbedingt, die Stammgrösse nach u zu finden; durch Näherung hingegen kann man das Resultat finden, wenn die Differenz der beiden Axen a und b nur klein ist.

Es sey $\frac{b^2 - a^2}{a^2} = i$. Man erhält für V, die Grösse i mag positiv oder negativ sein, [$V^2 = \frac{a^2(1 - \cos u^2) + b^2 \cos u^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} \cos u^2$, *oder*] $V^2 = 1 + i \cos u^2$. Man darf also in den obigen Ausdruck nur $c^2 (1 + i \cos u^2)$ statt $c^2 V^2$ setzen und hernach den Ausdruck nach i entwickeln. Setzt man also ferner

$$\frac{ac^2}{2\sqrt{(b^2-c^2)}} \overset{e}{\log} \frac{b + \sqrt{(b^2-c^2)}}{b - \sqrt{(b^2-c^2)}} = f(c^2),$$

so erhält man, wenn man den Ausdruck, vermittels der Ableitungen, nach c^2 entwickelt, die Reihe

$$ab + f(c^2) + \frac{df(c^2)}{d(c^2)} . c^2 i \cos u^2$$
$$+ \tfrac{1}{2} \frac{d^2 f(c^2)}{d(c^2)^2} . c^4 i^2 \cos u^4$$
$$+ \tfrac{1}{2} \frac{d^3 f(c^2)}{d(c^2)^3} . c^6 i^3 \cos u^6 \ldots.$$

wovon die Stammgrösse nach u zwischen $u = 0$ und $u = 2\pi$ genommen werden muss.

Man bezeichne die Stammgrössen von $\cos u^2, \cos u^4, \cos u^6 \ldots.$, zwischen diesen Grenzen, durch $2\pi\alpha$, $2\pi\beta$, $2\pi\gamma \ldots.$, so erhält man für die Oberfläche des Ellipsoïds, dessen drei halbe Axen a, b, c sind, den Ausdruck

$$2\pi\Big(ab + f(c^2) + \alpha c^2 i \frac{df(c^2)}{d(c^2)}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\beta c^4 i^2 \frac{d^2 f(c^2)}{d(c^2)^2}$$
$$+ \frac{1}{2.3}\gamma c^6 i^3 \frac{d^3 f(c^2)}{d(c^2)^3} \ldots.\Big),$$

welche Reihe um so stärker convergirt, je kleiner die Grösse i ist.

Die Coefficienten α, β, γ.... sind leicht zu finden, wenn man die Potenzen von $\cos u$ in Cosinus der Vielfachen von u, vermittelst des unmöglichen Exponential-Ausdrucks von $\cos u$ (22. 1ster Th.) auflöset; und da die Cosinus die correspondirenden Sinus zu Stammgrössen haben, welche an den beiden Grenzen, für $u = 0$ und $u = 2\pi$, verschwinden, so folgt, dass nur mit 2π multiplicirte Glieder übrig bleiben, die von u unabhängig sind, und es ist leicht zu sehen, dass diese Glieder nichts anders als die Coefficienten des mittleren binomischen Gliedes sind, wenn man solches zur zweiten, vierten, sechsten etc. Potenz erhebt und durch die nemliche Potenz von 2 dividirt. Also ist

$$\alpha = \frac{2}{4},\ \beta = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 8},\ \gamma = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 8 \cdot 12}\ etc.$$

Dritter Theil.

Anwendung der Theorie der Functionen auf die Mechanik.

Erster Abschnitt.

Vom Gegenstande der Mechanik. Von der gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten Bewegung. Von der gradlinigen Bewegung überhaupt. Verhältnisse zwischen Raum, Geschwindigkeit und beschleunigender Kraft.

1.

Wir wollen jetzt die Functionen-Theorie auf die Mechanik anwenden. Hier beziehen sich die Functionen auf die Zeit insbesondere, welche durch t bezeichnet werden soll. [*Nemlich t ist die Zahl derjenigen willkürlich angenommenen absoluten Zeittheile, z. B. Secunden, welche auf die zu bezeichnende Zeit gehen.*] Und da die Lage eines Punctes im Raume von drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z abhängt, so werden diese Coordinaten, in den Aufgaben der Mechanik, als Functionen der Zeit betrach-

tet. Man kann also die Mechanik als eine Geometrie mit vier Abmessungen, und die Analysis der Mechanik als eine Ausdehnung der geometrischen Analysis betrachten. [*In der Lehre von den Figuren in der Ebene kommen zwei Abmessungen vor, bei den Figuren im Raume drei, in der Mechanik vier.*]

Wir wollen zuerst die gradlinige Bewegung untersuchen und annehmen, dass x der in der Zeit t durchlaufene Raum ist, so ist $x = ft$, und die Function ft muss von der Art sein, dass sie Null ist für $t = 0$. Die einfachste Form für ft ist unstreitig at, welches $x = at$ giebt, wo a eine Constante ist; bei der durch diesen Ausdruck bezeichneten Bewegung verhalten sich also die vom Anfange der Bewegung an durchlaufene Räume, immer wie die verflossene Zeit, welches die Eigenschaft derjenigen Bewegung ist, die man gleichförmig nennt. Die Constante a, welche das Verhältniss des Raumes zur Zeit ausdrückt, ist das Maass dessen, was man Geschwindigkeit nennt. Dieses ist das einzige Element, welches bei dieser Art von Bewegung vorkommt, und durch welches sich eine gleichförmige Bewegung von der anderen untercheidet. [*Da beim Ausdruck eines Verhältnisses das eine Glied willkürlich ist, so nimmt man gewöhnlich die Zeit willkürlich an, und zwar eine Secunde. Dann ist Geschwindigkeit, der bei einer gleichförmigen Bewegung in einer Secunde durchlaufene Raum.*]

Beobachtung und Erfahrung zeigen, dass ein, auf irgend eine Weise in Bewegung gesetzter Körper, wenn man alle Hindernisse wegräumt, die auf ihn

wirken könnten, immerfort in gradliniger und gleichförmiger Bewegung beharret, woraus folgt, dass die einmal vorhandene Geschwindigkeit unverändert und in der nemlichen Richtung fortdauert. Hierin besteht dass erste Gesetz der Bewegung. [*Es lässt sich bekanntlich viel Metaphysisches über dieses Gesetz der Beharrung oder der Trägheit sagen, was aber am Ende auf Worte hinauskommt. Lagrange beziehet sich, bescheiden, blos auf Beobachtung und Erfahrung.*]

Stellt man sich die Zeit als Abscisse, den durchlaufenen Raum als Ordinate einer Linie vor, so ist klar, dass die Linie für die gleichförmige Bewegung eine grade ist, welche durch den Anfangs-Punct der Abscissen geht, und dass die Tangente des Winkels, welchen die Linie mit der Axe macht, das Maas der Geschwindigkeit der Bewegung ist.

2.

Die nächst einfache Function von t, nach at, ist bt^2. Setzt man diesen Ausdruck für ft, so erhält man eine andere Art gradliniger Bewegung, welche die Gleichung $x = bt^2$ bezeichnet, und in welcher die vom Anfange der Bewegung an durchlaufenen Räume sich wie die Quadrate der verflossenen Zeiten verhalten.

Beobachtung und Erfahrung zeigen auch diese Bewegung täglich, an Körpern, welche, von der Schwere getrieben, fallen, wenn man von dem Widerstande der Luft und jedem anderen Hindernisse der Bewegung abstrahirt. Die Constante b, welche das einzige Element in dem Systeme dieser Bewegung ist, bleibt

[*beinahe*] die nemliche für alle Orte der Erde, und hängt von der Schwere ab, welche sie hervorbringt und welche ununterbrochen und unveränderlich auf den bewegten Körper wirkt. Diese Bewegung dauert also nur unter der Wirkung dieser Kraft fort, welche man als die äussere, fortwährend auf den Körper wirkende Ursach der Bewegung betrachten kann, und deren Maass der Coefficient b ist.

Da bei dieser Bewegung die durchlaufenen Räume in stärkerem Verhältniss, als der Zeit, zunehmen, so nennt man die Bewegung beschleunigt und zwar nennt man diejenige Bewegung, von welcher hier die Rede ist, gleichförmig beschleunigt. Der Grund davon wird sich sogleich zeigen.

Bezeichnet man die Zeit durch die Abscisse und den durchlaufenden Raum durch die Ordinate einer Curve, so sieht man leicht, dass diese Curve eine Parabel [*zweiter Ordnung*] ist, deren Parameter $= \frac{1}{b}$, und deren Haupt-Axe die Axe der Ordinaten y ist.

Die einfachste Bewegung, nächst der vorigen, würde die sein, für welche $x = ct^3$ ist; aber es kommt in der Wirklichkeit keine einfache Bewegung dieser Art vor, und wir wissen also nicht, was der Coefficient c bedeuten würde, wenn man ihn an und für sich, und unabhängig von Geschwindigkeit und Kraft betrachten wollte.

Die obigen beiden sind diejenigen einfachen Bewegungen, aus welchen alle anderen als zusammengesetzt betrachtet werden können, und die Wissenschaft der Mechanik besteht in der Zusammensetzung und Zerlegung derselben, woraus die Verhältnisse

zwischen Zeit, Raum, Geschwindigkeit und Kräften folgen.

3.

Nimmt man die beiden obigen Arten der Bewegung zusammen, so erhält man eine, durch die Gleichung

$$x = at + bt^2$$

ausgedrückte Bewegung, welche folglich aus einer gleichförmigen und einer gleichförmig beschleunigten Bewegung zusammengesetzt ist, und welche aus der Zusammenwirkung der beiden Ursachen entsteht, die die beiden Bewegungen einzeln hervorbringen können, und zwar aus der Zusammenwirkung einer, im Anfange der Bewegung Statt findenden, der Grösse a proportionalen Geschwindigkeit, und einer, ununterbrochen auf den bewegten Körper wirkenden, der Grösse b proportionalen, beschleunigenden Kraft.

Auch diese Zusammensetzung der beiden Bewegungen kommt in der Natur vor, und zwar bei der Bewegung geworfener schwerer Körper, von unten nach oben, oder von oben nach unten, wenn man vom Widerstande der Luft und allen anderen fremden Hindernissen abstrahirt. Bei den, von oben nach unten geworfenen Körpern, wirkt die Kraft b in der Richtung der Bewegung selbst, wie wir sie voraussetzen. Bei den, von unteu nach oben geworfenen Körpern wirkt die Kraft b entgegen, und muss also negativ genommen werden. Sie strebt, die Bewegung des Körpers zu verzögern und heisst alsdann verzögernde Kraft. Die Bewegung selbst heisst in diesem Falle: gleichförmig verzögert.

Die Beobachtung zeigt, dass bei der Zusammenwirkung der beiden Bewegungen, jede sich so erhält als wenn sie allein vorhanden wäre, so, dass der am Ende eines beliebigen Zeitraums durchlaufene Raum genau die Summe oder der Unterschied der Räume ist, welche der bewegte Körper, unter der Einwirkung der beiden Ursachen, die die beiden Bewegungen hervorbrachten, durchlaufen haben würde, und dass das Resultat, das heisst, der durchlaufene Raum, der nemliche ist, als wenn die beiden Bewegungen einzeln Statt gehabt hätten. [*Es ist merkwürdig, dass sich Lagrange, bei alle diesen, blos auf Beobachtung und Erfahrung bezieht.*]

4.

Nun betrachte man eine beliebige gradlinige Bewegung, welche von der Gleichung $x = ft$ bezeichnet wird, und wo ft irgend eine Function von [*der Zeit*] t bedeutet. Der Körper hat am Ende der Zeit t den Raum ft durchlaufen, am Ende der Zeit $t+k$ den Raum $f(t+k)$; folglich ist $f(t+k) - ft$ der, während der Zeit k durchlaufene Raum, welche Zeit in dem Augenblick anfängt, wo t endigt. Entwickelt man $f(t+k)$ nach Potenzen von k, so erhält man

$$ft + k\frac{dft}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2ft}{dt^2} \cdots\cdot$$

(1 ster Theil). Der während der Zeit k durchlaufene Raum ist also

$$k\frac{dft}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2ft}{dt^2} \cdots\cdot$$

wo jetzt die, vor dem Anfange der Zeit k verflossene Zeit t, als eine Constante betrachtet wird. Die Be-

wegung, mit welcher dieser Raum durchlaufen wurde, ist also aus verschiedenen partiellen Bewegungen zusammengesetzt, von welchen die, auf die Zeit k kommenden Räume, $k\frac{dft}{dt}$, $\frac{k^2}{2}\frac{d^2ft}{dt^2}$, $\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3ft}{dt^3}$ *etc.* sind. Wie man sieht, ist die erste dieser partiellen Bewegungen eine gleichförmige, von deren Geschwindigkeit das Maass $\frac{dft}{dt}$ ist. (2.) Die zweite ist eine gleichförmig beschleunigte, welche einer beschleunigenden Kraft entspricht, die $\frac{1}{2}\frac{d^2ft}{dt^2}$ proportional ist. (3.) Die übrigen sind, da sie sich auf keine bekannte einfache Bewegung beziehen, nicht einzeln zu betrachten nöthig, und wir werden zeigen, dass man, bei der Bestimmung der Bewegung im Anfange der Zeit k, davon abstrahiren könne. Denn, entwickelt man die Function $f(t+k)$ nach der allgemeinen Formel (40. 78. 1ster Theil), so erhält man

$$ft + k\frac{dft}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2ft}{dt^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3f(t+\lambda k)}{dt^3},$$

wo λ ein unbekannter Coefficient ist, der zwischen 0 und 1 liegt, so dass also der in der Zeit k durchlaufene Raum, vollständig durch

$$k\frac{dft}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2ft}{dt^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3f(t+\lambda k)}{dt^3}$$

ausgedrückt wird. Die ersten beiden Glieder bezeichnen, wie man sieht, die aus der gleichförmigen und der gleichförmig beschleunigten zusammengesetzte Bewegung, das dritte Glied bezeichnet die Summe aller übrigen Bewegungen, die zu jenen beiden hinzu-

kommen und wegen derer die wirkliche Bewegung kein einfaches Resultat jener beiden sein kann.

Nun aber erwäge man, dass k immer so klein angenommen werden kann, dass sich die aus den beiden Gliedern $k\frac{dft}{dt}$ und $\frac{k^2}{2}\frac{d^2ft}{dt^2}$ zusammengesetzte Bewegung, der wirklichen Bewegung mehr nähert, als irgend eine andere, aus einer gleichförmigen und einer gleichförmig beschleunigten zusammengesetzte Bewegung. Denn der Unterschied zwischen dem Raume, welcher während des Zeitraums k von der wirklichen Bewegung durchlaufen wird und demjenigen, welchen die bezeichnete zusammengesetzte Bewegung durchlaufen würde, ist $\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3f(t+\lambda k)}{dt^3}$. Wird nun der, von irgend einer anderen aus einer gleichförmigen und einer gleichförmig beschleunigten zusammengesetzten Bewegung durchlaufene Raum, durch $ak + bk^2$ (3.) bezeichnet, so ist der Unterschied zwischen diesem und dem wirklich durchlaufenen Raume:

$$k\left(\frac{dft}{dt}-a\right)+k^2\left(\frac{d^2ft}{2dt^2}-b\right)+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3f(t+\lambda k)}{dt^3}$$

und es ist leicht, durch ein ähnliches Raisonnement, wie in (3. 2ter Theil) zu zeigen, dass, so lange a und b von $\frac{dft}{dt}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^2ft}{dt^2}$ verschieden sind, k allezeit so klein angenommen werden kann, dass der zweite Unterschied grösser ist, als der erste, und dass solches, sobald es für irgend einen Werth von k Statt findet, um so mehr für kleinere Werthe von k der Fall sein muss. Mithin drückt das Glied $k\frac{dft}{dt}$ Alles

dasjenige in der gegebenen Bewegung aus, was den gleichförmigen Theil derselben, im Anfange der Zeit k betrachtet, ausmacht, und das Glied $\frac{k^2}{2} \frac{d^2 ft}{dt^2}$ Alles dasjenige, was zu dem gleichförmig beschleunigten Theile der Bewegung gehört.

Hieraus folgt, dass jede, durch $x = ft$ bezeichnete gradlinige Bewegung, in einem beliebigen Augenblicke, am Ende der Zeit t, als aus einer gleichförmigen Bewegung, die von der dem Körper beigebrachten Geschwindigkeit herrührt und deren Maass dft ist, und aus einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, die von einer auf den Körper wirkenden beschleunigenden und der Grösse $\frac{1}{2} \frac{d^2 ft}{dt^2}$, oder blos $\frac{d^2 ft}{dt^2}$ proportionellen Kraft herrührt, zusammengesetzt betrachtet werden kann, und dass folglich, wenn die Ursachen, welche die Bewegung gleichförmig zu werden hindern, plötzlich aufhörten, die Bewegung, von diesem Augenblicke an, mit einer Geschwindigkeit, deren Maass $\frac{dft}{dt}$ ist, gleichförmig fortfahren, und wenn die Wirkung jener Ursachen, statt Null zu werden, constant würde, die Bewegung, von diesem Augenblicke an, aus der gleichförmigen und einer, von der beständigen und der Grösse $\frac{d^2 ft}{dt^2}$ proportionelle beschleunigenden Kraft herrührenden, gleichförmig beschleunigten Bewegung zusammengesetzt sein würde.

Mehrere Erscheinungen in der Natur und besonders die Resultate der verschiedenen über den Fall der Körper angestellten Versuche bestätigen voll-

kommen den eben gefundenen Satz, der als ein Fundamental-Satz der gesammten Theorie der Bewegung zu betrachten ist.

5.

Allgemein also bedeutet bei jeder gradlinigen Bewegung, wo der durchlaufene Raum eine gegebene Function der verflossenen Zeit ist, die erste Ableitung dieser Function die Geschwindigkeit, die zweite Ableitung die beschleunigende Kraft in irgend einem Augenblicke. Denn da Zeit, Raum, Geschwindigkeit und Kraft heterogene Dinge sind, die sich nur erst dann vergleichen lassen, wenn man sie auf Zahlen gebracht und jede auf eine bestimmte Einheit ihrer Art bezogen hat, so können wir, der Kürze wegen, unmittelbar, Geschwindigkeit und Kraft durch die erste und zweite Ableitung bezeichnen, so wie wir den Raum durch die Stammgrösse ausdrücken. Hieraus sieht man, wie erste und zweite Ableitungen von selbst in der Mechanik erscheinen, wo sie bestimmte Werthe und Bedeutungen haben. Dieser Umstand bewog Newton, die Fluxionen-Rechnung auf die Betrachtung der Bewegung zu gründen. Raum, Geschwindigkeit und Kraft, wenn man sie als Functionen der Zeit betrachtet, werden also durch Stammgrösse, erste und zweite Ableitung bezeichnet, so dass man, wenn man den Ausdruck des Raums durch die Zeit kennt, auch sogleich, durch die directe Ableitungs-Rechnung, [*Differential-Rechnung*,] die Ausdrücke der Geschwindigkeit und Kraft findet. Ist hingegen Geschwindigkeit oder Kraft durch die Zeit gegeben,

so

so muss man die Stammgrösse durch die Zurückleitungs-Rechnung [*Integral-Rechnung*] suchen.

Diese Begriffe von Geschwindigkeit und beschleunigender Kraft sind, wie man sieht, sehr einfach und frei von aller Metaphysik. Sie sind auf die Natur der Bewegung gegründet, wenn man dieselbe als das Versetzen eines Körpers von einem Orte zum anderen betrachtet. Bleibt ein Körper in Ruhe, so ist offenbar seine Geschwindigkeit Null. Gleichwohl kann auf ihn eine beschleunigende Kraft wirken, die, weil sie durch irgend ein Hinderniss gehoben wird, keine Neigung zur Bewegung hervorbringt. [*Da das Hinderniss auch eine Kraft ist, die die erste aufhebt, so wirkt dann eigentlich auf den Körper keine Kraft.*] Diese Kraft heisst alsdann todte Kraft oder Druck [*das Hinderniss auch*] und kann mit der Wirkung eines schweren Körpers auf ein Hinderniss, welches ihn zu fallen hindert, verglichen werden.

6.

Man bezeichne den während der Zeit t durchlaufenen Raum durch x und betrachte x als Function von t, so ist $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t und $\frac{d^2x}{dt^2}$ die beschleunigende Kraft in dem nemlichen Augenblicke; woraus man sieht, dass man, wenn das Gesetz der Bewegung durch ein Verhältniss zwischen Zeit, Raum, Geschwindigkeit und Kraft gegeben ist, eine Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung zwischen t, x, $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$ erhält, von wel-

cher man die Stammgleichung in t und x nach den Regeln der Zurückleitungs-Rechnung suchen muss. Die beiden willkürlichen Constanten, welche dabei vorkommen, werden aus Werthen von x und $\frac{dx}{dt}$ bestimmt, also aus einem Raume und einer Geschwindigkeit, die für irgend einen bestimmten Augenblick gegeben sind.

Bei der gleichförmigen, durch $x = at$ ausgedrückten Bewegung ist

$$\frac{dx}{dt} = a \text{ und } \frac{d^2x}{dt^2} = 0;$$

also drückt der Coefficient a, welcher das Verhältniss des durchlaufenen Raums zur Zeit bezeichnet, die Geschwindigkeit aus, und die beschleunigende Kraft ist Null. Bei der gleichförmig beschleunigten, durch $x = bt^2$ ausgedrückten Bewegung, ist

$$\frac{dx}{dt} = 2bt \text{ und } \frac{d^2x}{dt^2} = 2b.$$

Die Geschwindigkeit in einem beliebigen Augenblicke ist also der, seit dem Anfange der Bewegung verflossenen Zeit, proportional. Das Verhältniss zwischen Geschwindigkeit und Zeit drückt die beschleunigende Kraft aus und ist das zwiefache Verhältniss zwischen dem durchlaufenen Raume und dem Quadrate der Zeit. Die beständige und gleichförmige Zunahme der Geschwindigkeit bei dieser Art der Bewegung, hat ihr die Benennung gleichförmige Bewegung gegeben.

Das einfachste und natürlichste Mittel zur Vergleichung der beschleunigenden Kräfte ist, die Schwere

an einem bestimmten Orte der Erde zur Einheit zu nehmen. Man erhält also für schwere Körper

$$2b = 1 \text{ und } b = \tfrac{1}{2}, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{t^2}{2} \text{ und } \frac{dx}{dt} = t = \sqrt{2x},$$

so dass sich die Geschwindigkeit durch die Quadrat-Wurzel aus der doppelten Höhe ausdrücken lässt, von welcher der Körper gefallen sein muss, um diese Geschwindigkeit zu erlangen. Wollte man also eine Geschwindigkeit zur Einheit der Geschwindigkeiten annehmen, so müsste die Einheit der Räume die doppelte Fall-Höhe sein, welche nöthig ist, die Geschwindigkeit hervorzubringen.

[*Dieser Vortrag der Grundlehren der Mechanik könnte noch elementarer gewünscht werden. Der Herausgeber hat dieselben in der oben erwähnten kleinen Schrift: „über die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Grössen" auf folgende Weise abgehandelt.*

Die bei der Bewegung vorkommenden Grössen sind: Zeit, durchlaufener Raum, Geschwindigkeit, welche einen aus den beiden zusammengesetzten Begriff voraussetzt, und Kraft. Nimmt man die Zeit zur unabhängig- oder willkürlich-veränderliche Grösse an, so sind die drei andern, von ihr abhängende Grössen.

Die Zeit werde durch t,
der durchlaufene Raum durch u,
die Geschwindigkeit durch v,
die Kraft durch p

bezeichnet. Die Einheiten dieser vier Grössen sind gewöhnlich:

von der Zeit, die Zeit-Secunde;
von dem Raume, die Maass-Einheit;
von der Geschwindigkeit, die beiden vorigen Einheiten;
von der Kraft, die Schwere.

Die Buchstaben t, u, v, p bedeuten also Zahlen, oder Vielfache dieser Einheiten. Die Geschwindigkeit ist die Zahl der Maass-Einheiten, welche in der Zeit-Secunde durchlaufen werden würden, wenn die Bewegung sich nicht veränderte, sondern gleichförmig wäre. Da die drei Grössen u, v, p von der Grösse t abhängen sollen, so sey

$$u = Ft,$$
$$v = ft,$$
$$p = \varphi t.$$

I. Nun habe sich ein Körper, irgend eine Zeit t hindurch, entweder von der Ruhe an, oder schon mit Geschwindigkeit anfangend, mit veränderlicher Bewegung fortbewegt und am Ende der Zeit t die Geschwindigkeit v erlangt. Es verfliesse nach der Zeit t noch die Zeit k, so wird sich, auch während dieser Zeit k, die Geschwindigkeit noch verändern, und folglich am Ende der Zeit $t + k$ entweder grösser oder kleiner, z. B. grösser sein, als am Ende der Zeit t. Man nehme, ausser der allgemeinen Bedingung, dass die Veränderung der Geschwindigkeit nicht sprungweise, sondern stetig geschehe, einen solchen Zeitraum k nach t an, in welchem die Geschwindigkeit nur zu- oder abnimmt, hier zunimmt, welches allemal möglich sein wird, weil man dazu k nur klein ge-

nug annehmen darf, so wird die Geschwindigkeit $v + \Delta v$, nach Verlauf der Zeit k, grösser sein, als am Anfange derselben, und es ist offenbar, dass der Körper, wenn er mit der anfänglichen Geschwindigkeit v, ohne dass dieselbe während der k Secunden weiter verändert worden wäre, sich fortbewegt hätte, einen kleinern Raum Δu durchlaufen haben würde, als wirklich geschehen ist, und einen grössern Raum, wenn die Geschwindigkeit $v + \Delta v$, die am Ende der Zeit k Statt findet, während des ganzen Zeitraums hindurch die nemliche gewesen wäre. Nun soll, nach der Voraussetzung, die Geschwindigkeit nur stetig sich verändern; sie soll also alle mögliche Grössen durchlaufen, die zwischen v und $v + \Delta v$ liegen. In irgend einem Angenblicke, zwischen den Zeitpuncten t und $t + k$, wird sie also nothwendig genau so gross sein, dass der Körper, wenn er mit ihr durch die Zeit k unverändert sich fortbewegte, grade denselben Raum Δu durchlaufen würde, den er wirklich durchläuft. Man nenne die Zeit, um welche dieser Moment nach t fällt, λk, so ist λ eine Grösse, die nothwendig zwischen o und 1 liegt. Nun ist die Geschwindigkeit nach der Zeit $t + \lambda k$, weil $v = ft$ sein sollte,

$$f(t + \lambda k) = ft + \lambda k \frac{dft}{dt} + \frac{\lambda^2 k^2}{2} \frac{d^2 ft}{dt^2} \ldots,$$

also ist der Raum, den der Körper mit ihr, die Zeit k hindurch, gleichförmig durchlaufen würde,

$$= kf(t + \lambda k) = k\left(ft + \lambda k \frac{dft}{dt} + \frac{\lambda^2 k^2}{2} \frac{d^2 ft}{dt^2} \ldots\right)$$

Dieser Raum soll, angenommenermaassen, dem Raume

$$\Delta u = k\frac{dFt}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Ft}{dt^2}\ldots$$

gleich sein; also ist

$$k\left(ft + \lambda k\frac{dft}{dt} + \frac{\lambda^2k^2}{2}\frac{d^2ft}{dt^2}\ldots\right)$$

$$= k\frac{dFt}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2Ft}{dt^2}\ldots,$$

oder, wenn man mit k dividirt,

$$ft + \lambda k\frac{dft}{dt} + \frac{\lambda^2k^2}{2}\frac{d^2ft}{dt^2}\ldots$$

$$= \frac{dFt}{dt} + \frac{k}{2}\frac{d^2Ft}{dt^2} + \frac{k^2}{2.3}\frac{d^3Ft}{dt^3}\ldots$$

Diese Gleichung gilt für jeden willkürlichen Werth von k, der von den übrigen Grössen auf keine Weise abhängt. Also ist nothwendig

$$ft = dFt, \text{ oder}$$

$$v = \frac{du}{dt},$$

das heisst: die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung des durchlaufenen Raums.

II. Die Wirkung einer Kraft auf einen Körper ist die Geschwindigkeit, die sie ihm in einer gewissen Zeit ertheilt. Gleiche Kräfte, auf gleiche Massen wirkend, bringen nothwendig in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten hervor, weil alle Umstände gleich sind; also bringt die mfache Kraft in gleichen Zeiten nothwendig die mfache Geschwindigkeit, die einfache Kraft in der mfachen Zeit ebenfalls die mfache Geschwindigkeit hervor. Nun treibe irgend eine Kraft p, die, wie

man will, veränderlich ist, und die, auf irgend eine Weise, von der Zeit t, *welche vom Anfange der Bewegung ab verfliesst, abhängt, so dass, wie oben,* $p = \varphi t$ *gesetzt werden kann, einen bestimmten Körper. Die Geschwindigkeit, welche sie ihm nach Ablauf der Zeit* t *beigebracht haben wird, wird ebenfalls von der Zeit* t *abhängen, und, wie oben,* $= ft$ *gesetzt werden können. Es verfliesse, nach der Zeit* t, *noch eine Zeit* k, *so wird die Kraft, nach der Zeit* $t+k$, $\varphi(t+k) = p + \Delta p$, *und die Geschwindigkeit, nach der Zeit* $t+k$, $f(t+k) = v + \Delta v$ *sein. Nun wähle man einen Zeitraum* k, *in welchem die Kraft* p, *ausserdem, dass sie, nach der allgemeinen Bedingung, nicht sprungweise, sondern* n u r *stetig sich verändert,* n u r *zu- oder abnimmt, z. B. hier zunimmt, welches allemal angehen wird, weil man zu dem Ende* k *nur klein genug annehmen darf; so ist klar, dass wenn sich die Kraft durch den ganzen Zeitraum* k *hindurch nicht weiter veränderte, sondern* $= p$ *bliebe, die Zunahme der Geschwindigkeit* Δv, *die der Körper durch sie am Ende der Zeit* $t+k$ *erhält, kleiner sein wird, als diejenige, die er wirklich erhalten hat, und grösser, wenn die Kraft durch den ganzen Zeitraum* k, *schon vom Anfange an, so gross gewesen wäre, als sie am Ende des Zeitraums ist, nemlich* $p + \Delta p$. *Da nun die Kraft nur stetig sich verändern soll, also während der Zeit* k *alle nur mögliche Grössen zwischen* p *und* $p + \Delta p$ *durchläuft, so ist offenbar, dass es, innerhalb der Zeit* k, *also zwischen* t *und* $t+k$, *nothwendig irgend einen Augenblick geben muss, in welchem*

die Kraft genau so gross ist, dass, wenn sie vom Anfange des Zeitraums k an, durch diesen Zeitraum hindurch, unverändert fortgewirkt hätte, die Zunahme der Geschwindigkeit Δv *genau so gross geworden sein würde, als sie es wirklich ist. Man bezeichne die Entfernung dieses Zeitraums vom Anfange der Zeit k an, durch* λk, *so ist* λ *eine Grösse, die nothwendig zwischen* 0 *und* 1 *liegen muss. Nun ist die Kraft, nach Ablauf der Zeit* $t+\lambda k$,

$$=p+\Delta' p=\varphi t+\lambda k\frac{d\varphi t}{dt}+\frac{\lambda^2 k^2}{2}\frac{d^2\varphi t}{dt^2}\dots$$

Man setze die Geschwindigkeit, welche die Kraft-Einheit (die Schwere) in der Zeit-Einheit (der Zeit-Secunde) hervorbringt, $=\alpha$, *so ist die Geschwindigkeit, welche die Kraft* $p+\Delta' p$ *in der Zeit-Einheit hervorgebracht hat,* $=\alpha(p+\Delta' p)$ *und folglich diejenige, welche sie in der Zeit k hervorbringt,* $=\alpha k(p+\Delta' p)$. *Diese Zunahme der Geschwindigkeit soll nun, angenommenermaassen, derjenigen gleich sein, welche der Körper wirklich bei seiner veränderten Bewegung erfährt, und welche* $=\Delta v$ *ist; also ist*

$$\alpha k(p+\Delta' p)=\Delta v,$$

oder, weil $\Delta v=f(t+k)-ft=k\frac{dft}{dt}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2ft}{dt^2}\dots$ *ist,*

$$\alpha k\left(\varphi t+\lambda k\frac{d\varphi t}{dt}+\frac{\lambda^2 k^2}{2}\frac{d^2\varphi t}{dt^2}\dots\right)$$

$$=k\frac{dft}{dt}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2ft}{dt}+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3ft}{dt^3}\dots,$$

oder, wenn man mit k dividirt,

$$\alpha\varphi t + \alpha\lambda k \frac{d\varphi t}{dt} + \alpha \frac{\lambda^2 k^2}{2} \frac{d^2 \varphi t}{dt^2} \ldots\ldots$$

$$= \frac{dft}{dt} + \frac{k}{2} \frac{d^2 ft}{dt^2} + \frac{k^2}{2.3} \frac{d^3 ft}{dt^3} \ldots\ldots$$

Diese Gleichung gilt für jeden willkürlichen Werth von k. Da k auf keine Weise von den übrigen Grössen abhängen soll, so ist nothwendig

$$\alpha\varphi t = \frac{dft}{dt}, \text{ oder}$$

$$\alpha p = \frac{dv}{dt}.$$

III. Die Wirkung der Einheit der Kräfte (der Schwere), wie man sie am leichtesten beobachten kann, besteht darin, dass sie einen Körper, in einer Zeit-Secunde, von der Ruhe ab, durch $15\frac{5}{8}$ rheinländische Fuss, $= g$ treibt. Nun ist die Schwere eine unveränderliche Kraft und bringt also in gleichen Zeiten gleichen Geschwindigkeiten hervor; also ist

$$v = \alpha t.$$

Oben, in (I.) war $\frac{du}{dt} = v$; *also ist für die Schwere*

$$\frac{du}{dt} = \alpha t,$$

welches, wenn man die Stammgrössen nimmt,

$$u = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + Const.$$

und, da $u = 0$ *für* $t = 0$ *ist,*

$$u = \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

giebt. Nun ist für $t = 1$, $u = g$; *also ist* $g = \frac{1}{2}\alpha$ *und*

$$\alpha = 2g.$$

Also giebt der obige Ausdruck, in (II.)

$$\frac{dv}{dt} = 2gp,$$

das heisst: die erste Ableitung der Geschwindigkeit, oder die zweite Ableitung des Raums ist gleich der beschleunigenden Kraft, mit 2g multiplicirt.

IV. Auch ist $\frac{d^2u}{dt^2} = 2gp$. *Für die Schwere, wo* $p = 1$ *ist, giebt der Ausdruck* $\frac{dv}{dt} = 2gp$, $v = \int 2g = 2gt + Const.$ *und der Ausdruck* $\frac{du}{dt} = v$, $u = \int v = \int 2gt = gt^2 + Const.$]

Zweiter Abschnitt.

Von der Zusammensetzung der Bewegungen, besonders dreier gleichförmigen. Von der Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten und Kräfte. Von den Wurflinien im leeren Raume.

7.

Wir haben im vorigen Abschnitte die Eigenschaften der gradlinigen Bewegung untersucht. Die krummlinige Bewegung zerfällt *(se réduit)* natürlich in zwei oder drei gradlinige Bewegungen, je nachdem die von dem bewegten Körper beschriebene Curve einfacher oder doppelter Krümmung ist. Denn, bezieht man diese Curve auf zwei oder drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z, so ist klar, dass die

Bestimmung des Puncts der Curve, in welchem sich der bewegte Körper in irgend einem Augenblicke befindet, von dem Werthe der Coordinaten für den nemlichen Augenblick abhängt, so dass jede dieser Coordinaten eine gegebene Function der verflossenen Zeit ist und den gradlinigen Raum vorstellt, welchen ein Körper durchlaufen haben würde, der die Projection des wirklichen Körpers auf jede der drei Coordinaten-Axen wäre. [*Nach Lagrange soll man also z. B. als von selbst klar annehmen, dass es gleichviel ist, ob ein Körper sich durch die grade, oder durch die krumme Linie BC, Fig.* 11, *mit der seiner Bewegung eigenthümlichen, auf die Richtung von AB und AC reducirten Geschwindigkeit, oder durch die beiden graden Linien BA und AC bewegt. Wenn man diesen Satz als Grundsatz annimmt, so verfährt man unstreitig so einfach als möglich, und erspart jeden weiteren Beweis des Parallelogramms der Kräfte, oder des Satzes vom Hebel und dergl. Der Satz ist in der That einfach und natürlich, auch kann man ihn grade nicht willkürlich nennen. Lagrange hat zu diesem Grundsatze wenigstens eben so viel Recht als Euclid zu seinem eilften Axiome, welches alle weitere Parallelen-Theorie erspart, oder Archimed zu seinem Grundsatze, dass jede krumme Linie länger ist, als die grade zwischen den nemlichen Endpuncten, und ein bei weitem grösseres Recht, als Leibnitz und Alle, die ihm in der Lehre vom sogenannten Unendlichen nachfolgten, haben, mit Nullen wie mit Grössen zu rechnen, oder, willkürlich, sehr kleine Grössen gegen andere Grössen wegzulassen.*

Verlangt man dagegen eine weitere Erforschung der Natur der zusammengesetzten Bewegung und einen Beweis des Lagrangischen Grundsatzes, so ist dies freilich auch Recht, nur scheint es, könne und müsse man dann auch überall bei der Annahme anderer ersten Sätze der Wissenschaft eben so schwierig sein. Findet man das Unendliche begreiflich, so kann man wohl auch noch mehr zugeben, als den Lagrangischen Grundsatz der zusammengesetzten Bewegung. Und auch nur wenn man die Eulidischen und Archimedischen Grundsätze der Geometrie ohne Weiteres annimmt, kann man, scheint es, mit dem Lagrangischen Grundsatze der Mechanik ebenfalls sehr wohl zufrieden sein.]

Erfolgt also die Bewegung in einer Ebene, so kann sie durch die beiden Gleichungen

$$x = ft \text{ und } y = Ft$$

ausgedrückt werden. Eliminirt man zwischen denselben t, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche die Gleichung der Bahn des bewegten Körpers ist. Bewegt sich der Körper nicht immer in derselben Ebene, so wird die Bewegung von den drei Gleichungen

$$x = ft,\ y = Ft \text{ und } z = \varphi t$$

ausgedrückt. Eliminirt man zwischen denselben t, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y und z, welche die von dem Körper durchlaufene Curve doppelter Krümmung bestimmen.

Man setze zuerst, die drei Bewegungen des Körpers nach der Richtung der Axen der x, y, z wären gleichförmig, so erhält man

$$x = at,\ y = bt,\ z = ct,$$

wo a, b, c die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen sind. Eliminirt man t, so erhält man

$$y = \frac{bx}{a}, \; z = \frac{cx}{a},$$

welche Gleichungen eine grade Linie bezeichnen, die durch den Anfang der Coordinaten geht und deren Projectionen auf die Ebenen der x, y und x, z mit der Axe der x Winkel machen, deren Tangenten $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ sind. [*Dieses folgt unmittelbar daraus, dass* $y = \frac{bx}{a}$ *und* $z = \frac{cx}{a}$ *die Gleichungen der Projectionen der Linie auf die Ebenen der* x, y *und* x, z *sind.*] Der den Coordinaten x, y, z entsprechende Theil dieser graden Linie ist also

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = t\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

welches der, während der Zeit t, vermöge der drei gleichförmigen Bewegungen durchlaufene Raum ist. Diese zusammengesetzte Bewegung ist also auch gradlinig und gleichförmig. Ihre Geschwindigkeit ist $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$. Ihre Richtung lässt sich am besten auf die drei Coordinaten-Axen beziehen, und es ist klar, dass, weil at, bt, ct die Projectionen der Linie $t\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$ auf die drei Axen sind, die Quotienten $\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$, $\frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$, $\frac{c}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$, die Cosinus der Winkel ausdrükken, welche die Richtung der zusammengesetzten Bewegung mit den Axen macht. Die Summe der Quadrate dieser Cosinus ist, wie leicht zu sehen, gleich Eins, worin, wie bekannt die Eigenschaft der Win-

kel besteht, welche eine und dieselbe grade Linie mit drei anderen auf einander senkrechten Linien macht.

8.

Die Geschwindigkeit der zusammengesetzten Bewegung soll A, die Winkel der Richtung dieser Bewegung mit den drei Axen sollen α, β, γ heissen, so ist

$$A = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

[*denn der durchlaufene Raum war* $tA = t\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$] und

$$\frac{a}{A} = \cos\alpha, \ \frac{b}{A} = \cos\beta, \ \frac{c}{A} = \cos\gamma,$$

woraus folgt:

$$a = A\cos\alpha, \ b = A\cos\beta, \ c = A\cos\gamma.$$

Man sieht hieraus, wie die Geschwindigkeit A einer gleichförmigen Bewegung, nach einer gegebenen Richtung, in drei andere Geschwindigkeiten a, b, c, nach beliebigen Richtungen, die auf einander senkrecht sind, zerlegt werden kann.

Wenn also ein Körper, zugleich, zwei verschiedene Geschwindigkeiten A und B, nach gegebenen, mit drei beliebigen auf einander senkrechten Axen die Winkel α, β, γ und λ, μ, ν machenden Richtungen hätte, so würden daraus, nach der Richtung der Axen, die zusammengesetzten Geschwindigkeiten

$$A\cos\alpha + B\cos\lambda$$
$$A\cos\beta + B\cos\mu$$
$$A\cos\gamma + B\cos\nu$$

entstehen, und diese Geschwindigkeiten würden eine einzige Geschwindigkeit C, nach einer Richtung ge-

ben, für welche, wenn die Winkel, die sie mit den nemlichen Axen macht, π, ϱ, σ sind,

$$C \cos \pi = A \cos \alpha + B \cos \lambda$$
$$C \cos \varrho = A \cos \beta + B \cos \mu$$
$$C \cos \sigma = A \cos \gamma + B \cos \nu$$

ist. [*Die Ebene des Papiers in Fig.* 12 *sey die Ebene der* x, y. *Gestrichene Buchstaben, wie* P', Q' *etc. bedeuten Puncte, welche im Raum senkrecht über den gleichnamigen Puncten* P, Q.... *in der Ebene des Papiers liegen. Nun sey* M' *der bewegte Körper. Die Linie* $P'M' = A$ *sey das Maass seiner Geschwindigkeit in dieser Richtung, die Linie* $M'Q' = B$ *das Maass seiner Geschwindigkeit in der Richtung* $M'Q'$, *der Winkel, welchen* $P'M'$ *mit der Axe* AC *macht, sey* α, *der Winkel, welchen* $M'Q'$ *mit der Axe* AC *macht,* λ, *so ist* $SU = P'M' \cos \alpha = A \cos \alpha$ *und* $TU = Q'M' \cos \lambda = B \cos \lambda$, *also, weil* $SU + TU = AU$ *ist,* $AU = A \cos \alpha + B \cos \lambda$. *Wenn nun die Linie* AM' *das Maass der zusammengesetzten Geschwindigkeit nach* AM' *bedeutet, und* C, *desgleichen der Winkel den sie mit der Axe* AC *macht,* π *heisst, so ist* $AU = C \cos \pi$; *also ist, wie oben,*

$$C \cos \pi = A \cos \alpha + B \cos \lambda.$$

So wie es sich für die eine Axe verhält, verhält es sich auch für die anderen.]

Da die Linien $A \cos \alpha$, $B \cos \beta$, $C \cos \gamma$ die Projectionen der Linie A [*P'M' Fig.* 12] in der Richtung der Geschwindigkeit A auf die drei Axen sind, wie es sich auch ähnlicherweise für die

übrigen Linien verhält, so ist aus den obigen Gleichungen leicht zu sehen, dass, wenn man die beiden Linien *A* und *B*, nach ihren Richtungen, eine an die andere setzt, [*also die Linie M'Q', in AP', an die Linie P'M'*] die Linie *C* [*AM'*], die beiden Linien verbindet, so dass *A*, *B*, *C* die drei Seiten ins Dreiecks [*AP'M'*] sind, und dass, wenn man über die beiden Linien *A* und *B* [*AP' und P'M'*] ein Parallelogramm [*AP' M' Q'*] zeichnet, die Linie *C* [*AM'*] dessen Diagonale ist. Dadurch reducirt sich die Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten auf eine sehr einfache geometrische Untersuchung. Für die Rechnung ist es indessen besser, mittels der obigen Formeln Alles auf drei auf einander senkrechte Axen zu beziehen, welches sich auf so viele Geschwindigkeiten ausdehnen lässt, als zusammenzusetzen gegeben sind.

Wir bemerken noch, dass, wenn der Winkel [*P' M' Q'*] zwischen, den beiden, von einem und demselben Puncte ausgehenden Linien *A* und *B*, $\triangle$ heisst, das Quadrat der dieselben verbindenden Linie [*P'Q'*,] wie bekannt,

$$A^2 - 2AB \cos \triangle + B^2$$

ist. Auf der anderen Seite ist leicht zu sehen, dass sich, wenn man die Projectionen dieser Linien nimmt, das nemliche Quadrat durch

$$\begin{aligned} &(A \cos \alpha - B \cos \lambda)^2 \\ &+ (A \cos \beta - B \cos \mu)^2 \\ &+ (A \cos \gamma - B \cos \nu)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [= &A^2 \cos \alpha^2 - 2AB \cos \alpha \cos \lambda + B^2 \cos \lambda^2 \\ &+ A^2 \cos \beta^2 - 2AB \cos \beta \cos \mu + B^2 \cos \mu^2 \\ &+ A^2 \cos \gamma^2 - 2AB \cos \gamma \cos \nu + B^2 \cos \nu^2, \end{aligned}$$

oder.

oder, weil $\cos\lambda^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ *und* $\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\gamma^2 = 1$ *ist, durch*]

$$A^2 + B^2 - 2AB(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu)$$

ausdrücken lässt, woraus, durch Vergleichung der Glieder [*in* $A^2 + B^2 - 2AB\cos\triangle$],

$$\cos\triangle = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu$$

folgt, welche Gleichung das Verhältniss zwischen dem Winkel $\triangle$, den die beiden Linien einschliessen und den Winkeln α, β, γ und λ, μ, ν giebt, welche sie mit den drei auf einander senkrechten Axen machen. Diese Gleichung ist in der sphärischen Trigonometrie bekannt, aber weil wir davon in der Folge Gebrauch machen wollen, so haben wir es nicht für unnöthig gehalten, sie hier nach der Methode der Projectionen zu beweisen.

9.

Die Untersuchung der gleichförmigen Bewegung hat uns die Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten gelehrt; aus der gleichförmig beschleunigten Bewegung lässt sich die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte herleiten.

Denn man setze, drei gradlinige Bewegungen nach den Axen der Coordinaten x, y, z wären gleichförmig beschleunigt und von den beschleunigenden Kräften g, h, k erzeugt, so erhält man (nach 6.)

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2,\ y = \tfrac{1}{2}ht^2,\ z = \tfrac{1}{2}kt^2,$$

Eliminirt man x, so erhält man

$$y = \frac{hx}{g},\ z = \frac{kx}{g},$$

woraus folgt, dass die mit diesen drei Bewegungen

beschriebene Linie ebenfalls grade ist, und durch den Anfangs-Punct der Coordinaten geht. Der den Coordinaten x, y, z entsprechende Theil dieser Linie ist also ebenfalls

$$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)} = \tfrac{1}{2}t^2\sqrt{(g^2+h^2+k^2)},$$

welches der von der zusammengesetzten Bewegung in der Zeit t durchlaufene Raum ist; woraus folgt, dass die zusammengesetzte Bewegung ebenfalls gleichförmig beschleunigt wird, und die dieselbe beschleunigende Kraft $= \sqrt{(g^2+h^2+k^2)}$ ist. Da nun die Linien $\tfrac{1}{2}gt^2$, $\tfrac{1}{2}ht^2$, $\tfrac{1}{2}kt^2$ die Projectionen der Linie $\tfrac{1}{2}t^2\sqrt{(g^2+h^2+k^2)}$ auf die drei Axen sind, so drücken die Quotienten $\frac{g}{\sqrt{(g^2+h^2+k^2)}}$, $\frac{h}{\sqrt{(g^2+h^2+k^2)}}$, $\frac{k}{\sqrt{(g^2+h^2+k^2)}}$ die Cosinus der Winkel aus, welche die Richtung der zusammengesetzten Bewegung mit den Axen macht.

Man sieht hieraus, dass die Zusammensetzung gleichförmig - beschleunigter Bewegungen dieselben Gesetze hat, wie die Zusammensetzung gleichförmiger Bewegungen, und dass folglich die Zusammensetzung der Kräfte auf die nemliche Weise geschieht, wie die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten, so dass sich alle, im vorigen Paragraphe gefundene Ausdrücke, auch auf die beschleunigenden Kräfte anwenden lassen, wenn man blos die Kräfte statt der Geschwindigkeiten setzt.

Wird also ein Körper zugleich von zwei Kräften G und H nach gegebenen Richtungen getrieben, deren Winkel mit drei auf einander senkrechten Axen α, β, γ und λ, μ, ν sind, so entstehen daraus, nach

den Richtungen dieser drei Axen, die zusammengesetzten Kräfte

$$G \cos \alpha + H \cos \lambda$$
$$G \cos \beta + H \cos \mu$$
$$G \cos \gamma + H \cos \nu$$

und wenn K die eine daraus resultirende Kraft ist, so erhält man, wenn man die Winkel, die ihre Richtung mit den Axen macht, durch π, ϱ, σ bezeichnet,

$$K \cos \pi = G \cos \alpha + H \cos \lambda$$
$$K \cos \varrho = G \cos \beta + H \cos \mu$$
$$K \cos \sigma = G \cos \gamma + H \cos \nu.$$

[*Alles, wie oben bei der Zerlegung und Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.*]

Diese Art die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten und Kräfte als Resultate der Zusammensetzung der durchlaufenen Räume zu betrachten, scheint mir die natürlichste und hat den Vorzug, dass sie deutlich zeigt, warum die Zusammensetzung der Kräfte genau nach denselben Gesetzen erfolgt, wie die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten. Da man auch die Kräfte unabhängig von der Bewegung betrachten kann, [*nicht einmal ganz füglich, weil der Begriff von Kraft eigentlich nur auf dem Begriffe ihrer Wirkung beruht,*] so hat man die Zusammensetzung der Kräfte blos analytisch oder geometrisch zu demonstriren gesucht. Aber es liesse sich zeigen, dass alle Beweise, die man über die Zusammensetzung der Kräfte [*das Parallelogramm der Kräfte*] gegeben hat, nur auf eine versteckte Zusammensetzung von Linien hinauskommen, vielleicht diejenigen allein ausgenommen, die auf das Gleich-

gewicht des graden Hebels gegründet sind. [*Dieses Urtheil eines mit der Theorie der Mechanik so sehr vertrauten Mathematikers ist merkwürdig.*]

10.

Wären die Bewegungen in den Richtungen der Coordinaten-Axen aus gleichförmigen und gleichförmig-beschleunigten Bewegungen zusammengesetzt, so dass

$$x = at + \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$y = bt + \tfrac{1}{2}ht^2$$
$$z = ct + \tfrac{1}{2}kt^2$$

wäre, so ist die von diesen Bewegungen beschriebene Linie nicht mehr grade, sondern liegt blos in einer und derselben, durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehenden Ebene. Denn eliminirt man t und t^2 aus den drei Gleichungen, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$lx + my + nz = 0.$$

[*Denn es ist* $\frac{x}{y} = \frac{a + \frac{1}{2}gt}{b + \frac{1}{2}ht}$, $\frac{x}{z} = \frac{a + \frac{1}{2}gt}{c + \frac{1}{2}kt}$, *oder* $(\frac{1}{2}hx - \frac{1}{2}gy)t = ay - bx$, $(\frac{1}{2}kx - \frac{1}{2}gz)t = az - cx$, *also*

$$\frac{hx - gy}{kx - gz} = \frac{ay - bx}{az - cx}, \text{ oder}$$

$$(bk - hc)x^2 + (gc - ak)xy + (ah - gb)zx + (ag - ag)y = 0,$$

also, wenn man mit x *dividirt,*

$$(bk - hc)x + (gc - ak)y + (ah - gb)z = 0,$$

welche Gleichung die obige Form hat, und aus welcher, weil sie die Gleichung einer Ebene ist, folgt, dass die Bewegung in einer und derselben

Ebene vorgeht.] Aber man kann auch die drei gleichförmigen und die drei gleichförmig-beschleunigten Bewegungen einzeln zusammensetzen, woraus eine Bewegung entsteht, die aus einer einfachen gleichförmigen Bewegung, nach einer gegebenen Richtung, und aus einer einfachen gleichförmig-beschleunigten Bewegung, ebenfalls nach einer gegebenen Richtung, zusammengesetzt ist.

Die Vereinigung solcher Bewegungen kommt in der Wirklichkeit bei Körpern vor, die schräg gegen den Horizont geworfen werden, wenn man von dem Widerstande der Luft abstrahirt. Die gleichförmige Bewegung, als die Wirkung der anfänglich erzeugten Geschwindigkeit, beharrt in grader Linie, als wenn sie allein vorhanden wäre; die gleichförmig-beschleunigte Bewegung, welche die Wirkung der Schwere ist, fährt auch, senkrecht von oben nach unten, fort, als wenn sie allein da wäre, so dass der Körper, nach Ablauf einer gewissen Zeit, an den nemlichen Ort gelanget, wo er hinkommen würde, wenn die beiden Bewegungen, eine nach der anderen, und unabhängig von einander Statt fänden. Zugleich hat der Körper in jedem Augenblicke beide Geschwindigkeiten zugleich, die der gleichförmigen und die der gleichförmig-beschleunigten Bewegung, und aus diesen beiden Geschwindigkeiten, nach verschiedenen Richtungen, ist die wirkliche Geschwindigkeit des geworfenen Körpers zusammengesetzt.

Die Höhe, von welcher ein Körper fallen muss, um diejenige Geschwindigkeit zu erlangen, mit welcher er schräg geworfen wird, sey H, so ist die Geschwindigkeit selbst $= \sqrt{(2H)}$, wenn man die Schwere

zur Einheit der beschleunigenden Kräfte nimmt. (6.) Daraus folgt, wenn man die Abscisse horizontal und in der Ebene der Bahn des Körpers, und die Ordinaten y vertical, von oben nach unten annimmt und die Neigung der Bahn gegen den Horizont α nennt, dass sich die horizontalen und die verticalen Geschwindigkeiten durch $\cos\alpha\sqrt{(2H)}$ und $\sin\alpha\sqrt{(2H)}$ ausdrücken lassen. Die Ausdrücke von x und y sind also

$$x = t\cos\alpha\sqrt{(2H)} \text{ und}$$
$$y = t\sin\alpha\sqrt{(2H)} - \tfrac{1}{2}t^2.$$

Da die Richtung der Schwere der Richtung der Ordinaten entgegengesetzt ist, so muss das Glied $\frac{1}{2}t^2$, welches von der Beschleunigung der Schwere herkommt, negativ genommen werden. Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen t, so erhält man [*weil* $t = \frac{x}{\cos\alpha\sqrt{(2H)}}$ *ist*, $y = x\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{x^2}{4\cos\alpha^2 H}$, *oder*]

$$y = x\,\text{tang}\,\alpha - \frac{x^2}{4H\cos\alpha^2},$$

welches die Gleichung einer Parabel ist, woraus die bekannten Eigenschaften der Wurflinie im leeren Raume gefunden werden können. Es ist hier nicht der Ort, weiter in dieses Detail einzugehen.

Dritter Abschnitt.

Von der krummlinigen Bewegung. Von den Geschwindigkeiten und Kräften bei diesen Bewegungen. Allgemeine Gleichungen der Bewegung eines von beliebigen Kräften getriebenen Körpers. Von den Mitteln, die Zeit zwischen diesen Gleichungen zu eliminiren, um die Bahn des Körpers zu finden.

11.

Wir wollen nun ferner eine beliebige Bewegung untersuchen und annehmen, dass die Coordinaten der Bahn x, y, z gegebene Functionen der Zeit t sind. In einem beliebigen Augenblicke, nach Ablauf der Zeit t, wird der Körper nach der Richtung der Axe der x die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ haben, und die beschleunigende Kraft $\frac{dx^2}{dt^2}$ wird auf ihn wirken. (6.) Nach der Richtung der Axe der y werden Geschwindigkeit und Kraft $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$, und nach der Richtung der Axe der z, $\frac{dz}{dt}$ und $\frac{d^2z}{dt^2}$ sein. [*Da nach der Anmerkung zu* (6.) *die Kraft* $= \frac{d^2x}{dt^2} : 2g$ *ist, so wird hier, als Maass der Kraft, die Geschwindigkeit* $2g$, *welche die Schwere in einer Zeit-Secunde hervorbringt, zur Einheit angenommen.*] Die drei Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ geben also die zu-

sammengesetzte Geschwindigkeit $\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}$, welche wir u nennen wollen. Die Richtung derselben macht mit den Axen Winkel, deren Cosinus $\frac{dx}{dt}:u$, $\frac{dy}{dt}:u$, $\frac{dz}{dt}:u$ sind, so dass, wenn man diese Winkel α, β, γ nennt,

$\frac{dx}{dt}=u\cos\alpha$, $\frac{dy}{dt}=u\cos\beta$, $\frac{dz}{dt}=u\cos\gamma$ ist. (8.)

Hier ist sogleich zu bemerken, dass der Ausdruck der Geschwindigkeit $u\left[=\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}\right]$ mit dem Ausdrucke der ersten Ableitung des Bogens der durchlaufenen Curve (37. 2ter Theil) übereinkommt, so dass, wenn allgemein s die vom Körper durchlaufene krumme Linie ist, und man diesen Raum als eine Function der Zeit betrachtet, $\frac{ds}{dt}$ die wirkliche Geschwindigkeit des Körpers ist, gleich als wenn die Richtung der Bewegung gradlinig wäre.

Ferner ist zu bemerken, dass die Richtung dieser Geschwindigkeit diejenige der Tangente der Bahn ist. Denn aus (33. 2ter Theil) sieht man, dass $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ die Tangenten der Winkel sind, welche die Tangenten der Projectionen der Curve auf die Ebenen der x, y und x, z mit der Axe der x machen. Da aber in jenen Ausdrücken (33. 2ter Theil) y und z Functionen von x sind, so muss man, um sie auf den gegenwärtigen Fall, wo x, y, z als Functionen einer

dritten veränderlichen Grösse t betrachtet werden, anzuwenden, nach (50. 1ster Theil) $\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$ statt $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dt}:\frac{dx}{dt}$ statt $\frac{dz}{dx}$ setzen, $\left[\textit{weil } \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\right.$ $\left.\textit{und } \frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \textit{ ist,}\right]$ so dass die Tangenten der erwähnten Winkel nunmehr $\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}:\frac{dx}{dt}$ sind. Diese Winkel kommen alsdann mit den Winkeln der [*gradlinigen*] Projection der [*graden*] Linie, welche von einer aus den drei Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ zusammengesetzten Geschwindigkeit (7.) beschrieben werden würde, überein. Folglich fällt diese Linie mit der Tangente der Curve zusammen. Daraus folgt, dass, wenn die Ursachen, welche die Gradlinigkeit und Gleichförmigkeit der Bahn hindern, in irgend einem Augenblicke plötzlich aufhörten, der Körper in der Tangente seiner Bahn sich fortbewegen würde, mit einer Geschwindigkeit, die der ersten Ableitung des beschriebenen Bogens gleich ist.

In der Differential-Rechnung setzt man dt constant.

12.

Eben so geben die drei beschleunigenden Kräfte $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ (9.) eine einzige Kraft $\sqrt{\left(\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right)}$, welche wir durch P bezeichnen wollen und deren Richtung mit den Coordinaten-Axen Winkel macht, deren Cosinus $\frac{d^2x}{dt^2}:P$,

$\frac{d^2y}{dt^2} : P$, $\frac{d^2z}{dt^2} : P$ sind, so dass, wenn diese Winkel λ, μ, ν heissen,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P \cos \lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = P \cos \mu, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = P \cos \nu$$

ist.

Kennt man also das Gesetz der Bewegung des Körpers, das heisst, die Werthe von x, y und z in t, so kann man aus diesen Gleichungen die beschleunigende Kraft und ihre Richtung in jedem Augenblicke finden. Umgekehrt erhält man, wenn man die Kraft P, nebst den Winkeln λ, μ, ν kennt, drei Ableitungs-Gleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung von x, y, z in t. Die Aufgaben der ersten Art hängen nur von der Ableitungs-Rechnung ab und sind folglich immer auflösbar. Die der zweiten Art bedürfen der Zurückleitungs-Rehnung und sind allen Schwierigkeiten derselben unterworfen.

Würde der Körper zugleich von zwei beschleunigenden Kräften P und Q, nach Richtungen getrieben, welche mit den Axen der x, y, z, für die Kraft P, die Winkel λ, μ, ν, für die Kraft Q, die Winkel π, ϱ, σ machen, so erhielte man, dem Obigen zufolge,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P \cos \lambda + Q \cos \pi$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = P \cos \mu + Q \cos \varrho$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = P \cos \nu + Q \cos \sigma$$

u. s. w. für so viel Kräfte als man will.

13.

Angenommen, die Richtungen der Kräfte P und Q machten mit der Tangente der Bahn die Winkel Δ und Θ, so erhält man, weil die Winkel α, β, γ in (11.) mit denen übereinkommen, welche die Tangente der Bahn mit den drei Axen macht, vermöge des, am Ende von (8.) gefundenen Ausdrucks,

$$\cos\Delta = \cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\nu$$

und, eben so,

$$\cos\Theta = \cos\alpha \cos\pi + \cos\beta \cos\varrho + \cos\gamma \cos\sigma.$$

Multiplicirt man also die drei Gleichungen, am Schlusse des vorigen Paragraphs, die erste mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\cos\beta$, die dritte mit $\cos\gamma$, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\beta + \frac{d^2z}{dt^2}\cos\gamma$$
$$= P\cos\Delta + Q\cos\Theta.$$

Substituirt man für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ihre Werthe $\frac{dx}{dt}:u$, $\frac{dy}{dt}:u$, $\frac{dz}{dt}:u$ (11.) und bemerkt, dass

$$\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}} \left[\text{oder}\right.$$

$$\left.\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}}{u}\right]$$ die erste Ableitung von $\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}$, das heisst, die erste Ableitung von $\frac{ds}{dt}$ und folglich gleich $\frac{d^2s}{dt^2}$ ist, so erhält man

$$\left[\frac{\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{dz}{dt}}{u}=P\cos\Delta+Q\cos\Theta,\right.$$

oder]

$$\frac{d^2s}{dt^2}=P\cos\Delta+Q\cos\Theta,$$

welche Gleichung, wie man sieht, den Gleichungen für die gradlinige Bewegung nach der Richtung der drei Axen, ähnlich ist.

Diese Gleichung dient zur directen Bestimmung der durch $\frac{ds}{dt}$ ausgedrückten wirklichen Geschwindigkeit des Körpers und es folgt daraus, dass Kräfte, die auf der Tangente der Bahn senkrecht sind, gar nicht auf die Geschwindigkeit wirken, weil, wenn die Winkel Δ und Θ rechte sind, ihre Cosinus verschwinden, und folglich die, diesen Kräften entsprechenden Glieder, in dem Ausdrucke von $\frac{d^2s}{dt^2}$ wegfallen.

Hieraus folgt allgemein, dass, wenn ein Körper gezwungen ist, sich in einem gegebenen Canale zu bewegen, seine Geschwindigkeit auf keine Weise durch die Wirkung des Canals auf den Körper geändert wird, indem die Wirkung der Wände des Canals auf den Körper, nur senkrecht auf diesen Wänden sein kann. Hingegen äussern die Kräfte, welche die Richtung der Tangenten haben, ihre ganze und volle Wirkung auf die Geschwindigkeit, gleich als ob die Bewegung des Körpers gradlinig wäre, indem die Cosinus der Winkel Δ und Θ, wenn diese Winkel für dergleichen Kräfte Null sind, der Einheit gleichen.

14.

Die Schwere und alle bekannte anziehende Kräfte wirken gleich stark auf alle einzelne materielle Theile der Körper und bringen, wenn man von der Ungleichheit der Kräfte, in Rücksicht der Entfernung, abstrahirt, die nemliche Bewegung hervor, so dass die Wirkung dieser Kräfte von der Masse des bewegten Körpers unabhängig und in Beziehung auf die hervorgebrachte Geschwindigkeit die nemliche ist, als wenn die Masse in einem Puncte vereinigt wäre. Bei den gegenseitigen Anziehungen der Körper verhält sich die anziehende Kraft, wie die Masse des angezogenen Körpers, weil alle Theile gleich stark gezogen werden; folglich steht die hervorgebrachte absolute Bewegung des angezogenen Körpers in gradem Verhältnisse seiner Masse.

Bei Kräften, deren Wirkung nicht in das Innere der Körper dringt, sondern die auf dieselben nur von Aussen wirken, wie z. B. Federn, der Widerstand der Flüssigkeiten, Kräfte die durch Druck, durch Spannung von Fäden etc. hervorgebracht werden, verhält es sich nicht so. Es ist offenbar, dass diese Kräfte auf verschiedene Körper nicht einerlei Wirkung hervorbringen können, wenn sie nicht im Verhältniss der Massen der Körper stehen; denn wenn z. B. eine doppelt so grosse Kraft auf eine doppelt so grosse Masse wirkt, so ist dieses eben so viel, als wenn zwei einfache Kräfte, jede einzeln, auf zwei einfache Massen wirken; ferner ist klar, dass die von verschiedenen Kräften auf die nemlichen, oder auf gleiche Massen hervorgebrachte Wirkung, nemlich

die Bewegung, oder die hervorgebrachte Geschwindigkeit, im Verhältniss der Kräfte stehen muss; dass also, wenn eine Kraft *F*, auf eine Masse *M* wirkend, eine Geschwindigkeit *V* hervorbringt, eine andere Kraft *mF*, auf die Masse *mM* wirkend, die nemliche Geschwindigkeit *V*; hingegen, wenn sie auf die Masse *M* wirkt, die Geschwindigkeit *mV* erzeugen muss; also bringt die Kraft *mF* in der Masse *mM* die Geschwindigkeit *V*, und in der Masse *M* die Geschwindigkeit *mV* hervor, woraus folgt, dass die, durch eine und dieselbe Kraft, in verschiedenen Massen hervorgebrachten Geschwindigkeiten, sich umgekehrt wie die Massen verhalten. Also verhält sich allgemein die Wirkung einer gegebenen Kraft auf eine gegebene Masse, direct wie die Kraft, und umgekehrt wie die Masse, oder wie die Kraft durch die Masse dividirt. [*Wenn man sich auf metaphysiche Schlüsse einlassen will, so kann man hier wieder gleiche Schwierigkeiten erheben, wie bei dem Parallelogramm der Kräfte. Selbst schon von dem Schlusse, dass das, was für m = 2, oder für m gleich einer beliebigen ganzen Zahl für jeden, auch irrationalen Werth von m gilt, wird sogar in der Geometrie schon eine Rechtfertigung verlangt. Man sieht, dass Lagrange alle dergleichen Schwierigkeiten absichtlich bei Seite setzt.*]

Dieser Grundsatz wird durch die Erfahrung bestätig. [*Der Verfasser setzt bestätigt (confirmé) nicht bewiesen, denn aus Versuchen ihn herzunehmen, wäre Induction und Folgerung des Allgemeinen aus dem Besonderen. Der Satz ist vernunftgemäss, und die Erfahrung bestätigt ihn.*]

Denn eine Feder, zwischen zwei Körper gebracht, und auf beide gleich wirkend, bringt Geschwindigkeiten in demselben hervor, die sich wie die Massen verhalten. Bewegen sich zwei harte Körper in gleicher, aber entgegengesetzter Richtung, mit Geschwindigkeiten, die sich wie ihre Massen verhalten, gegen einander, so bleiben sie nach dem Stosse völlig ruhen, und wenn sie vollkommen elastisch sind, so werfen sie sich, jeder, genau mit der nemlichen Geschwindigkeit zurück, die sie vor dem Stosse hatten.

Da bei schweren Körpern die Schwere auf alle Theile der Körper gleich wirkt, so verhält sich die absolute Wirkung wie die Masse. Dividirt man also die ganze Wirkung [*die bewegende Kraft*, *das Gewicht*] durch die Masse, so wird dadurch die Wirkung der Schwere auf die Hervorbringung von Bewegung der Körper, von der Masse unabhängig und ist für alle Körper die nemliche. Hängen aber zwei schwere Körper an einem, über eine Rolle gehenden Faden, so bleibt nur der Unterschied der Gewichte als wirkende Ursach der Bewegung übrig, weil die von der Schwere hervorgebrachten Kräfte, die sich wie die Massen verhalten, den Faden in entgegengesetzter Richtung ziehen; und da nun die beiden Körper sich zugleich bewegen und den nemlichen verticalen Raum in der nemlichen Zeit durchlaufen müssen, so ist die ganze zu bewegende Masse der Summe der beiden Körper gleich; die Wirkung der Schwere auf der Bewegung dieser Körper wird also im Verhältniss der Differenz der Masse zu ihrer Summe vermindert, folglich steht auch der nach Ablauf einer beliebigen Zeit durchlaufene Raum gegen denjenigen, welchen

ein freifallender Körper in der nemlichen Zeit durchlaufen würde, in dem nemlichen Verhältnisse. Genau dieses bestätigt die Erfahrung an dem, von Atwood, zum Beweise der Gesetze der Beschleunigung schwerer Körper, erfundenen Werkzeuge.

15.

Hieraus folgt, dass die, einen Körper beschleunigenden Kräfte im Verhältnisse der absoluten Werthe der Kräfte, welche auf den Körper wirken, dividirt durch die Masse des Körpers, stehen. Wenn also P und Q *etc.* die absoluten Werthe von Kräften sind, welche auf einen Körper wirken, dessen Masse M ist, nach Richtungen, die mit den Axen der Coordinaten x, y, z, bei der Kraft P, die Winkel λ, μ, ν, bei der Kraft Q, die Winkel π, ϱ, σ u. s. w. machen, so muss man in die Ausdrücke (12.), überall $\frac{P}{M}$, $\frac{Q}{M}$ *etc.* statt P, Q.... setzen, oder, was das Nemliche ist, die Grössen $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ mit M multipliciren. Dann erhält man für die Bewegung des von beliebigen Kräften P, Q.... getriebenen Körpers M, die Gleichungen

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = P\cos\lambda + Q\cos\pi \ldots.$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = P\cos\mu + Q\cos\varrho \ldots.$$

$$M\frac{d^2z}{dt^2} = P\cos\nu + Q\cos\sigma \ldots.$$

Ziehen sich Körper gegenseitig an, so steht der absolute Werth der anziehenden Kraft zweier Körper

per im Verhältnisse des Products der Massen, weil man annimmt, dass die Anziehung von allen Theilen der anziehenden Masse herkommt und auf alle Theile der angezogenen wirkt.

16.

In diesen Gleichungen werden die Coordinaten x, y, z als Functionen der Zeit t betrachtet. Um die Gleichung der von dem Körper durchlaufenen Linie zu finden, muss man die Zeit eliminiren und die Coordinaten y und z blos von x abhängig annehmen. Folgendes sind die Gründe und Mittel dieser Reduction.

Betrachtet man die Grössen x, y, z als Functionen von t, so erhält man, wenn t in $t+k$ übergeht, vermöge der Formeln des ersten Theils,

$$x + k\frac{dx}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\dots.$$

$$y + k\frac{dy}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2}\dots.$$

$$z + k\frac{dz}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dt^2}\dots.$$

Betrachtet man dagegen y und z als Functionen von x, so erhält man, wenn x in $x+\varepsilon$ übergeht,

$$y + \varepsilon\frac{dy}{dx} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\dots.$$

$$z + \varepsilon\frac{dz}{dx} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2}\dots.$$

Setzt man also $k\frac{dx}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\dots.$ [*die obige Zunahme von x*] statt ε, so erhält man, was auch k ist

$$\varepsilon\frac{dy}{dx} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\dots. = k\frac{dy}{dt} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2}\dots. \text{ und}$$

$$\varepsilon\frac{dz}{dx}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2}\dots = k\frac{dz}{dt}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dt^2}\dots$$

Substituirt man den obigen Werth von ε, so erhält man

$$\Big[\left(k\frac{dx}{dt}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\dots\right)\frac{dy}{dx} = k\frac{dy}{dt}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(k\frac{dx}{dt}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\dots\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\dots\dots\dots \quad \dots\dots, \text{ oder}\Big]$$

$$k\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx}+\frac{k^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dx}+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3x}{dt^3}\frac{dy}{dx}\dots = k\frac{dy}{dt}$$

$$+\tfrac{1}{2}k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{k^3}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}\dots+\frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$+\frac{k^3}{2.3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3\frac{d^3y}{dx^3}\dots+\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dt^3}\dots$$

$$\dots\dots\dots \quad \dots\dots$$

und, wenn man die Glieder mit gleichen Potenzen von k gleich setzt,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

etc.

woraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2}:\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}:\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\left(\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2\frac{dx}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$
$$=\frac{d^3y}{dt^3}:\left(\frac{dx}{dt}\right)^3-\frac{dy}{dt}\,\frac{d^3x}{dt^3}:\left(\frac{dx}{dt}\right)^4$$
$$-3\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2:\left(\frac{dx}{dt}\right)^4+3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^5$$

u. s. w. Aus der zweiten Gleichung erhält man, für $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots$, Ausdrücke die aus den vorigen folgen, wenn man darin z statt y setzt.

Diese Ausdrücke stimmen ganz mit denjenigen überein, welche wir im ersten Theile (50.) auf eine andere Weise fanden, denn es ist leicht zu sehen, dass

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}\right)}{dt}:\frac{dx}{dt}\ \text{etc.}$$

Das gegenwärtige Verfahren ist directer und beruht auf den ersten Gründen des Gegenstandes, aber das frühere hat den Vorzug, das Gesetz der Fortschreitung sichtbar zu machen; denn es giebt unmittelbar

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{dt}:\frac{dx}{dt},\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dt}:\frac{dx}{dt}\ \text{etc.}$$

Mittels dieser Ausdrücke kann man die Gleichungen, welche die Ableitungen nach t von $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \ldots$, $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2} \ldots$, $\frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2} \ldots$ enthalten, in andere Gleichungen verwandeln, in welchen nur die Ableitungen $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots$, $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots$ nach x vorkommen.

Vierter Abschnitt.

Von der Aufgabe, den Widerstand des Mittels zu finden, in welchem ein geworfener Körper eine gegebene Curve beschreibt. Newtons Auflösung dieser Aufgabe in der ersten Ausgabe seiner Principien. Ursachen des Irrthums in dieser Auflösung. Unterschied zwischen der Methode der Reihen und der Methode der Ableitungen, oder der Differential-Rechnung.

17.

Um eine Anwendung der gefundenen Ausdrücke zu machen, wollen wir den Widerstand eines Mittels suchen, in welchem ein, in demselben geworfener Körper, eine gegebene Curve beschreibt. Man muss hier den Widerstand als eine verzögernde Kraft, die in der Richtung des Körpers oder der Tangente seiner Bahn wirkt, betrachten. Heisst also der Widerstand r, nemlich die Wirkung des widerstehenden Mittels auf die Oberfläche des Körpers, dividirt durch des Körpers Masse; so sind die von dem Widerstande erzeugten beschleunigenden Kräfte, nach der Richtung der Axen der x, y, z, wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die Tangente der Bahn mit den Axen macht,

$$-r \cos \alpha, \quad -r \cos \beta, \quad -r \cos \gamma.$$

Wenn ferner die beschleunigende Kraft der Schwere g ist, und man nimmt die Ordinaten y vertical und

in der Richtung von oben nach unten an, so ist $-g$ die, von der Schwere herkommende, beschleunigende Kraft, nach der Richtung der Ordinaten y.

Die Gleichungen der Bewegung sind also

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-r\cos\alpha, \frac{d^2y}{dt^2}=-g-r\cos\beta, \frac{d^2z}{dt^2}=-r\cos\gamma.$$

Setzt man für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ihre Werthe $\frac{dx}{dt}:u$, $\frac{dy}{dt}:u$ und $\frac{dz}{dt}:u$ (11.), wo u die Geschwindigkeit des Körpers $=\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}$ ist, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{r}{u}\cdot\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g-\frac{r}{u}\cdot\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{r}{u}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

Die erste und letzte Gleichung geben [*wenn man sie durch einander dividirt*]

$$\frac{d^2x}{dt^2}:\frac{dx}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}:\frac{dz}{dt},$$

wovon die Stammgleichung

$$z=mx+n$$

ist, wenn m und n willkürliche Constanten bedeuten. [*Nemlich die erste Stammgrösse ist* $\log m\frac{dx}{dt}=\log\frac{dz}{dt}$, *oder* $m\frac{dx}{dt}=\frac{dz}{dt}$. *Hiervon ist wiederum die Stammgrösse* $mx+n=z$.] Da dieses die Gleichung einer verticalen Ebene ist, so findet sich, dass die Curve nothwendig ganz in dieser Ebene liegen muss. Legt man also die Axe der x in die verticale

Ebene, so ist $z = 0$ und $\frac{dz}{dx} = 0$, und die Gleichungen der Curve reduciren sich auf die beiden ersten der obigen drei Gleichungen. Aber, da in diesen Gleichungen die veränderlichen Grössen x und y als Functionen der Zeit betrachtet werden, und man, um die Gleichung der Curve zu finden, y als Function von x betrachten muss, so muss man danach die Ausdrücke, zufolge des vorigen Paragraphs, abändern.

Man setze, der Kürze wegen, $\frac{r}{u} = q$, so ist

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -q\frac{dx}{dt} \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = -g - q\frac{dy}{dt}.$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck von $\frac{d^2y}{dx^2}$ $\left[= \frac{d^2y}{dt^2} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]$ (16.), so erhält man $\left[\frac{d^2y}{dx^2} = \left(-g - q\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + q\frac{dy}{dt} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \textit{ oder}\right]$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -g : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Also hängt der Werth von $q \left[= \frac{r}{u} = \frac{r}{\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}}\right]$ von $\frac{d^3y}{dx^3}$ ab [*indem der gefundene Ausdruck von* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *noch t enthält*]. Nun ist, zufolge des vorigen Paragraphs,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - \frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^4 - 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2x}{dt^2} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

und weil man die Werthe von $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$ kennt, so darf man nur die ersten Ableitungen davon nehmen, um $\frac{d^3x}{dt^3}$ und $\frac{d^3y}{dt^3}$ zu finden. Man erhält $\left[aus\ \frac{d^2x}{dt^2} = -q\frac{dx}{dt}\ und\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g - q\frac{dy}{dt}\right]$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -q\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dq}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \left(q^2 - \frac{dq}{dt}\right)\frac{dx}{dt} \text{ und}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = -q\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dq}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} = qg + \left(q^2 - \frac{dq}{dt}\right)\frac{dy}{dt}.$$

Substituirt man Dieses, so geben die beiden ersten Glieder $\left[\frac{d^3y}{dt^3} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^3x}{dt^3} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^4\right]$ von $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\left[\left(qg + \left(q^2 - \frac{dq}{dt}\right)\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - \frac{dy}{dt}\left(q^2 - \frac{dq}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 =\right] qg : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$ und das Glied $-3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ giebt $\left[-3\frac{d^2y}{dt^2} - q\frac{dx}{dt} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 =\right] -3qg : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$, so dass $\frac{d^3y}{dx^3} = -2qg : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$ ist. Nun ist $q = \frac{r}{\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}}$. Substituirt man Dieses und schafft $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ vermittels der Gleichungen $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = -g : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ weg, so erhält man $\left[erstlich\ q = \frac{r}{\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)}}\right.$

$$= \frac{r}{\frac{dx}{dt}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}, \textit{ sodann } \frac{d^3y}{x^3} =$$

$$-\frac{2gr}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^4\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}} \textit{ und weil } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

$$\textit{also } \frac{-2g}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^4} = -\frac{2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}{g} \textit{ ist,}]$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2r\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}{g\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}},$$

woraus folgt

$$\frac{r}{g} = -\frac{\frac{d^3y}{dx^3}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}.$$

Ist nun die Curve gegeben, so hat man y in x. Daraus folgen auch die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^3y}{dx^3}$ und der eben gefundene Ausdruck giebt für jeden Punct der Curve das Verhältniss des Widerstandes [r] zur Schwere [g].

Die Geschwindigkeit u ist

$$= \sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)} = \frac{dx}{dt}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

$$\left[\textit{und weil } \frac{d^2y}{dx^2} = -g : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \textit{ also } \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-\frac{d^2y}{dx^2}}} \textit{ ist}\right]$$

$$u = \frac{\sqrt{g}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{\sqrt{-\frac{d^2y}{dx^2}}}.$$

Werden diese Ausdrücke in Differential-Ausdrücke übersetzt, so wird dx constant angenommen.

Setzt man den Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit und der Dichtigkeit des Mittels proportional, so ist, wenn Δ die Dichtigkeit in irgend einem Orte der Bahn bedeutet, $r = mu^2\Delta$, wo m ein constanter Coefficient ist. Substituirt man hierin den obigen Werth von u, so erhält man

$$r = \frac{mg\Delta\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{-\frac{d^2y}{dx^2}}$$

und, wenn man dieses r in die obige Gleichung

$$\left[\frac{r}{g} = -\frac{\frac{d^3y}{dx^3}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\right]$$ setzt,

$$\left[\frac{m\Delta\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{-\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{\frac{d^3y}{dx^3}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}, \textit{ oder}\right]$$

$$m\Delta = \frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{2\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}},$$

woraus sich die Dichtigkeit [Δ] des Mittels bestimmen lässt, welche nöthig ist, damit die gegebene Curve beschrieben werde. Umgekehrt dient diese Gleichung, die Curve zu bestimmen, wenn die Dichtigkeit des Mittels gegeben ist.

Für die Luft kann man die Dichtigkeit constant annehmen. Setzt man also, der Kürze wegen, $2 m \triangle = \frac{1}{k}$; so ist die Gleichung der Curve

$$\frac{d^3y}{dx^3} : \frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = k\frac{ds}{dx},$$

wenn s den Curven-Bogen bedeutet. Daraus folgt, wenn man die Stammgrössen nimmt, $\left[\overset{e}{log}\frac{d^2y}{dx^2}m = ks,\right.$ *oder* $\overset{e}{log}\frac{d^2y}{dx^2}m = ks\overset{e}{log}\,e = \overset{e}{log}\,e^{ks}$, *also* $m\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ks}$ *und* $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{e^{ks}}{m}$, *oder*$\left.\right]$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ae^{ks},$$

wo A eine willkürliche Constante bedeutet. Dieses ist die einfachste Form, auf welche die Gleichung der Curve gebracht werden kann. Man kann aus diesen Gleichungen die verschiedenen Näherungen finden, welche bis jetzt zur Bestimmung der von Kanonen-Kugeln und Bomben beschriebenen Curven aufgestellt worden sind. Aber die Grenzen dieser Schrift erlauben uns kein weiteres Detail.

18.

Wir wollen noch bemerken, dass man die Gleichung der Curve unmittelbar aus der Grund-Gleichung der gegenwärtigen Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{r\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{r\frac{dy}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

durch Elimination der Zeit t hätte finden können.

Denn da x und y Functionen von t sind, so kann man, umgekehrt, y und t als Functionen von x betrachten. Dann müssen, nach (50. 1ster Theil), wenn im Allgemeinen x, y, t als Functionen einer andern beliebigen veränderlichen Grösse t betrachtet werden, $\frac{dx}{dz}:\frac{dt}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}:\frac{dt}{dz}$ statt $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$, und

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dz}:\frac{dt}{dz}\right)}{dz}:\frac{dt}{dz} \text{ und } \frac{d\left(\frac{dy}{dz}:\frac{dt}{dz}\right)}{dz}:\frac{dt}{dz} \text{ statt}$$

$\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$ gesetzt werden. Nimmt man nun aber x selbst zur unabhängig veränderlichen Grösse an, so ist [*weil* $z=x$] $\frac{dx}{dz}=1$, und man darf jetzt nur $1:\frac{dt}{dz}$ und $\frac{dy}{dz}:\frac{dt}{dz}$ statt $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$, und

$$-\frac{d^2t}{dz^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^3 \text{ und } \frac{d^2y}{dz^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^2-\frac{dy}{dz}\frac{d^2t}{dz^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^3$$

statt $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$ setzen.

Die beiden obigen Gleichungen $\left[\frac{d^2x}{dt^2}=-r\frac{dx}{dt}:\frac{ds}{dt} \textit{ und } \frac{d^2y}{dt^2}=-g-r\frac{dy}{dt}:\frac{ds}{dt}\right]$ geben also, weil $\frac{ds}{dz}=\left[\sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}=\right]$ $\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}$, $\left[\textit{indem } z=\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{dz} \textit{ ist,}\right]$

$$-\frac{d^2t}{dx^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^3\left[=-\frac{r}{\frac{\frac{dt}{dz}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}}{\frac{dt}{dz}}}, \textit{ oder}\right]$$

$$-\frac{d^2t}{dz^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^3=-\frac{r}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}} \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^2-\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2t}{dz^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^3$$

$$\left[=-g-r\frac{dy}{dz}:\left(\frac{dt}{dz}\frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}}{\frac{dt}{dz}}\right)\right]$$

$$=-g-\frac{r\frac{dy}{dz}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}},$$

zwischen welchen Gleichungen $\frac{dt}{dz}$ eliminirt werden muss. Setzt man in die zweite Gleichung den Werth von $\frac{d^2t}{dz^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^3$ aus der ersten, so erhält man

$$\left[\frac{d^2y}{dz^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^2-\frac{r\frac{dy}{dz}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}}=-g\right.$$

$$\left.-\frac{r\frac{dy}{dz}}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}}, \text{ oder}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^2=-g.$$

Dividirt man mit $\frac{d^2y}{dz^2}$ und nimmt auf beiden Seiten die ersten Ableitungen, so erhält man

$$-2\frac{d^2t}{dz^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^3=g\frac{d^3y}{dz^3}:\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2,$$

welches in die erste Gleichung $\left[-\frac{d^2t}{dz^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^3 = \frac{r}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}}\right]$ gesetzt,

$$\frac{r}{g} = -\frac{\frac{d^3y}{dz^3}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}}{2\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2}$$

giebt, wie oben.

Die Geschwindigkeit $u = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}$, ist hier $= \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}}{\frac{dt}{dz}}$ [*weil* $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dz} : \frac{dt}{dz} = \sqrt{\left(1:\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 : \left(\frac{dt}{dz}\right)^2\right)}$ *ist,*] und weil, wie wir vorhin fanden, $\frac{dt}{dz} = \left(\sqrt{-\frac{d^2y}{dz^2}}\right) : \sqrt{g}$ ist, so ist die Geschwindigkeit

$$= \frac{\sqrt{g}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}}{\sqrt{\left(-\frac{d^2y}{dz^2}\right)}},$$

wie oben.

Wäre die Schwerkraft g veränderlich, so wäre der gefundene Werth von $\frac{r}{g}$ nicht mehr genau; denn wenn man die Ableitung der Gleichung $1:\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = -g\frac{d^2y}{dt^2}$ nähme, so würde man erhalten:

$$-2\frac{d^2t}{dz^2}:\left(\frac{dt}{dz}\right)^3 = g\frac{d^3y}{dz^3}:\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right) - \frac{dg}{dz}:\frac{d^2y}{dz^2},$$

und, wenn man diesen Werth substituirt,

$$\frac{r}{g} = -\frac{\frac{d^3y}{dz^3}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}}{2\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2} + \frac{\frac{dg}{dz}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right)}}{2g\,\frac{d^2y}{dz^2}}.$$

Diese Art, aus den Gleichungen für die Bewegung die Zeit zu eliminiren, um die Gleichung der beschriebenen Curve zu finden, ist derjenigen ähnlich, deren man sich in der Differential-Rechnung bedient. Aber die auf die Entwickelung der Functionen gegründete Methode von (16.) ist in gewisser Betracht directer. Und dann wird sie uns dazu dienen, wie wir es im Anfange dieser Schrift ankündigten, den wahren Grund des Irrthums zu entdecken, in welchen Newton bei der Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe, in der ersten Ausgabe seiner Principien, verfallen ist.

Obgleich es nicht besonders wichtig zu sein scheint, zu wissen, warum und wie Newton sich bei einer Auflösung hat irren können, da er sie späterhin selbst wieder verliess, so glaube ich doch, weil Alles, was sich auf die Erfindung und die ersten Anwendungen der Infinitesimal-Rechnung bezieht, die Aufmerksamkeit Derjenigen verdient, die sich für die Geschichte der Wissenschaft intressiren, dass man es nicht ungern sehen werde, wenn ich diesen Gegenstand, als Etwas das noch nicht völlig aufgeklärt ist, von Neuem untersuche, um so mehr, weil es dabei auf eine feine Unterscheidung zwischen der Differential-Methode und der Reihen-Methode ankommt, deren sich Newton bei seiner ersten Auflösung bediente. (Lib. II. Prop. X.)

19.

Folgendes ist die Construction, welche dieser Auflösung zum Grunde liegt. Wenn der bewegte Körper in irgend einem Puncte der Curve angelangt ist, so würde er weiter, wenn der Widerstand des Mittels und der Schwere nicht da wären, in einem gegebenen sehr kleinen Zeittheile, einen sehr kleinen Theil der Tangente durchlaufen, den wir α nennen wollen. Der kleine Raum, durch welchen ihn die Schwere, während der nemlichen Zeit, in einer auf den Horizont senkrechten Richtung forttreibt, sey γ und der kleine Raum, um welchen der Widerstand des Mittels den in der Tangente durchlaufenen Raum α vermindert, $= \varrho$, so ist klar, dass das Verhältniss von ϱ zu γ gleich dem Verhältnisse des Widerstandes zur Schwere ist. In der Zeit also, in welcher der Körper in der Richtung der Tangente den Raum $\alpha - \varrho$ durchlaufen haben würde, ist er also senkrecht um γ herabgefallen; folglich ist γ die Abweichung des Bogens von der Tangente [*flèche*]. Betrachtet man nun den Körper, als wenn er, von dem nemlichen Puncte ausgehend, seinen Weg zurück machte und im entgegengesetzten Sinne den Bogen der Curve, den er beschrieben hat, durchliefe, so muss man den Widerstand negativ annehmen, und folglich als eine Kraft betrachten, die die Bewegung beschleunigt, statt sie zu verzögern [*in Rücksicht auf das nächst vorhergehende Element der Curve*]. Der bewegte Körper wird also alsdann, in der nemlichen sehr kleinen Zeit, in der nemlichen Tangente, in entgegengesetzter Richtung den Raum $\alpha + \varrho$ beschreiben

und, vermöge der Schwere, vertical um γ herabfallen. Also wird γ die Abweichung des Bogens $\alpha + \varrho$ von der Tangente auf der anderen Seite des Curven-Punctes sein. Nun verhalten sich die Abweichungen für unendlich kleine Bogen wie die Quadrate der Bogen oder der Tangenten. Die Abweichung für den Theil $\alpha - \varrho$ des Bogens $\alpha + \varrho$ ist also $\gamma \left(\frac{\alpha - \varrho}{\alpha + \varrho}\right)^2$. Also ist der Unterschied der Abweichungen, für gleiche Bogen $\alpha - \varrho$, auf einer und der anderen Seite des gegebenen Curven-Puncts genommen,

$$\gamma\left(1 - \left(\frac{\alpha - \varrho}{\alpha + \varrho}\right)^2\right) = \frac{4\alpha\gamma\varrho}{(\alpha+\varrho)^2}.$$

Diese Differenz heisse δ, so ist

$$\frac{4\alpha\gamma\varrho}{(\alpha+\varrho)^2} = \delta \text{ und } \frac{\varrho}{\gamma} = \frac{\delta(\alpha+\varrho)^2}{4\alpha\gamma^2} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma},$$

weil die kleine Linie ϱ, welche mit gleichförmig beschleunigter Bewegung durchlaufen wird, unendlichemahl kleiner ist, als die in der nemlichen Zeit gleichförmig durchlaufene Linie α. [*Dieses wird behauptet aber nicht bewiesen und auf den Grund dieser unerwiesenen Behauptung, wird von* $\frac{\varrho}{\gamma}$ *ein Theil weggelassen. So geht es in der Differential-Rechnung häufig.*]

Dieses ist Newtons, möglichst deutlich vorgetragenes, Raisonnement. Unser gegenwärtiges Resultat stimmt mit demjenigen im zweiten Zusatze seines Problems überein, wo offenbar die Linien *CF* und *FG* das sind, was wir α und γ genannt haben, und die Differenz *FG* — *KL* unser δ ist.

Nimmt

Nimmt man nun die Abscisse x horizontal und die Ordinate y vertical, von oben nach unten gerechnet, so setzt Newton, dass für die Abscisse $x + k$, die Ordinate, in eine Reihe ausgedrückt, $y + Qk - Rk^2 - Sk^3 \ldots$ ist und bemerkt, dass der, dem Theile k der Axe entsprechende Theil der Tangente $k\sqrt{(1+Q^2)}$, die Abweichung der Curve von der Tangente in der Richtung der Ordinate aber $Rk^2 + Sk^3 \ldots$ sey. Setzt man k negativ, so erhält man die Abweichung für den nemlichen Theil der Tangente, auf der anderen Seite des Berührungs-Puncts, welche folglich $Rk^2 - Sk^3 \ldots$ ist. Die Differenz beider Abweichungen ist $2Sk^3 - \ldots$ Nun ist klar, dass die Grössen $k\sqrt{(1+Q^2)}$, $Rk^2 + Sk^3 \ldots$ und $2Sk^3 - \ldots$ die nemlichen sind, welche wir durch α, γ und δ bezeichnet haben. Also ist die Grösse $\frac{\alpha\delta}{4\gamma^2}$, welche das Verhältniss des Widerstandes zur Schwere ausdrückte, $\left[\frac{k\sqrt{(1+Q^2)} - 2Sk^3 - \ldots}{4(Rk^2+Sk^3\ldots)}, \textit{und}\right]$ wenn man oben und unten mit k^4 dividirt,

$$\frac{S\sqrt{(1+Q^2)}}{2(R+Sk)^2} = \frac{S\sqrt{(1+Q^2)}}{2R^2},$$

weil die unendlich-kleine Grösse k gegen R verschwindet. Dieses ist ebenfalls das nemliche Resultat welches Newton im ersten Beispiele des Problems findet.

Nach unserer Bezeichnung geht y in $y + \frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} \ldots$ über, wenn $x+k$ aus x wird. Vergleicht man Dieses mit Newtons Reihe $[y + Qk - Rk^2 - Sk^3 \ldots]$, so findet man

$$Q = \frac{dy}{dx},\quad R = -\tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2},\quad S = -\frac{1}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}\ldots.$$

Setzt man diesen Werth in den obigen Ausdruck $\left[\frac{S\sqrt{(1+Q^2)}}{2R^2}\right]$, so findet man für das Verhältniss des Widerstandes zur Schwere:

$$\left[-\frac{\frac{1}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{2.\frac{1}{4}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=\right]-\frac{\frac{d^3y}{dx^3}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

statt dass wir oben $-\frac{\frac{d^3y}{dx^3}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$ fanden (17.), woraus folgt, dass Newtons Auflösung irgend einen Fehler hat.

Es ist merkwürdig, dass, wenn man blos $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.... statt Q, $-R$, $-S$.... setzt, das Resultat richtig ist. Aus diesem Grunde glaubten die Bernouilli's, welche zuerst Newtons Irrthum bemerkten, so wie Alle, welche späterhin davon geredet haben, dass der Irrthum daher komme, dass Newton für die Glieder der Reihe $Qk - Rk^2 - Sk^3$.... das erste, zweite, dritte etc. Differential der Ordinaten gesetzt habe, statt dass diese Glieder nur die Differentiale, durch 1, 2, 6 u. s. w. dividirt, sind. Aber es ist leicht zu sehen, dass Newtons Auflösung von den Differentialen gar nicht abhängt, und dass in dem Ausdrucke $\frac{\alpha\delta}{4\gamma}$ die Glieder Rk^2, Sk^3.... der Reihe, ganz mit Recht, statt der Grössen γ und

$\frac{\delta}{2}$ gesetzt werden können. Der Irrthum muss also in der Formel $\left[\frac{\alpha\delta}{4\gamma}\right]$, für das Verhältniss des Widerstandes zur Schwere, selbst liegen. Dieses folgt auch offenbar schon daraus, dass die Formel sich nicht verändern würde, wenn auch die Schwere nicht mehr constant wäre; denn bei den beiden Bewegungen, vor- und rückwärts, nimmt man an, falle der Körper senkrecht durch die Linie y herab. In diesem Falle also müsste man ebenfalls ein richtiges Resultat erhalten, wenn man $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ statt Q, $-R$, $-S$ setzte, welches, wie man aus dem im vorigen Paragraph für $\frac{r}{g}$ gefundenen Werthe sieht, nicht der Fall ist.

20.

Um die Ursache des Fehlers zu entdecken, wollen wir Newtons Auflösung analytisch ausdrücken. u sey die Geschwindigkeit in einem beliebigen Puncte der Curve, so ist $u\tau$ der Raum, welchen der Körper, in der Richtung der Tangente, ohne Schwere und Widerstand, in der Zeit τ durchläuft. Nun sey g die absolute Kraft der Schwere, r diejenige des Widerstandes, so sind $g\frac{\tau^2}{2}$ und $\frac{r\tau^2}{2}$ die, vermöge dieser, während der kleinen Zeit τ als constant betrachteten Kräfte, in eben der Zeit durchlaufenen Räume. Der Körper hat also in der Richtung der Tangente den Raum $u\tau - \frac{r\tau^2}{2}$, und in der Richtung der verticalen Ordinate y, den Raum $g\frac{\tau^2}{2}$ durchlaufen, welcher

letztere die Abweichung der Curve von der Tangente ist, die zu der Tangente $u\tau - \frac{r\tau^2}{2}$ gehört. Nun setze man, wie Newton, der Körper bewege sich auf dem nemlichen Wege, mit der nemlichen Geschwindigkeit u, die Zeit t hindurch zurück, so durchläuft er in der Tangente den Raum $ut + \frac{rt^2}{2}$, weil der Widerstand jetzt in entgegengesetzter Richtung genommen werden muss. Der negativ genommene Raum entspricht der Zeit $\tau = -t$, also wäre die zugehörige Abweichung gleich $g\frac{t^2}{2}$ und wenn man nun will, dass die beiden, rück- und vorwärts durchlaufenen Räume, gleich gross sein sollen, wie Newton annimmt, so erhält man

$$u\tau - \frac{r\tau^2}{2} = ut + \frac{rt^2}{2},$$

woraus, bis auf τ^3 genau, folgt:

$$t = \tau - \frac{r\tau^2}{u},$$

[*nemlich, wenn man Dieses wieder statt t setzt, so erhält man*

$$u\tau - \frac{r\tau^2}{2} = u\tau - r\tau^2 + \frac{r}{2}\left(\tau^2 - \frac{2r\tau^3}{u} + \frac{r^2\tau^4}{u^2}\right), \text{ oder}$$

$$u\tau - \frac{r\tau^2}{2} = u\tau - \frac{r\tau^2}{2} - \frac{r^2\tau^3}{u} + \frac{r^3\tau^4}{2u^2},$$

welches, bis auf die unendlich kleineren, höheren Potenzen von τ, *als* τ^2, *mit* $u\tau - \frac{r\tau^2}{2} = ut + \frac{rt^2}{2}$ *übereinstimmt.*]

Setzt man diesen Ausdruck in den der Abwei-

chung $g\frac{t^2}{2}$, so erhält man [$\frac{g}{2}\left(\tau^2-\frac{2r\tau^3}{u}+\frac{r^2\tau^4}{u^2}\right)$, *oder, wenn man das Glied mit τ^4, als unendlich klein, weglässt,*] $\frac{g\tau^2}{2}-\frac{gr\tau^3}{u^2}$, und der Unterschied dieser beiden Abweichungen ist $\frac{gr\tau^3}{u}$, welches die Grösse ist, welche wir oben durch δ bezeichneten. Auf der anderen Seite ist klar, dass nach den obigen Bezeichnungen

$$\alpha = u\tau - \frac{r\tau^2}{2},\ \gamma = \frac{g\tau^2}{2} \text{ und } \varrho = \frac{r\tau^2}{2},$$

folglich

$$\frac{\varrho}{\gamma} = \frac{r}{g} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2} \text{ ist.}$$

[*Denn das letztere ist* $\dfrac{g\frac{r\tau^3}{u}\left(u\tau-\frac{r\tau^2}{2}\right)}{g^2\tau^4} = \frac{r}{g}$, *wenn man die höheren Potenzen von τ weglässt.*] Macht man ferner $\alpha = k\sqrt{(1+Q^2)}$ und nimmt Rk^2+Sk^3 und Rk^2-Sk^3 für die beiden Abweichungen an, welches $\gamma = Rk^2$ und $\delta = 2Sk^3$ giebt, [*wie oben*] so erhält man

$$\frac{r}{g} = \frac{\varrho}{\gamma} = \frac{S\sqrt{(1+Q^2)}}{2R^2},$$

wie Newton durch seine Construction findet.

21.

Nun ist leicht zu sehen, dass dieses Resultat auf den Gleichungen

$$u\tau - \frac{r\tau^2}{2} = k\sqrt{(1+R^2)},\ -ut - \frac{rt^2}{2} = -k\sqrt{(1+Q^2)}$$

$$g\frac{\tau^2}{2} = Rk^2+Sk^3 \text{ und } g\frac{t^2}{2} = Rk^2-Sk^3,$$

oder, kürzer, auf den Gleichungen

$$u\tau - \frac{r\tau^2}{2} = k\sqrt{(1+Q^2)} \text{ und } \frac{g\tau^2}{2} = Rk^2 + Sk^3,$$

τ und k positiv und negativ genommen, beruht, welches darauf hinauskommt, dass die Gleichungen, unabhängig von dem Werthe von k Statt finden müssen, der in der That, während er sehr klein angenommen wird, unbestimmt bleibt.

Die erste Gleichung giebt, mit Weglassung der Glieder der dritten Ordnung, weil τ und k von der ersten Ordnung sind,

$$\tau = \frac{k\sqrt{(1+Q^2)}}{u} + \frac{r(1+Q^2)k^2}{2u^3}.$$

[*Denn, substituirt man diesen Werth von* τ *in* $u\tau - \frac{r\tau^2}{2}$, *so erhält man*

$$k\sqrt{(1+Q^2)} + \frac{\sqrt{(1+Q^2)}k^2}{2u^2}$$
$$- \frac{\sqrt{(1+Q^2)}k^2}{2u^2} \dots$$
$$= k\sqrt{(1+Q^2)}, \text{ wie es sein muss.}]$$

Setzt man diesen Werth von τ in die zweite Gleichung $\left[\frac{g\tau^2}{2} = Rk^2 + Sk^3\right]$, so erhält man, mit Weglassung der Glieder vierter Ordnung,

$$\frac{g(1+Q^2)k^2}{2u^2} + \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}k^3}{2u^4} = Rk^2 + Sk^3.$$

Vergleicht man die Coefficienten zu gleichen Potenzen von k, so erhält man

$$R = \frac{g(1+Q^2)}{2u^2} \text{ und}$$

$$S = \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{2u^4}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $u^2 = \frac{g(1+Q^2)}{2R}$. Setzt man Dieses in die zweite, so erhält man

$$\frac{r}{g} = \frac{S\sqrt{(1+Q^2)}}{2R^2},$$

welches Newtons Resultat ist.

Aber nun ist zu bemerken, dass dieses letzte Resultat, da es durch Vergleichung der Glieder mit k^3, in der transformirten Gleichung $\frac{g\tau^2}{2} = Rk^2 + Sk^3$, gefunden ist, deshalb nicht richtig sein kann, weil das erste Glied dieser Gleichung, welches die Abweichung durch die Zeit [τ] ausdrückt, selbst nur bis auf die Glieder mit τ^3 richtig ist, so dass also eigentlich nur noch das Resultat $R = \frac{g(1+Q^2)}{2u^2}$, welches man durch Vergleichung der Glieder zweiter Ordnung findet, genau ist. Um auf diesem Wege den richtigen Werth von $\frac{r}{g}$ zu finden, muss man, da er zugleich von Gliedern mit k^3 abhängt, den Ausdruck der Abweichung in τ, selbst, bis auf τ^3 berichtigen. Da nun aber das auf $\frac{g\tau^2}{2}$ folgende Glied nicht unmittelbar durch die Gesetze der Mechanick gegeben ist, so kann man es nur auf folgende Weise nach dem Gesetze der Ableitungen finden.

22.

Da nach Newtons Voraussetzung y um $Qk - Rk^2 - Sk^3$ wächst, wenn x um k zunimmt,

und $k\sqrt{(1+Q^2)} = u\tau - \frac{r\tau^2}{2}$ und $Rk^2 + Sk^3 = \frac{g\tau^2}{2}$ (21.) ist, wo τ die mit der Zunahme k von x correspondirende Zunahme der Zeit bedeutet, so folgt, dass, wenn t in $t+\tau$ übergeht, aus x, [$x+k=$]

$$x + \frac{u}{\sqrt{(1+Q^2)}}.\tau - \frac{r}{\sqrt{(1+Q^2)}}.\frac{\tau^2}{2}$$

und aus y, [$y + Qk - Rk^2 + Sk^3 = y + Qk - \frac{g\tau^2}{2} =$]

$$y + \frac{Qu}{\sqrt{(1+Q^2)}}.\tau - \left(\frac{Qr}{\sqrt{(1+Q^2)}} + g\right)\frac{\tau^2}{2}$$

wird.

Bezieht man auf t die Ableitungen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ *etc.*, so gehen x uud y, allgemein, für $t+\tau$ statt t, in

$$x + \tau.\frac{dx}{dt} + \frac{\tau^2}{2}.\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\tau^3}{2.3}.\frac{d^3x}{dt^3} \ldots.$$

$$y + \tau.\frac{dy}{dt} + \frac{\tau^2}{2}.\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\tau^3}{2.3}.\frac{d^3y}{dt^3} \ldots.$$

über. Vergleicht man Dieses mit den vorigen Ausdrücken, so erhält man [*wenn man die Coefficienten zu gleichen Potenzen von* τ *gleich setzt*]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u}{\sqrt{(1+Q^2)}}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{r}{\sqrt{(1+Q^2)}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Qu}{\sqrt{(1+Q^2)}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Qr}{\sqrt{(1+Q^2)}} - g.$$

Auf der andern Seite ist auch, weil x und y zugleich in $x+k$ und $y + Qk - Rk^2 - Sk^3 - \ldots.$ übergehen,

$$k = \tau\frac{dx}{dt} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\tau^3}{2.3}\frac{d^3x}{dt^3} \ldots. \text{ und}$$

$$Qk - Rk^2 - Sk^3 \ldots. = \tau\frac{dy}{dt} + \frac{\tau^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\tau^3}{2.3}\frac{d^3y}{dt^3} \ldots.$$

Da also die Abweichung, allgemein, $Rk^2 + Sk^3 \ldots$ ist, so ist ihr Ausdruck in τ [$=Qk-(Qk-Rk^2-Sk^3)=$]

$$Q\left(\tau\frac{dx}{dt}+\frac{\tau^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\tau^3}{2.3}\frac{d^3x}{dt^3}\ldots\right)$$
$$-\tau\frac{dy}{dt}-\frac{\tau^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\tau^3}{2.3}\frac{d^3y}{dt^3}\ldots,$$

oder

$$\left(Q\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)\tau+\left(Q\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{\tau^2}{2}$$
$$+\left(Q\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^3y}{dt^3}\right)\frac{\tau^3}{2.3}\ldots$$

Die beiden ersten Glieder reduciren sich, wenn man die eben gefundenen Werthe von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ substituirt, auf $\frac{g\tau^2}{2}$. Um die folgenden Glieder zu haben, darf man nur die Werthe von $\frac{d^3x}{dt^3}$ und $\frac{d^3y}{dt^3}$ nach denen von $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$ suchen. Es ist $\frac{d^2y}{dt^2}=Q\frac{d^2x}{dt^2}-g$. Daraus folgt [*wenn man die Ableitung nimmt*] $\frac{d^3y}{dt^3}=Q\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dQ}{dt}$, also $Q\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^3y}{dt^3}=-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dQ}{dt}$. Um $\frac{dQ}{dt}$ zu finden, nehme ich die Gleichung $\frac{dy}{dt}=Q\frac{dx}{dt}$, welche aus den oben für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ gefundenen Ausdrücken folgt. Aus dieser Gleichung erhält man [*wenn man die Ableitung nimmt*] $\frac{d^2y}{dt^2}=Q\frac{d^2x}{dt^2}$ $+\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dQ}{dt}$, also $\frac{dQ}{dt}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Q\frac{d^2x}{dt^2}\right):\frac{dx}{dt}=$

$-g:\frac{dx}{dt}$. Also ist vorhin

$$Q\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^3y}{dt^3}=g\cdot\frac{d^2x}{dt^2}:\frac{dx}{dt}=-\frac{gr}{2}.$$

Daraus folgt, dass der Ausdruck der Abweichung der Curve von der Tangente, statt blos $\frac{g\tau^2}{2}$ zu sein, vielmehr $\frac{g\tau^2}{2}-\frac{gr\tau^3}{6u}$ ist. Also erhält man, statt der Gleichung $\frac{g\tau^2}{2}=Rk^2+Sk^3$, folgende

$$\frac{g\tau^2}{2}-\frac{gr\tau^3}{6u}=Rk^2+Sk^3,$$

welche bis zur dritten Ordnung genau ist. Substituirt man hierin den Werth von τ aus den vorigen Paragraphen $\left[\tau=\frac{k\sqrt{(1+Q^2)}}{u}+\frac{\sqrt{(1+Q^2)}k^2}{2u^2}\right]$, welcher bis zur zweiten Ordnung genau ist, so erhält man folgenden bis zur vierten Ordnung genauen Ausdruck:

$$Rk^2+Sk^3=\frac{g(1+Q^2)k^2}{2u^2}+\left(\frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{2u^4}-\frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{6u^4}\right)k^3,$$

oder:

$$Rk^2+Sk^3=\frac{g(1+Q^2)k^2}{2u^2}+\frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}k^3}{3u^4}$$

und hieraus, wenn man die Coefficienten zu gleichen Potenzen von k gleich setzt,

$$R=\frac{g(1+Q^2)}{2u^2}$$

$$S=\frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{3u^4}.$$

Setzt man in die zweite dieser beiden Gleichungen

den Werth von u^2 aus der ersten, welcher mit dem oben gefundenen übereinkommt, so findet man

$$\frac{r}{g} = \frac{3S\sqrt{(1+Q^2)}}{4R^2}$$

und dieses ist der Ausdruck, den Newton späterhin in der zweiten Ausgabe seiner Principien (Libr. II. Probl. III.) gegeben hat. Man sieht leicht, dass man, wenn man darin, wie in (19.) $\frac{dy}{dx}$, $-\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$, $-\frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3}$ statt Q, R, S setzt, $-\frac{d^3y}{dx^3}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$ $: 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ erhält, wie wir es oben in (17.) gefunden haben.

23.

Wollte man Newton auf seinem ersten Wege folgen, aber für die, der sehr kleinen Zeit τ entsprechende Abweichung der Curve von der Tangente, den gefundenen genauen Ausdruck $\frac{g\tau^2}{2} - \frac{gr\tau^3}{u}$ setzen, so würde man, für die der Zeit t entsprechende Abweichung, $\frac{gt^2}{2} + \frac{grt^3}{6u}$ erhalten. Substituirt man für t seinen Werth in τ, $\tau - \frac{r\tau^2}{u}$, so erhält man $\frac{g\tau^2}{2} - \frac{5gr\tau^3}{6u}$ und die Differenz der beiden Abweichungen ist alsdann $\frac{2gr\tau^3}{3u}$, welches jetzt δ ist; die Werthe γ und ϱ sind, bis auf τ^3, genau, $\frac{g\tau^2}{2}$, $\frac{r\tau^2}{2}$; also ist, wenn man substituirt,

$$\frac{\alpha\delta}{4\gamma^2} = \frac{2r}{3g} \text{ und } \frac{r}{g} = \frac{3\alpha\delta}{8\gamma^2}.$$

Setzt man nun, wie Newton, $\alpha = k\sqrt{(1+Q^2)}$, $\gamma = Rk^2$ und $\delta = 2Sk^3$, so erhält man

$$\frac{r}{g} = \frac{3S\sqrt{(1+Q^2)}}{4R^2},$$

welches Resultat genau ist.

Da Newton zu seinem zweiten genauen Resultate nur durch eine, dem Verfahren der Differential-Rechnung ähnliche Methode, und dadurch, dass er zwei auf einander folgende Tangenten, oder zwei auf einander folgende Seiten der Curve nahm, statt dass in der ersten Auflösung nur eine einzige, vom Berührungs-Puncte aus, vor- und rückwärts verlängerte Tangente genommen wurde, gelangt ist, so haben wir zeigen zu müssen geglaubt, wie man, ohne sich von dem Wege der ersten Auflösung zu entfernen, blos dadurch, dass man die Rechnung durch die Methode der Reihen verbessert, ebenfalls zu einem genauen Resultate gelangen kann. In der That kann man durch diese Methode immer von der Reihe für die Ordinate einer Curve, oder allgemein für die Entwickelung einer Function, die ersten Glieder finden, welche den mechanischen oder geometrischen Bedingungen der Aufgabe gemäss sind, und das Gesetz zwischen diesen Gliedern giebt die Gleichung der Aufgabe. Hierin besteht die Methode, die man, nach Newton, die Methode der Reihen nennen kann, um sie von der Methode der Differenzen, oder der abgeleiteten Functionen, zu unterscheiden, durch welche man jene Gleichung direct, ohne den Umweg der Reihen, und ohne andere Glieder zu Hülfe zu nehmen, als die hierher gehören, findet, wie solches aus (18.) zu sehen.

24.

Uebrigens ist zu bemerken, dass die von Newton bei der zweiten Auflösung gebrauchte Construction, zu einer der ersten, oben durch $\frac{\varrho}{\gamma}=\frac{\alpha\delta}{4\gamma^2}$ bezeichneten, ähnlichen Formel führt, die, wie wir sahen, unrichtig ist, nur mit dem Unterschiede, dass die Grösse δ, statt wie in der ersten Auflösung, die Differenz derjenigen Abweichungen der Curve von der Tangente auszudrücken, welche zu gleichen, rück- und vorwärts vom Berührungs-Punct ab genommenen, und den Theilen k und $-k$ der Axe der x entsprechenden Theilen einer und der nemlichen Tangente gehören, vielmehr die Differenz der Abweichungen zweier auf einander folgenden Tangenten ausdrückt, die nach einer und derselben Seite genommen sind, und gleichen Theilen der Axe k entsprechen. Um diese Abweichungen zu finden, drückt Newton die Ordinate, welche zu der Abscisse $x+k$ gehört, durch die Reihe $P+Qk+Rk^2+Sk^3 \ldots$ aus, aber er bestimmt sie durch die Differential-Rechnung, indem er die Differenz zwischen einer mittleren Ordinate und der halben Summe der beiden anliegenden nimmt. Er betrachtet nemlich die drei Ordinaten zu den Abscissen $x-k$, x und $x+k$ und findet die Abweichung Rk^2; die Ordinaten, welche zu den Abscissen x, $x+k$ und $x+2k$ gehören, geben die Abweichung Rk^2+Sk^3, und die Differenz dieser beiden Abweichungen ist $3Sk^3$. Setzt man diesen Werth für δ, und, wie in der ersten Auflösung, in (19.), $\alpha=k\sqrt{(1+Q^2)}$, $\gamma=Rk^2$, so erhält man

$$\frac{\varrho}{\gamma} = \frac{3S\sqrt{(1+Q^2)}}{4R^2},$$

welches, wie wir oben sahen, der richtige Ausdruck ist.

Nach unseren Bezeichnungen geht y in $y + k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} \ldots$ über, wenn $x + k$ aus x wird. Der Theil der Tangente, welcher k entspricht, ist $k\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$. Dieses ist der Werth von α. Das Stück der Ordinate zwischen der Tangente und der Curve, oder die Abweichung, ist $\frac{k^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{k^3}{2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} \ldots$ Dieses ist der Werth von γ. Also ist in beiden Auflösungen:

$$\frac{\alpha}{4\gamma^2} = \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{k\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}.$$

δ ist in der ersten Auflösung die Differenz der Abweichungen, welche k und $-k$ entsprechen. Diese ist $\frac{k}{3}\frac{d^3y}{dx^3}$. In der zweiten Auflösung ist δ die Differenz der Abweichungen, welche zu x und $x + k$ gehören. Nun wird, wenn x in $x + k$ übergeht, aus $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} + k\frac{d^3y}{dx^3} \ldots$ Lässt man also k^4 weg, so ist die zweite Abweichung $\frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4k^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}$, und die Differenz der beiden Abweichungen ist $\frac{k^3}{2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$. Setzt man in $\frac{\alpha\delta}{4\gamma^2} = \frac{\delta\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{k^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$

den ersten Werth von $\delta = \frac{k^3}{3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3}$, desgleichen den zweiten $\frac{k^3}{2} \cdot \frac{d^3y}{dx^3}$, so erhält man die zwei Resultate $\frac{d^3y}{dx^3} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} : 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ und $\frac{d^3y}{dx^3} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} : 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$, wovon das erste unrichtig, das zweite aber richtig ist. (19.)

[*Newtons Irrthum entstand also daraus, dass er mit dem Unendlich-kleinen, oder mit Nullen, wie mit wirklichen Grössen rechnete, und willkürlich Grössen wegliess. Wenn nun diese Methode, selbst Newton zu einem Irrthume verleiten konnte: um wieviel grösser muss nicht die Gefahr zu irren, bei dem allgemeinen Gebrauche derselben, für alle Diejenigen sein, die weniger in der Mathematik geübt sind, als Newton!*]

Fünfter Abschnitt.

Von der Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Fläche, oder unter gewissen Bedingungen. Von der Bewegung mehrerer, unter einander verbundener Körper. Von den Bedingungs-Gleichungen zwischen den gegebenen Coordinaten dieser verschiedenen Körper und der Methode, daraus die Kräfte zu finden, die aus der Wechselwirkung entstehen. Allgemeiner Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

25.

Wir wollen die allgemeinen Formeln von (15.) wieder vornehmen und setzen, die Kraft P sey gegen einen, durch die Coordinaten a, b, c bestimmten Punct im Raume gerichtet. Nennt man die gradlinige Entfernung dieses Puncts von irgend einem Puncte einer Curve, dessen Coordinaten x, y, z sind, p, so ist

$$p = \sqrt{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)},$$

und es ist klar, dass $x-a$, $y-b$, $z-c$ die Projectionen der Linie p auf die Axen der x, y, z sind; $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ sind also die Cosinus der Winkel, welche die Linie p mit den Axen macht, das heisst, der Winkel λ, μ, ν, zwischen der Richtung der Kraft P, und den Axen. Also können die von der Kraft p herkommenden Glieder $P \cos \lambda$,

$P \cos \mu$,

$P \cos \mu$, $P \cos \nu$ in den Ausdrücken von $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $M\frac{d^2y}{dt^2}$, $M\frac{d^2z}{dt^2}$ durch $P.\frac{x-a}{p}$, $P.\frac{y-b}{p}$, $P.\frac{z-c}{p}$ bezeichnet werden. Dieses sind die Kräfte, welche aus Zerlegung der Kraft P nach den Richtungen der Coordinaten x, y, z entstehen.

Setzt man nun p einer Constante g gleich, so hat man die Gleichung einer Kugel, deren Halbmesser g ist, und deren Mittel-Punct durch die Coordinaten a, b, c bestimmt wird; die Richtung der Kraft P steht senkrecht auf der Kugelfläche. Sie ist also auch senkrecht auf jeder anderen Fläche die durch den nemlichen Punct geht und die Kugelfläche berührt.

Man bezeichne die Gleichung der Kugel

$$\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}-g=0$$

durch

$$f(x,y,z)=u=0,$$

so erhält man, wenn man die erste Ableitung nimmt,

$$\frac{x-a}{g}=\frac{du}{dx},\ \frac{y-b}{g}=\frac{du}{dy},\ \frac{z-c}{g}=\frac{du}{dz}.$$

[*Nemlich, wenn man z. B. von* $u=\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}-g=0$, *die Ableitung nach* x *nimmt, so erhält man*

$$\frac{x-a}{\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}}=\frac{du}{dx};$$

und da, vermöge der Gleichung $u=0$, $\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}=g$ *ist*, $\frac{du}{dx}=\frac{x-a}{g}$ *u. s. w.*] Da nun $p=g$ war, so ist klar, dass die

aus der Kraft P entstehenden Kräfte nach x, y, z, gleich

$$P\frac{du}{dx},\ P\frac{du}{dy},\ P\frac{du}{dz}$$

sind.

26.

Wenn eine Fläche, deren Gleichung

$$F(x, y, z) = w = 0$$

ist, die Kugelfläche berührt, so müssen sich, zufolge (40. zweiter Theil,) die drei Ableitungen der Fläche $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dy}$ und $\frac{dw}{dz}$ wie die drei Ableitungen $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ der Kugelfläche verhalten. Steht also die Richtung der Kraft P senkrecht auf der berührenden Fläche, so zerfällt solche in drei Kräfte, nach der Richtung der Coordinaten, die sich wie

$$P\frac{dw}{dx},\ P\frac{dw}{dy},\ P\frac{dw}{dz}$$

verhalten.

Abstrahirt man von der Kraft P und nimmt an, dass der Körper gezwungen ist, sich auf der berührenden Fläche zu bewegen, so ist klar, dass die Richtung der Wirkung der Fläche auf den Körper, oder vielmehr des Widerstands, den sie ihm entgegensetzt, nur auf der Fläche senkrecht stehen kann. Dieser Widerstand bringt also drei auf den Körper wirkende Kräfte hervor, die sich wie die drei ersten Ableitungen $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ der Gleichung der Fläche $w = 0$ verhalten.

Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man

ganz von der Fläche abstrahirt und die Gleichung derselben $w = o$ blos als eine durch die Aufgabe gegebene Bedingungs-Gleichung betrachtet. Daraus folgt umgekehrt, dass jede durch eine Gleichung, wie $F(x, y, z) = w = o$ ausgedrückte Bedingung der Aufgabe, als gleichgeltend mit drei Kräften, nach der Richtung der Coordinaten x, y, z, zu betrachten ist, die sich wie $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ verhalten. Man muss also dieselben mit irgend einem unbestimmten Coefficienten π multipliciren, folglich die Grössen $\pi\frac{dw}{dx}$, $\pi\frac{dw}{dy}$, $\pi\frac{dw}{dz}$ zu den Ausdrücken von $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $M\frac{d^2y}{dt^2}$, $M\frac{d^2z}{dt^2}$, in den Gleichungen von (15.) addiren. Die unbekannte Grösse π muss wieder eliminirt werden, aber die eine Gleichung, welche man dadurch weniger erhält, wird durch die Bedingungs-Gleichung $w = o$ ersetzt.

Das Verfahren ist leicht auf den Fall anzuwenden, wenn zwei, durch $F(x,y,z) = w = o$ und $\varphi(x,y,z) = v = o$ bezeichnete Bedingungs-Gleichungen gegeben sind [*oder auch mehrere*]. Sie würden so viel ausmachen, als die Kräfte

$$\pi\frac{dw}{dx} + \varrho\frac{dv}{dx},\ \pi\frac{dw}{dy} + \varrho\frac{dv}{dy},\ \pi\frac{dw}{dz} + \varrho\frac{dv}{dz}$$

nach den Richtungen von x, y, z, die also zu den Ausdrücken von $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $M\frac{d^2y}{dt^2}$, $M\frac{d^2z}{dt^2}$ (15.) addirt werden müssten: Die unbestimmten Coefficienten π und ϱ müssen hinterher wieder weggeschafft werden.

27.

Bis hierher haben wir nur einen einzelnen Körper betrachtet. Es mögen nun ferner zwei Körper *M* und *N* an den Enden eines undehnbaren Fadens befestigt sein, der über eine feste Rolle geht; x, y, z sollen die Coordinaten des Körpers *M*; ξ, η, ζ die Coordinaten des Körpers *N*; a, b, c die Coordinaten des festen Punctes sein, in welchem sich die Rolle befindet, g die Länge des Fadens, so ist

$$\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}$$
$$+\sqrt{((\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2)}-g=0,$$

welche Gleichung durch

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)=v=0$$

bezeichnet werden mag.

Bezeichnet man die Spannung des Fadens durch T, welche auf beide Körper gleich stark wirkt, und verfährt nach (25.), so ist klar, dass die Wirkung des Fadens auf den Körper in *M*, die Kräfte $T\frac{dv}{dx}$, $T\frac{dv}{dy}$, $T\frac{dv}{dz}$, nach der Richtung von x, y, z; auf *N* die Kräfte $T\frac{dv}{d\xi}$, $T\frac{dv}{d\eta}$, $T\frac{dv}{d\zeta}$ nach der Richtung von ξ, η, ζ hervorbringt.

Eben so würde es sich verhalten, wenn der Faden über zwei feste Rollen ginge, deren Lage im Raume durch die Coordinaten a, b, c für die erste, und durch α, β, γ für die zweite bestimmt würde.

Bezeichnet in diesem Falle g die Länge des Fadens, weniger den Theil zwischen den beiden Rollen, der ebenfalls gegeben ist, so erhält man, vermöge der Undehnbarkeit des Fadens,

$$\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}$$
$$+\sqrt{((\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2)}-g=0,$$

und drückt man diese Gleichung wieder durch

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)=v=0$$

aus, so erhält man wiederum $T\frac{dv}{dx}$, $T\frac{dv}{dy}$, $T\frac{dv}{dz}$ für die Kräfte, welche den Körper M nach der Richtung der Coordinaten x, y, z; $T\frac{dv}{d\xi}$, $T\frac{dv}{d\eta}$, $T\frac{dv}{d\zeta}$ für die Kräfte, welche den Körper N nach der Richtung der Coordinaten ξ, η, ζ treiben.

Nimmt man endlich an, dass der Faden, an welchen der Körper M befestigt ist, nachdem er über die erste feste Rolle gegangen, zu dem Körper M zurückkomme, von da [*also etwa über eine zweite bewegliche, unmittelbar mit dem Körper verbundene Rolle*] nach der ersten festen Rolle zurückgehe, von da wieder nach dem Körper, wieder nach der Rolle u. s. w., so dass m Faden zwischen dem Körper und der festen Rolle vorhanden sind; dass ferner der Faden, nachdem er die Rolle verlassen hat, nach der zweiten festen Rolle gehe, von da nach dem Körper N [*also etwa wieder über eine andere, mit dem Körper N unmittelbar verbundene bewegliche Rolle*] und wieder zwischen dem Körper N und der zweiten festen Rolle, mehrere Male hin und her, ehe er zuletzt mit dem Körper N fest verbunden ist, so dass sich n Faden zwischen dem Körper N und der zweiten festen Rolle befinden; so wird der Körper M, weil die Spannung des Fadens T in seiner ganzen Ausdehnung die nemliche ist, und m Faden ihn gegen die erste Rolle hin ziehen, von einer Kraft

mT, der Körper N, gegen die zweite Rolle, von einer Kraft nT getrieben. Nun ist klar, dass in diesem Falle die Gleichung, welche die Undehnbarkeit des Fadens bezeichnet,

$$m\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}$$
$$+n\sqrt{((\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2)}-g=0$$

ist, wenn immer g die Länge des ganzen Fadens, nach Abzug desjenigen Theils bezeichnet, der sich zwischen den beiden festen Rollen befindet. Also erhält man, wenn man diese Gleichung durch

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = v = 0$$

bezeichnet, für die Kräfte, welche den Körper M nach x, y, z und den Körper N nach ξ, η, ζ ziehen, die nemlichen Ausdrücke $T\frac{dv}{dx}$, $T\frac{dv}{dy}$, $T\frac{dv}{dz}$, $T\frac{dv}{d\xi}$, $T\frac{dv}{d\eta}$, $T\frac{dv}{d\zeta}$, wie oben.

Setzt man die Kräfte, welche die Körper M und N nach den beiden festen Rollen hinziehen, P und Q, so ist

$$P = mT, \quad Q = nT.$$

Da m und n nur ganze Zahlen sein können, so muss man, wenn P und Q commensurabel sind, für T ihr gemeinschaftliches Maass annehmen. Man kann aber ausserdem P und Q immer durch mT und nT ausdrücken, denn man darf nur, wenn P und Q incommensurabel sind, die Zahlen m und n sehr gross und die Grösse T sehr klein annehmen. Die Kräfte, welche die Körper M und N nach der Richtung der Coordinaten x, y, z, ξ, η, ζ ziehen, verhalten sich nur wie die ersten Ableitungen der Bedingungs-Gleichungen, nach den Coordinaten. [*Lagrange gestattet*

auch für die Incommensurabilität, wie man sieht, die einfachsten Ansichten.]

28.

Wenn nun statt der Bedingungs-Gleichung

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = v = 0,$$

die von der Undehnbarkeit des Fadens abhängt, irgend eine andere Gleichung zwischen den nemlichen Coordinaten $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ der beiden Körper

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = w = 0$$

gegeben ist, so kann man, wenn man die Constanten in der ersten Gleichung $v = 0$ als willkürlich betrachtet, nicht allein die beiden Gleichungen, sondern auch alle ihre ersten Ableitungen für gegebene Werthe der veränderlichen Grössen $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, in Uebereinstimmung bringen, so dass die beiden Gleichungen einander gleichsam berühren, wie bei der Theorie der Berührung, im zweiten Theil; und von welcher Art auch die, durch die Gleichung $w = 0$ ausgedrückte Verbindung der beiden Körper sein mag, immer wird solche als gleichgeltend mit derjenigen, vermittelst eines Fadens über zwei Rollen betrachtet werden können.

Man könnte glauben, dass [*schon*] die Bedingungs-Gleichung

$$\sqrt{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)}$$
$$+ \sqrt{((\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma)^2)} - g = 0$$

für einen einfachen Faden über zwei Rollen, weil sie sieben willkürliche Constanten [$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, g$] enthält, immer eine Berührung erster Ordnung mit einer beliebigen Gleichung haben könne, indem diese

Berührung auch nur sieben Bedingungen erfordert [*nemlich drei abgeleitete Gleichungen nach* x, y *und* z, *drei nach* ξ, η *und* ζ, *und die Stammgleichung selbst*]. Aber, bezeichnet man diese Gleichung durch $f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = v = 0$ und nimmt ihre ersten Ableitungen, so ist leicht zu sehen, dass

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = 1 \text{ und}$$

$$\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dv}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dv}{d\zeta}\right)^2 = 1 \text{ ist.}$$

[*Denn, wenn* $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = M^2$ *und* $(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma)^2 = N^2$, *so dass* $M + N - g = v = 0$, *so ist* $\frac{dv}{dx} = \frac{x-a}{M}$, $\frac{dv}{dy} = \frac{y-b}{M}$, $\frac{dv}{dz} = \frac{y-c}{M}$, *also* $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2$ $= \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{M^2} = 1$. *Eben so ist* $\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dv}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dv}{d\zeta}\right)^2 = 1$.] Den Bedingungen der Berührung

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{dw}{dy}, \quad \frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dz}$$

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{dw}{d\xi}, \quad \frac{dv}{d\eta} = \frac{dw}{d\eta}, \quad \frac{dv}{d\zeta} = \frac{dw}{d\zeta}$$

lässt sich also [*wegen der obigen Abhängigkeit der Ableitungen unter einander*] nicht mehr vollständig und allgemein genugthun. Diese Beschränkung verschwindet indessen, wenn man die Gleichung

$$m\sqrt{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)}$$
$$+ n\sqrt{((\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma)^2)} - g = 0$$

für die Bedingung des vielfachen Fadens zu Hülfe

nimmt, vermöge der unbestimmten Coefficienten M und N, und man kann also allgemein sagen, dass die gegebene Bedingungs-Gleichung $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = w = 0$ für die Körper die nemlichen Kräfte voraussetzt, als der Faden.

Daraus folgt, dass in einem Systeme zweier Körper, deren Verbindung mit einander durch die Gleichung $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = w = 0$ bezeichnet wird, die wechselseitige Wirkung der Körper auf einander, in dem einen Körper die Kräfte $\pi\frac{dw}{dx}$, $\pi\frac{dw}{dy}$ und $\pi\frac{dw}{dz}$, nach der Richtung der drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z; in dem anderen Körper die Kräfte $\pi\frac{dw}{d\xi}$, $\pi\frac{dw}{d\eta}$, $\pi\frac{dw}{d\zeta}$, nach der Richtung der rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ hervorbringt, wo π ein unbestimmter Coefficient ist.

29.

Wäre das System aus drei Körpern zusammengesetzt, deren rechtwinklige Coordinaten $x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ sind, so würde man auf eine ganz ähnliche Weise finden, dass jede, von der Verbindung der Körper abhängende Gleichung zwischen den Coordinaten, wie

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = w = 0$$

für den ersten Körper die Kräfte $\pi\frac{dw}{dx}$, $\pi\frac{dw}{dy}$, $\pi\frac{dw}{dz}$, nach x, y, z; für den zweiten Körper die Kräfte $\pi\frac{dw}{d\xi}$, $\pi\frac{dw}{d\eta}$, $\pi\frac{dw}{d\zeta}$, nach ξ, η, ζ; für den

dritten Körper die Kräfte $\pi \frac{dw}{d\mathfrak{x}}$, $\pi \frac{dw}{d\mathfrak{y}}$, $\pi \frac{dw}{d\mathfrak{z}}$, nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ hervorbringt u. s. w., wenn das System noch mehrere Körper enthält. Denn, wie gross auch die Zahl der Körper, und welche auch ihre Verbindung sein mag, immer kann sie nur auf jeden Körper eine bestimmte Kraft nach einer gewissen Richtung hervorbringen, und alle diese Kräfte können auch durch die Spannung eines und desselben Fadens entstehen, der zwischen den Körpern und festen Rollen wiederholt hin und her geht.

Fände, endlich, zwischen den nemlichen Coordinaten eine zweite Bedingungs-Gleichung, wie

$$\varphi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = s = 0$$

statt, so entständen daraus die Kräfte $\varrho \cdot \frac{ds}{dx}$, $\varrho \cdot \frac{ds}{dy}$, $\varrho \cdot \frac{ds}{dz}$ für den ersten, $\varrho \cdot \frac{ds}{d\xi}$, $\varrho \cdot \frac{ds}{d\eta}$, $\varrho \cdot \frac{ds}{d\zeta}$ für den zweiten und $\varrho \cdot \frac{ds}{d\mathfrak{x}}$, $\varrho \cdot \frac{ds}{d\mathfrak{y}}$, $\varrho \cdot \frac{ds}{d\mathfrak{z}}$ für den dritten Körper nach der Richtung der verschiedenen Coordinaten, in welchen Ausdrücken die Coefficienten π und ϱ unbestimmt sind; und so weiter, für eine grössere Zahl von Bedingungs-Gleichungen.

30.

Hieraus folgt allgemein, dass sich die Kräfte, welche aus der wechselseitigen Wirkung der Körper eines gegebenen Systems entstehen können, unmittelbar aus den Bedingungs-Gleichungen zwischen den Coordinaten der verschiedenen Körper in dem Systeme finden lassen, wenn man die ersten Ableitungen der

Functionen nimmt, die, zufolge jener Bedingungs-Gleichungen, Null sind. Die ersten Ableitungen einer und der nemlichen Function, nach den verschiedenen Coordinaten genommen, verhalten sich immer wie die in der Richtung der Coordinaten wirkenden Kräfte, die von der durch die Function [*weil sie gleich Null ist*] ausgedrückten Bedingung abhängen.

Ich habe in der analytischen Mechanik das nemliche Resultat gefunden, als ich von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausging. Dieses Princip ist in der That in dem obigen Resultate enthalten. Denn es ist klar, dass, wenn mehrere auf ein System von Körpern wirkende Kräfte, einander das Gleichgewicht halten, diese Kräfte nothwendig denen, welche aus der gegenseitigen Wirkung der Körper auf einander entstehen, gleich und denselben graden entgegengesetzt sein müssen.

Die auf einen der Körper des Systems, nach der verlängerten Richtung der Coordinaten x, y, z wirkenden Kräfte sollen $\overset{1}{X}$, $\overset{1}{Y}$, $\overset{1}{Z}$, die auf einen anderen Körper, nach den Richtungen der verlängerten Coordinaten ξ, η, ζ wirkenden Kräfte $\overset{2}{X}$, $\overset{2}{Y}$, $\overset{2}{Z}$, auf einen dritten Körper $\overset{3}{X}$, $\overset{3}{Y}$, $\overset{3}{Z}$ sein, so ist, dem Obigen zufolge,

$$\overset{1}{X}=\pi\frac{dw}{dx}+\varrho\frac{ds}{dx},\ \overset{1}{Y}=\pi\frac{dw}{dy}+\varrho\frac{ds}{dy},\ \overset{1}{Z}=\pi\frac{dw}{dz}+\varrho\frac{ds}{dz}$$

$$\overset{2}{X}=\pi\frac{dw}{d\xi}+\varrho\frac{ds}{d\xi},\ \overset{2}{Y}=\pi\frac{dw}{d\eta}+\varrho\frac{ds}{d\eta},\ \overset{2}{Z}=\pi\frac{dw}{d\zeta}+\varrho\frac{ds}{d\zeta}$$

$$\overset{3}{X}=\pi\frac{dw}{d\mathfrak{x}}+\varrho\frac{ds}{d\mathfrak{x}},\ \overset{3}{Y}=\pi\frac{dw}{d\mathfrak{y}}+\varrho\frac{ds}{d\mathfrak{y}},\ \overset{3}{Z}=\pi\frac{dw}{d\mathfrak{z}}+\varrho\frac{ds}{d\mathfrak{z}}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\overset{1}{X}\frac{dx}{dt}+\overset{1}{Y}\frac{dy}{dt}+\overset{1}{Z}\frac{dz}{dt}+\overset{2}{X}\frac{d\xi}{dt}+\overset{2}{Y}\frac{d\eta}{dt}+\overset{2}{Z}\frac{d\zeta}{dt}$$
$$+\overset{3}{X}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}+\overset{3}{Y}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}+\overset{3}{Z}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$$
$$=\pi\left(\frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dw}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dw}{dz}\frac{dz}{dt}+\frac{dw}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dw}{d\eta}\frac{d\eta}{dt}\right.$$
$$\left.+\frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt}+\frac{dw}{d\mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}+\frac{dw}{d\mathfrak{y}}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}+\frac{dw}{d\mathfrak{z}}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)$$
$$+\varrho\left(\frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{ds}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{ds}{dz}\frac{dz}{dt}+\frac{ds}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}+\frac{ds}{d\eta}\frac{d\eta}{dt}\right.$$
$$\left.+\frac{ds}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt}+\frac{ds}{d\mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}+\frac{ds}{d\mathfrak{y}}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}+\frac{ds}{d\mathfrak{z}}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right).$$

Das zweite Glied dieser Gleichung ist offenbar gleich Null, vermöge der Bedingungs-Gleichungen [$w=0$ *und* $s=0$], weil die Coefficienten der unbestimmten Grössen π und ϱ die vollständigen ersten Ableitungen von w und s sind. Daher ist

$$\left.\begin{aligned}&\overset{1}{X}\frac{dx}{dt}+\overset{1}{Y}\frac{dy}{dt}+\overset{1}{Z}\frac{dz}{dt}\\+&\overset{2}{X}\frac{d\xi}{dt}+\overset{2}{Y}\frac{d\eta}{dt}+\overset{2}{Z}\frac{d\zeta}{dt}\\+&\overset{3}{X}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}+\overset{3}{Y}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}+\overset{3}{Z}\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\end{aligned}\right\}=0$$

die allgemeine Gleichung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht der Kräfte $\overset{1}{X}, \overset{1}{Y}, \overset{1}{Z}, \overset{2}{X}, \overset{2}{Y}, \overset{2}{Z}, \overset{3}{X}, \overset{3}{Y}, \overset{3}{Z}$, in welcher Gleichung die ersten Ableitungen $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{d\xi}{dt}$ *etc.* die virtuellen Geschwindigkeiten der Puncte, auf welche die Kräfte wirken, nach den Richtungen der Kräfte

ausdrücken. Man sehe den ersten Theil der analytischen Mechanik.

Uebrigens ist nicht zu verwundern, dass hier das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten eine unmittelbare Folge der Ausdrücke ist, welche die Kräfte, nach Maassgabe der Bedingungs - Gleichungen ausdrücken; denn die Betrachtung eines Fadens, welcher durch seine gleichförmige Spannung auf alle Körper wirkt und darin gegebene Kräfte hervorbringt, ist zum directen und allgemeinen Beweise des Princips hinreichend; wie ich solches in der zweiten Ausgabe der analytischen Mechanik gezeigt habe. [*Durch das gegenwärtige Verfahren lässt sich auch noch die Schwierigkeit hebeu, die in dem, in der analytischen Mechanik durch die Flaschenzüge gegebenen Beweise des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, daraus entsteht, dass dort von unendlich-kleinen Räumen, statt von den Geschwindigkeiten, die Rede ist.*]

Sechster Abschnitt.

Von dem Gesetze der Bewegung des Schwerpuncts. Von dem Gesetze der Flächen bei der drehenden Bewegung um eine feste Axe, oder um einen einzelnen festen Punct, oder um den Schwerpunct, in freien Systemen.

31.

Wir haben gezeigt, wie die Kräfte auszudrücken sind, die aus der wechselseitigen Wirkung der Körper eines Systems entstehen können, und welche zu den übrigen Kräften in den Gleichungen (15.) hinzukommen, wenn man die vollständigen Gleichungen der Bewegung des Systems verlangt. Obgleich die Bedingungen $w = 0$ und $s = 0$, von welchen diese Kräfte herrühren, von den besonderen Umständen jeder Aufgabe abhängen, so giebt es doch allgemeine Fälle, welche eine nähere Untersuchung verdienen, weil sie merkwürdige Resultate geben.

Der erste dieser Fälle ist der, wenn die Bedingungen des Systems vom Anfangs-Puncte der Abscissen x, ξ.... unabhängig sind, und die Functionen w und s nur die Differenzen $\xi - x$, $\mathfrak{x} - x$ *etc.* der Abscissen enthalten. Alsdann verschwindet offenbar, wenn man jede Grösse x, ξ.... einzeln um k zunehmen lässt, die Grösse k aus den Functionen von selbst. Setzt man nun in w, $x + k$, $\xi + k$.... statt x und ξ...., so erhält man, wenn man entwickelt,

$$w + k\left(\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{d\xi} \dots\right).$$

Also erhält man nothwendig die erste Ableitungs-Gleichung

$$\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{d\xi} \ldots\ldots = 0.$$

Man findet auf die nemliche Weise

$$\frac{ds}{dx} + \frac{ds}{d\xi} \ldots\ldots = 0$$

u. s. w.

Nun sind die Gleichungen der Bewegung, wenn das System keinen anderen Kräften, als denen, die aus der wechseltigen Wirkung der Körper entstehen, unterworfen ist, in Beziehung auf die Coordinaten x, $\xi \ldots$, zufolge (15.) von der Form

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = \pi\frac{dw}{dx} + \varrho\frac{ds}{dx} \ldots\ldots$$

$$N\frac{d^2\xi}{dt^2} = \pi\frac{dw}{d\xi} + \varrho\frac{ds}{d\xi} \ldots\ldots$$

Rechnet man diese Gleichungen zusammen, so erhält man [*weil* $\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{d\xi} \ldots = 0$, $\frac{ds}{dx} + \frac{ds}{d\xi} \ldots = 0$ *und also auch* $\pi\left(\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{d\xi} \ldots\right) = 0$, $\varrho\left(\frac{ds}{dx} + \frac{ds}{d\xi}\right) \ldots = 0$ *ist*,] folgende, von den Bedingungen des Systems unabhängige Gleichung:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + N\frac{d^2\xi}{dt^2} \ldots\ldots = 0.$$

Diese Gleichung hat die Stammgleichung

$$M\frac{dx}{dt} + N\frac{d\xi}{dt} = a$$

und diese von Neuem die Stammgleichung

$$Mx + N\xi = at + b,$$

wo a und b willkürliche Constanten sind.

So erhält man in diesem Falle, ohne Weiteres, eine Gleichung zwischen den verschiedenen Abscissen x, ξ....

Es ist leicht zu sehen, dass der Fall derjenige ist, wenn sich das System völlig frei, in der Richtung der Abscissen-Axe bewegen kann, welche auch die Wirkung der Körper, einer auf den anderen, sein mag. Denn alsdann können die Bedingungen des Systems, in Beziehung auf diese Axe, nur von der respectiven Lage der Körper, und auf keine Weise von ihrer Lage gegen den Anfangs-Punct der Abscissen abhängen; folglich können die Gleichungen, welche die Bedingungen ausdrücken, nur die Differenzen $x - \xi$ *etc.* der Abscissen enthalten. Und, wenn die Körper einander anziehen und abstossen, so haben auch die Functionen $\sqrt{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)}$, welche die Entfernungen ausdrücken, die nemlichen Eigenschaften, weil die, diesen Kräften entsprechenden Functionen w, s *etc.*, nur von jenen Entfernungen abhängen. [*Denn die Gleichungen* $w = 0$, $s = 0$ *wurden als die Gleichungen von Flächen betrachtet, die mit denen, durch* $\sqrt{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)}$ *ausgedrückten Flächen, in derjenigen Berührung erster Ordnung stehen, welche nöthig ist, damit die, durch die beiden Gleichungen ausgedrückten Kräfte, die nemlichen sind.*]

Folglich findet die obige Gleichung zwischen den Abscissen x, ξ *etc.* der verschiedenen Körper immer Statt, sobald sich nur das System in der Richtung der Axe der x frei bewegen kann, wie auch die Körper, sey es durch Widerstand, oder gegenseitige Anziehung, oder Zurückstossung, wirken mögen.

Nimmt

Nimmt man für das System einen Punct an, dessen Abscisse X ist, so dass

$$X = \frac{Mx + N\xi \ldots.}{M + N \ldots.},$$

[*oder* $(M + N \ldots.)\, X = Mx + N\xi \ldots.$,] so ist

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0,$$

$\left[\textit{weil } \frac{d^2 (Mx + N\xi \ldots.)}{dt^2} = 0 \textit{ war,}\right]$ woraus folgt

$$\frac{dX}{dt} = a \text{ und}$$

$$X = at,$$

wenn man annimmt, dass im Anfange der Zeit, $X = 0$ ist. Die Bewegung dieses Puncts, nach der Richtung der Axe der x, ist also gleichförmig und hat die Geschwindigkeit a.

32.

Nimmt man an, dass in dem nemlichen Systeme die Körper M, $N \ldots.$ durch beliebige Kräfte P, $Q \ldots.$ nach der Richtung der Axe der x getrieben werden, und die x, $\xi \ldots.$ zu vergrössern streben, so kommen, in diesem Falle, die Kräfte P, $Q \ldots.$ zu den Werthen von $M\frac{d^2 x}{dt^2}$, $N\frac{d^2 \xi}{dt^2} \ldots.$ hinzu, welches die Gleichungen

$$M\frac{d^2 x}{dt^2} = P + \pi\frac{dw}{dx} + \varrho\frac{ds}{dx} \ldots.$$

$$N\frac{d^2 \xi}{dt^2} = Q + \pi\frac{dw}{d\xi} + \varrho\frac{ds}{d\xi} \ldots.$$

etc.

giebt, deren Summe

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+N\frac{d^2\xi}{dt^2}\ldots\ldots=P+Q\ldots\ldots$$

ist $\left[weil\ \frac{dw}{dx}+\frac{dw}{d\xi}\ldots\ldots=0,\ \frac{ds}{dx}+\frac{ds}{d\xi}\ldots\ldots=0\ war\right]$.

Setzt man für $Mx+N\xi\ldots\ldots$ die Grösse $(M+N\ldots\ldots)X$, so erhält man

$$(M+N\ldots\ldots)\frac{d^2X}{dt^2}=P+Q\ldots\ldots$$

welche Gleichung die gradlinige Bewegung eines, von einer Kraft $P+Q\ldots\ldots$ getriebenen Körpers ausdrückt, dessen Masse gleich $M+N\ldots\ldots$ ist.

Daraus folgt, dass sich der, der Abscisse X entsprechende, Punct des Systems, in der Richtung der Axe der x, eben so bewegt, als wenn alle Körper des Systems in ihm vereinigt, und alle Kräfte, welche auf die Körper in der Richtung der nemlichen Axe wirken, auf ihn allein angebracht wären.

33.

Wenn das System nach der Richtung der Axen der x und y zugleich frei wäre, so würden offenbar die nemlichen Resultate für beide Axen Statt finden, und, wenn das System nach allen Richtungen völlig frei wäre, so fänden die Resultate für alle drei Axen Statt, woraus folgt, dass sich das System, wenn man einen Punct, dessen Coordinaten X, Y, Z sind, so annimmt, dass

$$X=\frac{Mx+N\xi\ldots\ldots}{M+N\ldots\ldots}$$

$$Y=\frac{My+N\eta\ldots\ldots}{M+N\ldots\ldots}$$

$$Z=\frac{Mz+N\zeta\ldots\ldots}{M+N\ldots\ldots}$$

ist, und auf das System weiter keine Kraft von aussen wirkt, gleichförmig in grader Linie bewegen wird. Und, treiben beliebige Kräfte die verschiedenen Puncte des Systems, so wird sich der nemliche Punct eben so bewegen, als wenn alle Körper in ihm vereinigt, und darauf alle Kräfte, jede nach der ihr eigenthümlichen Richtung, angebracht wären.

Dieser Punct ist in der Mechanik unter dem Namen Schwerpunct bekannt, und der so eben bewiesene Satz wird gewöhnlich, wie folgt, ausgedrückt: Der Zustand der Bewegung oder Ruhe des Schwerpuncts mehrerer Körper ändert sich durch die gegenseitige Wirkung der Körper auf einander nicht, so lange das System völlig frei ist. Hierin besteht das Gesetz der Erhaltung der Bewegung des Schwerpuncts.

Es ist zu bemerken, dass dieses Gesetz auch noch dann Statt findet, wenn durch das Zusammentreffen und die gegenseitige Wirkung der Körper plötzliche Veränderungen in ihren Bewegungen entstehen; denn man kann dergleichen Veränderungen als die Wirkungen von Federn zwischen den Körpern, die sich stossen, betrachten, deren Dauer fast augenblicklich ist. Auch die Veränderungen beim Stoss harter Körper kann man auf die nemliche Weise betrachten. Und aus diesem Grunde ändert sich die Bewegung des Schwerpuncts in dergleichen Fällen nicht.

34.

Gewöhnlich bezieht man den Schwerpunct mehrerer Körper auf drei feste Axen, vermittelst der oben gefundenen Coordinaten X, Y, Z. Wollte man

sie auf bestimmte Puncte beziehen, so wäre, wenn a, b, c die Coordinaten eines solcher Puncte sind, und g die Entfernung des Schwerpuncts von dem bestimmten Puncte bedeutet,

$$g^2 = (X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2$$
$$= X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aX - 2bY - 2cZ + a^2 + b^2 + c^2.$$

Quadrirt man die Grösse $Mx + N\xi \ldots$, so lässt sich das Quadrat, wie leicht zu sehen, auf die Form

$$(M + N \ldots)(Mx^2 + N\xi^2 \ldots) - MN(x-\xi)^2 \ldots$$

bringen.

Man erhält also $\left[weil\ X = \frac{Mx + N\xi \ldots}{M + N \ldots}\ war\ (33.)\right]$

$$X^2 = \frac{Mx^2 + N\xi^2 \ldots}{M + N \ldots} - \frac{MN(x-\xi)^2 \ldots}{(M+N \ldots)^2},$$

und hieraus

$$X^2 - 2aX + a^2 = \frac{M(x-a)^2 + N(\xi-a)^2 \ldots}{M + N \ldots} - \frac{MN(x-\xi)^2 \ldots}{(M+N \ldots)^2}.$$

Eben so

$$Y^2 - 2bY + b^2 = \frac{M(y-b)^2 + N(\eta-b)^2 \ldots}{M + N \ldots} - \frac{MN(y-\eta)^2 \ldots}{(M+N \ldots)^2}$$

und

$$Z - 2cZ + c^2 = \frac{M(z-c)^2 + N(\zeta-c)^2 \ldots}{M + N \ldots} - \frac{MN(z-\zeta)^2 \ldots}{(M+N \ldots)^2}$$

Substituirt man Dieses in den obigen Ausdruck für g^2, und bezeichnet, der Kürze wegen, die Grösse welche man erhält, wenn man die Summe der Producte der Massen M, $N \ldots$ in die Quadrate ihrer Abstände vom gegebenen Puncte durch die Summe der Massen dividirt, $\left[also\ die\ Grösse\right.$

$$\left.\frac{M((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2) + N((\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2) \ldots}{M + N \ldots}\right]$$

durch A, desgleichen die Grösse, welche man erhält,

wenn man die Summe der Producte der Massen, zu zwei und zwei in einander und in das Quadrat ihrer Abstände von einander durch das Quadrat der Summe der Massen dividirt, $\left[\text{also die Grösse } \frac{MN((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)\ldots}{(M+N\ldots)^2}\right]$ durch B, so ist $g^2 = A - B$, und folglich

$$g = \sqrt{(A-B)}.$$

Da nun die Grösse B nur von der respectiven Lage der Körper gegen einander allein abhängt, so erhält man, wenn man die Werthe von A, in Beziehung auf drei verschiedene, willkürlich, innerhalb oder ausserhalb des Systems angenommene Puncte bestimmt, die Entfernung des Schwerpuncts von jenen drei Puncten, und folglich dessen absolute Lage. Befänden sich die Körper alle in einer und derselben Ebene, so wären nur zwei Puncte, und wenn die Körper alle in einer und derselben graden Linie lägen, nur ein Punct nöthig. Nimmt man die drei gegebenen Puncte in den Körpern des Systems selbst an, so bestimmt sich die Lage des Schwerpuncts durch die Massen und ihre Entfernungen von einander allein. Da diese Art den Schwerpunct zu finden wenig bekannt ist, so habe ich geglaubt, selbige, wegen des Nutzens, den sie in verschiedenen Fällen haben kann, mittheilen zu müssen.

35.

Der zweite Fall ist der, wenn die Bedingungen des Systems von der Lage der Axen der x und y, in der Ebene der x, y unabhängig sind, auf die Weise,

dass, wenn man diese Axen sich um die Axe der z, um einen beliebigen Winkel k drehen lässt, wodurch die Abscissen x, ξ.... in $x \cos k - y \sin k$, $\xi \cos k - \eta \sin k$.... und die Ordinaten y, η.... in $y \cos k + x \sin k$, $\eta \cos k + \xi \sin k$.... übergehen, durch diese Veränderung die Grössen w, s *etc.* nicht leiden, was auch k sein mag. [*Es sey Fig.* 13. *die Ebene des Papiers die Ebene der* x, y, AB *die Axe der* x, AC *die Axe der* y, $AP = x$, $PM = y$, $PAE = k$. *Ferner sollen* AQ, QM *die neuen, ebenfalls rechtwinkligen Coordinaten sein, so ist, weil* $DMP = QAP = k$,

$$AQ = AE - DP = x \cos k - y \sin k \text{ und}$$
$$QM = MD + PE = y \cos k + x \sin k.]$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Eigenschaft, allgemein, jeder Function der Grössen $x^2 + y^2$, $\xi^2 + \eta^2$, $x\xi + y\eta$, $x\eta + y\xi$.... zukommt. [*Denn setzt man in diese Grössen, der Reihe nach,* $x \cos k - y \sin k$ *statt* x, $y \cos k + x \sin k$ *statt* y *u. s. w., so erhält man*

$$x^2 \cos k^2 - 2xy \sin k \cos k + y^2 \sin k^2$$
$$+ y^2 \cos k^2 + 2xy \sin k \cos k + x^2 \sin k^2 = x^2 + y^2$$
$$x \cos k \xi \cos k - x \cos k \eta \sin k - y \sin k \xi \cos k + \eta \sin k y \sin k$$
$$+ y \cos k \eta \cos k + y \cos k \xi \sin k + x \sin k \eta \cos k + x \sin k \xi \sin k$$
$$= x\xi + y\eta$$

u. s. w. welches die vorigen Grössen unverändert wieder sind.] Setzt man also in diesem Falle

$$a = x(\cos k - 1) - y \sin k,\quad b = y(\cos k - 1) + x \sin k$$
$$\alpha = \xi(\cos k - 1) - \eta \sin k,\quad \beta = \eta(\cos k - 1) + \xi \sin k$$

etc., so muss, wenn man in jene Grössen zugleich $x + a$, $y + b$, $\xi + \alpha$, $\eta + \beta$.... statt x, y, ξ, η....

setzt und sie nach Potenzen von k entwickelt, die Summe der Glieder, welche die nemlichen Potenzen von k enthalten, einzeln, Null sein. [*Denn, wenn man z. B.* $a = x(\cos k - 1) - y \sin k$ *setzt, so ist eigentlich* $x + a = x \cos k - y \sin k$ *gesetzt worden. Nun ist* $x \cos k - y \sin k$ *derjenige Werth von* x*, der, wie oben gezeigt, den Werth von Grössen, wie* $x^2 + y^2$, $x\xi + y\eta$ *etc. nicht ändert; also ändert sich dieser Werth auch nicht, wenn man* $x + a$ *statt* x *setzt, mithin auch nicht durch das hinzukommende k; folglich ist k von den übrigen Grössen unabhängig, und also sind die Glieder. welche gleiche Potenzen von k enthalten, einzeln, Null.*] Nun aber geht durch diese Substitution die Grösse w, wenn man sie nach Potenzen von a, b, α, β entwickelt, in

$$w + a\frac{dw}{dx} + b\frac{dw}{dy} + \alpha\frac{dw}{d\xi} + \beta\frac{dw}{d\eta} + \frac{a^2}{2}\frac{d^2w}{dx^2} \ldots$$

über. Ferner ist [*wie bekannt*]

$$\sin k = k - \frac{k^3}{2.3} \ldots$$

$$\cos k = 1 - \frac{k^2}{2} \ldots$$

also sind die Glieder mit k, in dem vorhergehenden Ausdrucke [*weil z. B. in* $a = x(\cos k - 1) - y \sin k$, $a = x\left(1 - \frac{k^2}{2} \ldots - 1\right)$, $y\left(k - \frac{k^3}{2.3} \ldots\right) =$ $x\left(-\frac{k^2}{2} \ldots\right) - y\left(k - \frac{k^3}{2.3} \ldots\right)$ *ist, wovon nur* $-yk$, *als das einzige Glied mit k, in Betracht kommt, und so ähnlicherweise bei den übrigen,*

so dass man $-yk$ *statt* a, xk *statt* b, $-\eta k$ *statt* α *u. s. w. setzen kann*]

$$k\left(-y\frac{dw}{dx}+k\frac{dw}{dy}-\eta\frac{dw}{d\xi}+\xi\frac{dw}{d\eta}\ldots\right).$$

Mithin hat man [*weil die Glieder mit einerlei Potenzen von k, einzeln, Null sind*] für die Grösse w, die Bedingungs-Gleichung

$$x\frac{dw}{dy}-y\frac{dw}{dx}+\xi\frac{dw}{d\eta}-\eta\frac{dw}{d\xi}\ldots=0.$$

Eben so findet man für die Grösse s,

$$x\frac{ds}{dy}-y\frac{ds}{dx}+\xi\frac{ds}{d\eta}-\eta\frac{ds}{d\xi}\ldots=0$$

u. s. w.

36.

Nun sind, wenn die Körper keine andere, als ihre wechseitige Wirkung erfahren, die auf die Coordinaten x, y, ξ, η *etc.* sich beziehenden Gleichungen (26. und 30.) von der Form

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=\pi\frac{dw}{dx}+\varrho\frac{ds}{dx}\ldots$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2}=\pi\frac{dw}{dy}+\varrho\frac{ds}{dy}\ldots$$

$$N\frac{d^2\xi}{dt^2}=\pi\frac{dw}{d\xi}+\varrho\frac{ds}{d\xi}\ldots$$

$$N\frac{d^2\eta}{dt^2}=\pi\frac{dw}{d\eta}+\varrho\frac{ds}{d\eta}\ldots$$

Zieht man daher die zweite und die vierte dieser Gleichungen zusammen, nachdem die zweite mit x, die vierte mit ξ multiplicirt worden, u. s. w., hiervon aber die erste und die dritte ab, nachdem die erste mit y, die dritte mit η multiplicirt worden; so erhält

man $\left[Mx\frac{d^2y}{dt^2} + N\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - My\frac{d^2x}{dt^2} - N\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right.$

$$= \pi x\frac{dw}{dy} + \varrho x\frac{ds}{dy} \ldots + \pi\xi\frac{dw}{d\eta} + \varrho\xi\frac{ds}{d\eta} \ldots$$

$$- \pi y\frac{dw}{dx} - \varrho y\frac{ds}{dx} \ldots - \pi\eta\frac{dw}{d\xi} - \varrho\eta\frac{ds}{d\xi} \ldots$$

$$= \pi\left(x\frac{dw}{dy} - y\frac{dw}{dx} + \xi\frac{dw}{d\eta} - \eta\frac{dw}{d\xi} \ldots\right)$$

$$+ \varrho\left(x\frac{ds}{dy} - y\frac{ds}{dx} + \xi\frac{ds}{d\eta} - \eta\frac{ds}{d\xi} \ldots\right),$$

also,] vermöge der, im vorigen Paragraph gefundenen Bedingungs-Gleichungen $\left[x\frac{dw}{dy} - y\frac{dw}{dx} + \xi\frac{dw}{d\eta} - \eta\frac{dw}{d\xi} \ldots = 0\right.$ *und* $x\frac{ds}{dx} - y\frac{ds}{d\eta} + \xi\frac{ds}{d\xi} - \eta\frac{ds}{d\xi} \ldots = 0,\Big]$

$$M\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) + N\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right) \ldots = 0$$

welche Gleichung, wie man sieht, von den Bedingungen des Systems ebenfalls unabhängig ist.

Nimmt man davon die Stammgleichung, so erhält man $\Big[$, *weil z. B. die Ableitung von* $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$ *gleich* $\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt} - y\frac{d^2x}{dt^2} = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}$ *ist,*$\Big]$

$$M\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + N\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) \ldots = C,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Man hat also hier eine Ableitungs-Gleichung erster Ordnung

zwischen den Coordinaten x, y, ξ, η.... der verschiedenen Körper.

Nun ist $x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}-2y\frac{dx}{dt}$,

und $x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}$ ist die erste Ableitung von xy, das heisst, von dem zwiefachen Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks [APM *Fig.* 14.], dessen Grundlinie und Höhe x und y sind; hingegen $y\frac{dx}{dt}$ ist die erste Ableitung der Fläche [BPM] unter den Coordinaten x, y einer Curve. Also ist $\frac{x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}}{2}$ die erste Ableitung der Differenz des Dreiecks und der Curven-Fläche, und es ist leicht zu sehen, dass diese Differenz allgemein dem Raume [AMB] gleich ist, welcher zwischen der Curve, deren Coordinaten x und y sind, und einer graden Linie [AM], vom Anfangs-Puncte der Coordinaten, nach der Curve gezogen, liegt, das heisst, der Fläche des Sectors [AMB], welchen die grade Linie [AB] beschreibt, die deshalb Radius-Vector heisst.

Bezeichnet man also diese Fläche durch A, so erhält man

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=2\frac{dA}{dt},$$

und eben so, wenn die Fläche, welche von dem Radius-Vector der Curve beschrieben wird, deren Coordinaten ξ und η sind, α heisst,

$$\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}=2\frac{d\alpha}{dt}$$

u.s.w. Dadurch geht die obige Gleichung in folgende über:

$$2M\frac{dA}{dt} + 2N\frac{d\alpha}{dt} \ldots . = C,$$

wovon die Stammgleichung

$$MA + N\alpha \ldots . = \tfrac{1}{2}Ct + E$$

ist, wenn E eine willkürliche Constante bedeutet, die Null ist, wenn man die Flächen A, $\alpha \ldots .$, am Anfange der Zeit, Null sein lässt. Alsdann verhält sich die Summe der Producte der Flächen, jede in ihre Masse, wie die Zeit.

Es kann kommen, dass nach der Gestalt der Curve, deren Coordinaten x und y sind, die vom Radius-Vector beschriebene Fläche, im Gegentheil, die Differenz der Curven-Fläche und des Dreiecks ist, in welchem Falle

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = -2\frac{dA}{dt}$$

ist, aber es ist leicht zu sehen, dass in diesem Falle die Fläche in entgegengesetzter Richtung beschrieben wird. Die Summe der Producte der Flächen in die Massen verhält sich also, ganz allgemein, wie die Zeit, wenn man die, in einerlei Richtung beschriebenen Flächen, positiv, die, in entgegengesetzter Richtung beschriebenen, negativ nimmt. Diese Beobachtung ist wesentlich nöthig. Ohne sie würde der Satz nicht allgemein Statt finden.

Dieses Gesetz der Flächen findet also für die Bewegung jedes beliebigen Systems von Körpern, die auf irgend eine Weise auf einander wirken, Statt, sobald das System sich um die Axe der z, welche auf der Ebene der x, y senkrecht steht, ganz frei drehen kann. Denn es ist klar, dass die von der wechselseitigen Verbindung der Körper herrührenden Bedin-

gungen alsdann die nemlichen sind, welche Richtung man auch den Axen der x und y geben mag.

Und, wenn die Körper auf einander, durch anziehende oder zurückstossende Kräfte wirkten, so würden diese Kräfte durch Functionen der Abstände $\sqrt{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)}$ ausgedrückt werden können, welche ebenfalls die vorausgesetzte Eigenschaft haben; folglich findet das Gesetz der Flächen auch dann noch Statt.

Würden endlich die Körper M, N.... durch beliebige Kräfte P, Q.... getrieben, deren Richtung auf gegebene, um m, n.... von der Ebene der x,y entfernte Puncte der Axe der z zugeht, so ist aus den Formeln von (15.) leicht zu sehen, dass man zu den Ausdrücken von $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $N\frac{d^2y}{dt^2}$, die Glieder

$$\frac{Px}{\sqrt{(x^2+y^2+(z-m)^2)}} \text{ und } \frac{Py}{\sqrt{(x^2+y^2+(z-m)^2)}},$$

desgleichen zu $M\frac{d^2\xi}{dt^2}$ und $N\frac{d^2\eta}{dt^2}$ die Glieder

$$\frac{Q\xi}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+(\zeta-\eta)^2)}} \text{ und } \frac{Q\eta}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+(\zeta-\eta)^2)}}$$

u. s. w. addiren muss. Die Werthe der Grössen

$$M\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right) \text{ und } M\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right) \text{ etc.}$$

sind also von diesen Kräften unabhängig und das Gesetz der Flächen findet auch in diesem Falle Statt. Es gilt also auch, wenn die Körper nur parallel mit der Axe, oder senkrecht auf die Ebene der xy getrieben werden.

37.

Ganz allgemein verhält sich also, sobald das System sich frei um eine feste Axe drehen kann, welche Wirkung auch die Körper auf einander ausüben, und von welchen Kräften sie auch getrieben werden mögen, wenn die Kräfte nur auf die Axe zu gerichtet, oder mit ihr parallel sind, die Summe der Producte der Massen der Körper in die Flächen, welche ihre Projectionen auf eine auf die Axe senkrechte Ebene, um die Axe beschreiben, allemal wie die Zeit.

Wenn sich also das System, auf irgend eine Weise, frei um einen festen Punct bewegen könnte und, ausser der Wechselwirkung der Körper, jeder Körper noch durch eine Kraft, in der Richtung nach dem festen Puncte, getrieben würde, so würde das Gesetz der Flächen für alle mögliche Axen gelten, die sich durch den festen Punct legen lassen.

Nimmt man also, in einem solchen Falle, den festen Punct zum Anfangs-Punct der Coordinaten, so erhält man, in Beziehung auf die drei Coordinaten-Axen, folgende Ableitungs-Gleichungen erster Ordnung (36.)

$$M\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + N\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) \ldots = C,$$

$$M\left(x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right) + N\left(\xi\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\xi}{dt}\right) \ldots = D,$$

$$M\left(y\frac{dz}{dt} - y\frac{dy}{dt}\right) + N\left(\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}\right) \ldots = E,$$

wo C, D, E drei willkürliche Constanten sind.

38.

Wäre das System ganz frei, und es gäbe nirgends einen festen Punct, so fänden diese Gleichungen, und folglich das Gesetz der Flächen, für jeden beliebigen Punct Statt, den man zum Anfangs-Puncte der Coordinaten nimmt, und für alle Axen, die sich durch einen solchen Punct legen lassen.

Eben so würde es sich verhalten, wenn der Punct, statt im Raume fest zu sein, irgend eine gradlinige und gleichförmige Bewegung hätte. Denn man setze, er durchlaufe, in der Zeit t, die Räume αt, βt, γt, nach der Richtung der Axen der x, y, z, wo die Geschwindigkeiten α, β, γ constant sind, so erhält man, wie leicht zu sehen, wenn p, q, r die Coordinaten des Körpers M, π, χ, ϱ, die Coordinaten des Körpers N, u. s. w. bedeuten, und der Punct zum Anfangs-Punct der Coordinaten genommen wird,

$$p = x - \alpha t,\ q = y - \beta t,\ r = z - \gamma t \text{ und}$$
$$\pi = \xi - \alpha t,\ \chi = \eta - \beta t,\ \varrho = \zeta - \gamma t$$

u. s. w. Also ist

$$p\frac{dq}{dt} - q\frac{dp}{dt} = (x - \alpha t)\left(\frac{dy}{dt} - \beta\right) - (y - \beta t)\left(\frac{dx}{dt} - \alpha\right)$$
$$= x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} - \alpha\left(t\frac{dy}{dt} - y\right) + \beta\left(t\frac{dx}{dt} - x\right)$$

und, eben so,

$$\pi\frac{d\chi}{dt} - \chi\frac{d\pi}{dt}$$
$$= \xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} - \alpha\left(t\frac{d\eta}{dt} - \eta\right) + \beta\left(t\frac{d\xi}{dt} - \xi\right)$$

und so weiter, bei den ähnlichen Ausdrücken. Man erhält also

$$M\left(p\frac{dq}{dt}-q\frac{dp}{dt}\right)+N\left(\pi\frac{d\chi}{dt}-\chi\frac{d\pi}{dt}\right)\ldots.$$

$$=M\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+N\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)\ldots.$$

$$-\alpha t\left(M\frac{dy}{dt}+N\frac{d\eta}{dt}\ldots.\right)+\alpha(My+N\eta\ldots.)$$

$$+\beta t\left(M\frac{dx}{dt}+N\frac{d\xi}{dt}\ldots.\right)-\beta(Mx+N\xi\ldots.)$$

Nun ist in dem Falle (32. und 33.)

$$Mx+N\xi\ldots.=at+b \text{ und}$$
$$My+N\eta\ldots.=ct+e,$$

wo a, b, c, e Constanten sind. Substituirt man daher dieses [*und das daraus folgende*

$$M\frac{dx}{dt}+N\frac{d\xi}{dt}\ldots.=a$$
$$M\frac{dy}{dt}+N\frac{d\eta}{dt}\ldots.=c$$

so erhält man

$$M\left(p\frac{dq}{dt}-q\frac{dp}{dt}\right)+N\left(\pi\frac{d\chi}{dt}-\chi\frac{d\pi}{dt}\right)\ldots.$$

$$=M\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+N\left(\xi\frac{dy}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)\ldots.$$

$$-\alpha ct+\alpha ct+\alpha c+\beta at-\beta at-\beta b, \textit{ oder}]$$

$$M\left(p\frac{dq}{dt}-q\frac{dp}{dt}\right)+N\left(\pi\frac{d\chi}{dt}-\chi\frac{d\pi}{dt}\right)\ldots.$$

$$=M\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+N\left(\xi\frac{dy}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)\ldots.$$

$$+\alpha e-\beta b=C+ae-\beta b.$$

Die Grösse $M\left(p\frac{dq}{dt}-q\frac{dp}{dt}\right)+N\left(\pi\frac{d\chi}{dt}-\chi\frac{d\pi}{dt}\right)\ldots.$ ist also jetzt noch constant; folglich verhält sich noch immer die Summe der Producte der, um die durch

den bewegten Punct gehende Axe der r, beschriebene Fläche in die Masse, wie die Zeit.

Eben so findet man, dass die beiden anderen Grössen

$$M\left(p\frac{dr}{dt}-r\frac{dp}{dt}\right)+N\left(\pi\frac{d\varrho}{dt}-\varrho\frac{d\pi}{dt}\right)\ldots$$

$$M\left(q\frac{dr}{dt}-r\frac{dq}{dt}\right)+N\left(\chi\frac{d\varrho}{dt}-\varrho\frac{d\chi}{dt}\right)\ldots$$

constant sind, und dass also die Summe der um die Axen der q und p, in so fern sie durch den bewegten Punct gehen, beschriebenen Flächen, multiplicirt mit den Massen, sich ebenfalls wie die Zeit verhalten.

Weil nun in diesem Falle der Schwerpunct des Systems nur eine gradlinige und gleichförmige Bewegung haben kann (33.), so folgt, dass das Gesetz der Flächen auch in Beziehung auf den Schwerpunct und alle Axen, die durch durch ihn gehen, Statt findet.

Noch ist zu bemerken, dass das Gesetz der Fläche, wie das Gesetz der Bewegung des Schwerpuncts, und aus den nemlichen Gründen (33.), auch dann noch gilt, wenn die Bewegung des Systems plötzlich durch die Wechselwirkung der darin befindlichen Körper geändert wird. Das Gesetz passt also auch auf den Stoss harter und elastischer Körper.

Sieben-

Siebenter Abschnitt.

Von dem Gesetze der lebendigen Kräfte bei der Bewegung eines, von beliebigen beschleunigenden Kräfte getriebenen, Systems. Von der Erhaltung der lebendigen Kräfte bei dem Stosse elastischer Körper. Vom Verluste dieser Kräfte bei dem Stosse harter Körper, oder, im Allgemeinen, bei plötzlichen Veränderungen, die dem Systeme widerfahren können. Von der Summe der lebendigen Kräfte im Zustande des Gleichgewichts. Allgemeine Bemerkungen über die Ersparung der Kräfte bei Maschinen.

39.

Die Bedingungs-Gleichungen $w = 0$ und $s = 0$, welche sie auch sein mögen, geben, allgemein, wenn man davon die abgeleiteten Gleichungen nach t nimmt, weil x, y, z Functionen von t sind,

$$\frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{dw}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dw}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt} = 0$$

$$\frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{ds}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{ds}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{ds}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{ds}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} + \frac{ds}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt} = 0$$

u. s. w.

Wirken nun auf das System nur die Kräfte, welche diesen Bedingungen entsprechen, so sind die Glei-

chungen der Bewegung der Körper *M* und *N*, nach (36.) von der Form

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = \pi\frac{dw}{dx} + \varrho\frac{ds}{dx} \ldots.$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = \pi\frac{dw}{dy} + \varrho\frac{ds}{dy} \ldots.$$

$$M\frac{d^2z}{dt^2} = \pi\frac{w}{dz} + \varrho\frac{ds}{dz} \ldots.$$

$$N\frac{d^2\xi}{dt^2} = \pi\frac{dw}{d\xi} + \varrho\frac{ds}{d\xi} \ldots.$$

$$N\frac{d^2\eta}{dt^2} = \pi\frac{dw}{d\eta} + \varrho\frac{ds}{d\eta} \ldots.$$

$$N\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \pi\frac{dw}{d\zeta} + \varrho\frac{ds}{d\zeta} \ldots.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen, der Reihe nach, mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, und addirt die Producte, so erhält man [*weil rechterhand die Coefficienten zu* π, ϱ *...., vermöge der obigen Ableitungs-Gleichungen von w und s, Null sind; und folglich rechterhand Alles verschwindet,*] die Gleichung

$$M\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$
$$+ N\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d\eta}{dt}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) \ldots. = 0,$$

welche von den Bedingungen des Systems völlig unabhängig ist, und folglich allgemein Statt findet, welche auch die Lage der Körper gegen einander und ihre wechselseitige Verbindung sein mag.

Die Gleichung hat folgende Stammgleichung:

$$M\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)$$
$$+N\left(\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right)\ldots\ldots = H,$$

wo H eine willkürliche Constante ist. Nun ist, nach (11.) $\sqrt{\left(1+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)}$ die Geschwindigkeit des Körpers $[M]$, welcher die Curve beschreibt, deren Coordinaten x, y, z sind. Heisst also die Geschwindigkeit der Körper M und N, u und v, so ist

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = u^2$$
$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = v^2 \text{ etc.}$$

also giebt die obige Gleichung:

$$Mu^2+Nv^2\ldots\ldots = H.$$

Bei dem berühmten Streite über das Maass der Kräfte hat man das Product der Masse eines Körpers in das Quadrat seiner Geschwindigkeit, lebendige Kraft des Körpers genannt. Bedient man sich dieser Benennung, so zeigt die gefundene Gleichung, dass die Summe der lebendigen Kräfte aller Körper eines Systems constant ist, wenn die Körper keinen anderen Wirkungen unterworfen sind, als denjenigen, die aus ihrer Verbindung, oder überhaupt aus allen den Bedingungen entstehen, die durch Gleichungen zwischen den verschiedenen Coordinaten der Körper ausgedrückt werden können, ohne dass dabei die Zeit vorkommt. In diesem Gesetze besteht das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

40.

Wenn die Körper durch beliebiges Anziehen oder Zurückstossen auf einander wirkten, so würden die daraus entstehenden Kräfte, für die Ausdrücke von $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $M\frac{d^2y}{dt^2}$, Glieder von der Form $\sigma\frac{dp}{dx}$, $\sigma\frac{dp}{dy}$ *etc.* geben, wenn man durch p die Entfernung $\sqrt{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)}$ zwischen zwei Körpern und durch σ die absolute Kraft bezeichnet, welche die Körper auf einander ausüben, (27.) Nun ist klar, dass die Bedingung $\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dt}\ldots = 0$ für diese Function nicht eben so Statt findet, wie für die, die aus den Bedingungen des Systems entstehen [*weil nicht* $p=0$ *und folglich auch nicht* $\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dt}\ldots = 0$ *ist*]. Also bleiben diese Glieder in der, von den Bedingungen des Systems unabhängigen, Gleichung und man erhält folglich

$$M\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$
$$+N\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{d\eta}{dt}\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{d\zeta}{dt}\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\ldots$$
$$=\sigma\left(\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dp}{dz}\frac{dz}{dt}\right.$$
$$\left.+\frac{dp}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dp}{d\eta}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dp}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt}\right)\ldots$$

wo, wie man sieht, der Coefficient zu σ die erste Ableitung der Grösse

$$p = \sqrt{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)}$$

nach t ist.

Bezeichnet also allgemein p die gradlinige Entfernung der Körper M und N von einander, P die absolute, anziehende, oder zurückstossende Kraft, welche die Körper auf einander ausüben; q die Entfernung zweier anderen Körper, Q ihre anziehende, oder zurückstossende Kraft u. s. w. und man nimmt, $P, Q \ldots.$ positiv an, wenn sie die Entfernungen $p, q \ldots.$ zu vergrössern, hingegen negativ, wenn sie selbige zu vermindern streben, und nennt alsdann $u, v \ldots.$ die Geschwindigkeiten der Körper $M, N \ldots.$, so geht die obige Gleichung in folgende über:

$$Mu\frac{du}{dt} + Nv\frac{dv}{dt} \ldots. = P\frac{dp}{dt} + Q\frac{dq}{dt} \ldots.$$

welche ebenfalls von den Bedingungen des Systems unabhängig ist, aber, wie man sieht, die anziehenden oder zurückstossenden Kräfte $P, Q \ldots.$ enthält.

41.

Endlich würde auch die nemliche Gleichung Statt finden, wenn die Körper zugleich nach festen Mittel-Puncten hingezogen, oder von denselben abgestossen würden und man lässt z. B. p die Entfernung des Körpers M von einem der festen Mittel-Puncte, P dessen Kraft bedeuten u. s. w. Denn man kann den Fall, wo Kräfte nach festen Mittel-Puncten wirken, aus demjenigen, wenn die Körper gegenseitig auf einander wirken, dadurch ableiten, dass man einige

von den Körpern als unbeweglich annimmt, welches der Fall ist, wenn ihre Massen unendlich gross sind. Aber, auch ohne dieses indirecte Verfahren, darf man nur erwägen, dass, wenn z. B. der Korper M der Wirkung einer, von einem festen Mittel-Puncte ausgehenden Kraft P unterworfen ist, und die Coordinaten des festen Puncts sind l, m, n, und seine Entfernung von M ist p, hieraus, nach (25.) für die Ausdrücke der Grössen $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $M\frac{d^2y}{dt^2}$, $M\frac{d^2z}{dt^2}$, die Glieder

$$\frac{P(x-l)}{p}, \quad \frac{P(y-m)}{p}, \quad \frac{P(z-n)}{p},$$

und folglich für den Werth von $M\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)$, oder $Mu\frac{du}{dt}$, die Glieder

$$\frac{P(x-l)\frac{dx}{dt}}{p} + \frac{P(y-m)\frac{dy}{dt}}{p} + \frac{P(z-n)\frac{dz}{dt}}{p}$$

entstehen. Nun ist $p = \sqrt{((x-l)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2)}$, also

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(x-l)\frac{dx}{dt} + (y-m)\frac{dy}{dt} + (z-n)\frac{dz}{dt}}{p};$$

also sind die, so eben bezeichneten, hinzukommenden Glieder, zusammen,

$$= P\frac{dp}{dt}.$$

Hieraus folgt allgemein, dass die Gleichung

$$Mu\frac{du}{dt} + Nv\frac{dv}{dt} \ldots = P\frac{dp}{dt} + Q\frac{dq}{dt} \ldots$$

für ein beliebiges System von Körpern, sie mögen, wie

man will, gegen einander liegen und mit einander verbunden sein, oder sich wechselseitig anziehen, oder zurückstossen, oder von festen Mittel-Punct angezogen oder zurückgestossen werden, immer gilt, wenn man die Kräfte durch P, Q.... und die Entfernungen der Körper von den festen Puncten durch p, q.... bezeichnet und P, Q.... positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Kräfte zurückstossen oder anziehen, weil die ersten, die Entfernungen p, q.... zu vergrössern, die letzten, selbige zu verkleinern streben.

42.

Sind die Kräfte P, Q.... Functionen der Abstände p, q...., nach deren Richtungen sie wirken, welches immer vorausgesetzt werden kann, wenn die Kräfte von einander unabhängig sind, oder, allgemein: sind die Kräfte P, Q.... solche Functionen von p, q...., dass die Grösse $P\frac{dp}{dt} + Q\frac{dq}{dt}$.... die vollständige erste Ableitung irgend einer Function von p, q.... ist, welche wir durch

$$F(p, q \dots) = \mathfrak{P}$$

bezeichnen wollen, so hat die obige Gleichung die Stammgleichung

$$Mu^2 + Nv^2 \dots = K + 2\mathfrak{P},$$

wo K eine willkürliche Constante bedeutet. In diesem Falle werden die Kräfte P, Q...., welche nach den Linien p, q.... wirken, durch die ersten Ableitungen $\frac{d\mathfrak{P}}{dp}$, $\frac{d\mathfrak{P}}{dq}$.... ausgedrückt. [*Denn, da nach der Voraussetzung* $\frac{d(\mathfrak{P})}{dt} = P\frac{dp}{t} + Q\frac{dq}{dt}$....

und, allgemein, $\frac{d(\mathfrak{P})}{dt} = \frac{d\mathfrak{P}}{dp}\frac{dp}{dt} + \frac{d\mathfrak{P}}{dq}\frac{dq}{dt}\ldots$ *ist, so ist, wenn man die Coefficienten von* $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}\ldots$ *vergleicht,* $P = \frac{d\mathfrak{P}}{dp}$, $Q = \frac{d\mathfrak{P}}{dq}\ldots$]

Die Werthe von p, $q\ldots$, für eine gegebenen Augenblick, sollen a, $b\ldots$ und die Geschwindigkeiten der Körper M, $N\ldots$, für eben diesen Augenblick, U, $V\ldots$ sein, so giebt die Gleichung, für diesen Augenblick,

$$MU^2 + NV^2 \ldots = K + 2F(a, b\ldots),$$

also

$$K = MU^2 + NV^2 - 2F(a, b\ldots)$$

Substituirt man diesen Werth [*und bezeichnet* $2F(a,b)$ *durch* A], so erhält man die allgemeine Gleichung

$$Mu^2 + Nv^2 \ldots = MU^2 + NV^2 \ldots + \mathfrak{P} - A.$$

Diese Gleichung drückt das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte in seiner ganzen Allgemeinheit aus. Sie zeigt, dass die gesammte lebendige Kraft des Systems nur allein von den wirkenden Kräften, die das System treiben, und von der Lage der Körper gegen die Mittel-Puncte der Kräfte abhängt, so, dass, wenn die Körper, zu verschiedenen Zeiten, gleich weit von diesen Mittel-Puncten entfernt sind, die Summe ihrer lebendigen Kräfte die nemliche ist.

Ich verstehe unter wirkende Kräfte (forces actives) diejenigen, welche die Körper auf einander ausüben und deren Resultat die Veränderung der gegenseitigen Lage und Entfernung der Körper ist, wie alle innere anziehende oder abstossende Kräfte

der Körper, die Kräfte von Federn zwischen Körpern, und dergleichen. Hingegen, widerstehende Kräfte (forces passives) nenne ich die durch den Druck der Körper hervorgebrachten Widerstände, die Spannung von Fäden, oder Stäben etc.; deren Resultat ist, die Körper in ihrer Lage zu erhalten und die Veränderung der Bedingungen des Systems zu verhindern. Diese widerstehenden Kräfte tragen zur Hervorbringung einer lebendigen Kraft, wie man sieht, Nichts bei. Die wirkenden Kräfte allein vergrössern oder verkleinern sie, wie sie es thun würden, wenn die Körper, frei bewegt, von den nemlichen Puncten ausgingen und wieder zu den nemlichen Puncten, auf beliebigen Wegen, hin gelangten.

43.

Wir haben gesehen, dass das Gesetz der Bewegung des Schwerpuncts und das Gesetz der Flächen von der Wechselwirkung der Körper unabhängig sind, welche dieselbe auch sein möge, gleichviel, ob sie von wirkenden oder widerstehenden Kräften herkommt. In dieser Hinsicht haben jene beiden Gesetze eine grössere Ausdehnung, als das Gesetz der Erhaltung der lebendigen Kräfte, welches blos von der Wirkung der widerstehenden Kräfte unabhängig ist. Hieraus folgt, dass dieses letzte Gesetz, nicht wie die beiden ersten, auch in dem Falle bestehen kann, wo durch die Wechselwirkung der Körper, oder durch hinzukommende Hindernisse, plötzliche Veränderungen der Bewegung entstehen, weil dergleichen plötzliche Veränderungen immer als die Resultate wirkender Kräfte von Federn zwischen den Körpern, oder zwi-

schen den Körpern und den Hindernissen betrachtet werden können, die, wenn sie sich ein wenig zusammenziehen oder ausdehnen, das Gesetz der Continuität, in der Veränderung der Bewegungen, erhalten. Die beliebige Kraft von Körpern, welche auf diese Weise plötzlichen Veränderungen unterworfen sind, wird also bei jeder solcher Veränderung um so viel vermehrt oder vermindert, als die lebendige Kraft der Wirkung der Federn betragen würde, wenn dieselben auf die Körper nur allein wirkten.

Begegnen also die Körper M, N.... einander, oder Hindernissen, so dass plötzliche Veränderungen der Bewegung erfolgen, so lässt sich auf diese Körper, während ihrer Wirkung, wie kurz sie auch sein mag, der Ausdruck des vorigen Paragraphs anwenden, so, dass, wenn U, V.... die Geschwindigkeiten im Anfange der Wirkung, u, v.... die Geschwindigkeiten am Ende der Wirkung; ferner a, b.... die Werthe der Abstände, p, q.... am Anfange, α, β.... die Werthe der Abstände am Ende der Wirkung bezeichnen,

$$MU^2 + NV^2 \ldots. - Mu^2 - Nv^2$$
$$= 2F(a, b \ldots.) - 2F(\alpha, \beta \ldots.)$$

ist. Hieraus folgt, dass die Differenz der lebendigen Kräfte, am Anfange und am Ende der Wirkung,

$$2F(a, b \ldots.) - 2F(\alpha, \beta \ldots.)$$

ist, wobei zu bemerken, dass, obgleich die Grössen α, β.... sehr wenig von den Grössen a, b.... verschieden sind, die Differenz der ähnlichen Functionen $F(a, b \ldots.)$ und $F(\alpha, \beta \ldots.)$ dennoch irgend einen endlichen Werth haben kann.

44.

Da diese Functionen unbekannt sind, so würde sich auf diese Weise die Veränderung der lebendigen Kräfte nicht bestimmen lassen; allein in einzelnen Fällen kann man sie aus den Bedingungen der Aufgabe finden.

Wenn Körper sich stossen, entweder unmittelbar, oder mittelst zwischen liegender Hebel, oder anderer Maschinen, so erfolgt die Zusammenpressung und Wider-Ausdehnung, wenn die Körper vollkommen elastisch sind, nach einerlei Gesetze, und die Wirkung dauert, bis die Körper, durch die Wider-Ausdehnung der Federn, wieder in die nemliche gegenseitige Lage gekommen sind, die sie vor dem Stosse hatten. In diesem Falle also ist

$$\alpha = a, \quad \beta = b,$$

und folglich

$$F(\alpha, \beta \ldots .) = F(a, b \ldots .)$$

woraus folgt, dass die lebendige Kraft, vor und nach dem Stosse, die nemliche ist. Man kennt dieses Gesetz zwar schon längst, hat aber davon, so viel ich weiss, noch keinen einfachen und allgemeinen Beweis gegeben.

Beim Stosse harter Körper hingegen dauert die Wirkung nur so lange, bis die Körper diejenige Geschwindigkeit erlangt haben, bei welcher sie nicht mehr auf einander wirken. Da also das Resultat dieser Geschwindigkeit für die gegenseitige Wirkung der Körper Null ist, so ist die Wirkung, wenn man den Körpern diese Geschwindigkeit vor dem Stosse, oder

während des Stosses beibringt, in Rücksicht der zusammengesetzten Geschwindigkeit, die nemliche, wie die Wirkung mit der den Körpern eigenthümlichen Geschwindigkeit. Also ist die Wirkung auch noch die nemliche, wenn die beigebrachten Geschwindigkeiten gleich und einander entgegengesetzt sind; denn der Erfolg bleibt derselbe, wenn man annimmt, dass die beigebrachten Geschwindigkeiten durch entgegengesetzte vernichtet werden.

Es folgt also, dass beim Stosse harter Körper die Geschwindigkeiten $u, v \ldots$ nach dem Stosse von der Art sind, dass die Gleichung

$$MU^2 + NV^2 \ldots - Mu^2 - Nv^2 \ldots$$
$$= 2F(a, b, c \ldots) - 2F(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$$

noch Statt findet, wenn man die Geschwindigkeiten $U, V \ldots, u, v \ldots$ mit den Geschwindigkeiten $-u, -v \ldots$ zusammensetzt. Das zweite Glied der Gleichung bleibt das nemliche, weil es von der gegenseitigen Lage der Körper, vor und nach dem Stosse, nicht abhängt.

Nennt man also die aus den Geschwindigkeiten U und $-u$ *etc.*, V und $-v$ *etc.* zusammengesetzten Geschwindigkeiten, A und B *etc.*, so geht die Gleichung in folgende über:

$$MA^2 + NB^2 \ldots = 2F(a, b, c \ldots) - 2F(\alpha, \beta, \gamma \ldots),$$

weil die zusammengesetzten Geschwindigkeiten $u - u$, $v - v$ *etc.* Null sind. Die Gleichung für den Stoss harter Körper ist also

$$MU^2 + NV^2 \ldots - Mu^2 - Nv^2 \ldots$$
$$= MA^2 + NB^2 \ldots$$

[*Denn beide Glieder dieser Gleichung sind gleich*

$2F(a, b, c \ldots) - 2F(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$] Da U, $V \ldots$ die Geschwindigkeiten vor, u, $v \ldots$ die Geschwindigkeiten nach dem Stosse sind, so ist klar, dass A, $B \ldots$ die Verluste an Geschwindigkeit, während des Stosses ausdrücken; folglich ist $MA^2 + NB^2 \ldots$ die aus diesen Geschwindigkeiten hervorgehende lebendige Kraft. Daraus folgt, dass bei dem Stosse harter Körper ein Verlust an lebendiger Kraft Statt findet, der der nemlichen lebendigen Kraft gleich ist, welche die Körper haben würden, wenn sie sich mit derjenigen Geschwindigkeit bewegten, die sie beim Stosse verlieren. Dieser merkwürdige Satz gehört, meines Wissens, Carnot, welcher ihn, auf eine andere Art, in seinem Versuche über Maschinen im Allgemeinen gefunden hat. Er dient zur Vervollständigung der Gleichung der lebendigen Kräfte, in dem Falle, wenn durch den Stoss ein Verlust entsteht.

45.

In der Gleichung

$$Mu\frac{du}{dt} + Nv\frac{dv}{dt} \ldots = P\frac{dp}{dt} + Q\frac{dq}{dt} \ldots$$

bezeichnen p, $q \ldots$ die gradlinigen Abstände der Puncte, in welchen die Kräfte P, $Q \ldots$ angebracht sind, von den Mittelpuncten der Kräfte. Also sind $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt} \ldots$ die Geschwindigkeiten dieser Puncte nach den Richtungen der Kräfte, und da die Grössen p, $q \ldots$ in der Gleichung nicht vorkommen, so folgt, dass selbige immer Statt findet, welche auch die Kräfte P, $Q \ldots$ sein mögen, ob ihre Richtung auf gegebene Puncte hin weiset, oder nicht, wenn man nur

für $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$.... die respectiven Geschwindigkeiten der Puncte setzt, auf welche diese Kräfte, nach den ihnen eigenthümlichen Richtungen, wirken.

Hielten die Kräfte P, Q.... einander das Gleichgewicht, so wären die Grössen $P\frac{dp}{dt} + Q\frac{dq}{dt}$...., nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten (30.) Null. Also zeigt die Gleichung, was diese Grösse ist, wenn die Kräfte eine Bewegung hervorbringen, und, wie leicht zu sehen, ist sie alsdann gleich der ersten Ableitung der Hälfte der lebendigen Kraft aller Körper des Systems, welche auch sonst die Lage und wechselseitige Verbindung der Körper sein mag. [*Denn es ist* $Mu\frac{du}{dt} + Nv\frac{dv}{dt}$.... *die erste Ableitung von* $\frac{1}{2}(Mu^2 + Nv^2 \dots)$].

Wenn also, in einem gegebenen Augenblicke, die Kräfte, welche auf das System wirken, einander die Wage halten, so ist die erste Ableitung der lebendigen Kraft Null, und folglich die lebendige Kraft alsdann ein Maximum oder Minimum. (26. 2ter Th.) Also ist, allgemein, unter allen Lagen oder Stellungen des Systems, die, für welche ein Gleichgewicht Statt findet, auch zugleich diejenige, für welche die lebendige Kraft ein Maximum oder Minimum sein würde, wenn das System in Bewegung wäre, und es lässt sich beweisen, dass das Gleichgewicht stabil ist, wenn die lebendige Kraft ein Maximum, und nicht stabil, wenn sie ein Minimum ist. Der Beweis dieser sonderbaren Eigenschaft des Gleichgewichts kann aber hier nicht

mitgetheilt werden. Man findet ihn in der analytischen Mechanik.

46.

Da die Grössen $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ nur die Geschwindigkeiten der Puncte ausdrücken, in welchen die Kräfte P, Q.... angebracht sind, und zwar in der Richtung dieser Kräfte, so kann man statt $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$.... die, gleichzeitig von diesen Puncten und den genannten Richtungen, durchlaufenen Räume nehmen. Auf solche Weise sind $P\frac{dp}{dt}$, $Q\frac{dq}{dt}$ *etc.* die ersten Ableitungen der Curven-Flächen, deren Abscissen p, q...., und deren Ordinaten P, Q.... sind. (28. 2ter Theil.) Bezeichnet man also diese Curven-Flächen durch (P), (Q)...., und nimmt die Stammgrösse der beiden Glieder der Gleichung im vorigen Paragraph, so erhält man, wenn man mit 2 multiplicirt und die Geschwindigkeiten von M, N...., für den Augenblick, wenn die Flächen (P), (Q)...., Null sind, U, V.... nennt,

$$M^2 + Nv^2 \ldots - MU^2 - NV^2 \ldots = 2(P) + 2(Q) \ldots$$

Diese Gleichung ist derjenigen von (42.), welche das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte ausdrückt, ganz gleich. Aber sie ist hier, unabhängig von den Functionen, welche die Kräfte P, Q.... bezeichnen können, ausgedrückt.

Nimmt man an, dass diese Kräfte, jede besonders, auf freie Körper wirken, deren Massen m, n....

sind, so erhält man, vermöge der Fundamental-Gleichungen von (15.)

$$m\frac{d^2p}{dt^2} = P,\ n\frac{d^2q}{dt^2} = Q\ldots.$$

Multiplicirt man also mit $2\frac{dp}{dt}$, $2\frac{dq}{dt}\ldots.$ und nimmt die Stammgrössen, so erhält man

$$m\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = a + 2(P),\ n\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = b + 2(Q)$$

u. s. w., wo a, $b\ldots.$ willkürliche Constanten sind. Setzt man, der Kürze wegen, dass die Geschwindigkeiten $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ *etc.* Null sind, wo die Flächen (P), $(Q)\ldots.$ beginnen, so ist

$$a = 0,\ b = 0\ldots.,$$

also

$$m\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = 2(P),\ n\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = 2(Q)\ldots.,$$

wo leicht zu sehen, dass $m\left(\frac{dp}{dt}\right)^2$, $n\left(\frac{dq}{dt}\right)^2\ldots.$ die, von den Kräften P, $Q\ldots.$, während der Entstehung der Flächen (P), $(Q)\ldots.$, einzeln und frei hervorgebrachten Kräfte ausdrücken, so dass diese Flächen selbst, der Hälfte der erzeugten lebendigen Kräfte gleich sind.

Wirken also diese Kräfte auf Körper, die auf irgend eine Weise mit einander verbunden sind, so bringen sie für jedes System, eine Vermehrung der lebendigen Kraft hervor, die der Summe der lebendigen Kräfte gleich ist, welche jede Kraft besonders hervorbringen würde, wenn sie auf einen freien Körper allein wirkte, und ihn, nach ihrer Richtung, durch einen

einen Raum triebe, der demjenigen gleich ist, welchen er nach der nemlichen Richtung wirklich durchläuft. Dieses ist, was wesentlich das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte ausmacht.

47.

Das Gesetz der Erhaltung der lebendigen Kräfte ist für die Theorie der Maschinen sehr wichtig. Der allgemeine Zweck der Maschinen ist, die Wirkung der bewegenden Kräfte, auf die schicklichste Weise, zur Ueberwindung der Hindernisse zu benutzen, welche sich der Bewegung, die man hervorbringen will, entgegensetzen. Da diese Hindernisse nichts anders, als Kräfte sind, die den bewegenden Kräften entgegenwirken, so kann man sie als negative Kräfte betrachten und behandeln. Bei jeder in Bewegung befindlichen Maschine ist also die gesammte Vermehrung der lebendigen Kraft immer der Summe der lebendigen Kräfte gleich, welche die bewegenden Kräfte hervorgebracht haben würden, weniger der Summe derjenigen, welche die Hindernisse hätten hervorbringen können, wenn sich die Puncte, auf welche alle diese Kräfte wirken, frei bewegten.

Man kann fast alle nutzbaren Kräfte auf die Schwere und die Federkraft reduciren. Ein Gewicht P, welches frei von einer Höhe h herunter fällt, erlangt eine lebendige Kraft $2Ph$. Denn da in diesem Falle die Kraft P constant ist, so ist die Fläche (P), dem Producte der Ordinate P in die Abscisse h gleich. Hat man also die Fall-Höhe h eines Gewichts P zur Disposition, so kann man eine lebendige Kraft $2Ph$ verwenden, welche dann bei irgend einer Ma-

schine als Kraft oder Widerstand vorkommen darf. Eine gespannte Feder bringt, wenn sie sich aufthut, eine lebendige Kraft hervor, die von der Kraft der Feder und dem Raume abhängt, durch welche die Feder sich öffnet, und welche der doppelten Fläche (*P*) gleich ist. Hat man also eine, bis auf einen gewissen Punct, gespannte Feder, welche sich um eine gewisse Weite öffnen kann, so wird dadurch eine gegebene lebendige Kraft für irgend eine Maschine nutzbar. Auf diese Weise lässt sich sagen, dass eine gegebene Wassermenge, von bestimmtem Umfange und Höhe, eine gegebene Menge Kohlen zur Verdampfung einer gegebenen Menge Wassers, eine gegebene Menge Schiess-Pulver, die Tages-Arbeit eines Thieres etc., einer bestimmten lebendigen Kraft gleich sind, die sich willkürlich anwenden, aber durch kein mechanisches Mittel vermehren lässt. [*Die obigen Formeln enthalten also zugleich den Beweis der Unmöglichkeit des Perpetuum-mobile.*]

Man kann daher immer eine Maschine als Etwas betrachten, das bestimmt ist, eine gegebene lebendige Kraft zu zerstören und dafür eine andere gegebene lebendige Kraft hervorzubringen. Und aus dem allgemeinen Principe folgt, dass die lebendige Kraft der bewegenden Kräfte, diejenigen der Widerstände um so viel übertreffen muss, als die gesammte lebendige Kraft aller Körper beträgt, die sich, von jenen Kräften getrieben, bewegen. Kommen bei der Bewegung plötzliche Veränderungen vor, so muss man die Summe der lebendigen Kräfte hinzuthun, welche aus den, bei dem Stosse, verlorenen Kräften entstehen. (44.)

Auf solche Weise lässt sich der Effect jeder Maschine berechnen, und es lassen sich die Bedingungen angeben, unter welchen dieser Effect, unter den jedesmaligen Umständen, bei der gegebenen Maschine so gross ist als möglich.

Ich will mich nicht weiter auf Anwendungen in der Mechanik einlassen, oder bei Auflösung einzelner Aufgaben aufhalten. Da meine Absicht nicht ist, eine Abhandlung der Mechanik zu schreiben, so begnüge ich mich, die Haupt-Lehrsätze und Fundamental-Gleichungen der Mechanik, welche man gewöhnlich nur durch das Unendlich-Kleine beweiset, auf die Theorie der Functionen gegründet, und, auf eine neue Art, die allgemeinen Gesetze der Bewegung von beliebigen Kräften getriebener oder auf einander wirkender Körper vorgetragen zu haben. Ich verweise, wenn man ein grösseres Detail verlangt, auf die analytische Mechanik.

Zusatz

zum zweiten Abschnitte des ersten Theils.

Die gegenseitigen Beziehungen der abgeleiteten Functionen und Differentiale, lassen sich auf verschiedene Weise zeigen. Man bezeichne die constante Differenz der successiven Werthe x, $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$ etc. der veränderlichen Grösse x durch dx, so sind die correspondirenden Werthe der Grösse y, als Function von x betrachtet, vermöge der obigen Formel, wenn man darin nach und nach $k = dx$, $2dx$, $3dx$.... setzt,

$$y + dx\frac{dy}{dx} + \frac{dx^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dx^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} \dots$$

$$y + 2dx\frac{dy}{dx} + 4\frac{dx^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dx^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + 16\frac{dx^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} \dots$$

$$y + 3dx\frac{dy}{dx} + 9\frac{dx^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + 27\frac{dx^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + 81\frac{dx^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} \dots$$

$$y + 4dx\frac{dy}{dx} + 16\frac{dx^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + 64\frac{dx^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + 256\frac{dx^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} \dots$$

etc.

Nimmt man hiervon, durch wiederholte Subtraction, die ersten, zweiten, dritten etc. Differenzen, und bezeichnet solche durch dy, d^2y, d^3y...., so erhält man

$$dy = dx\frac{dy}{dx} + \frac{dx^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dx^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^3}\ldots.$$

$$d^2y = 2\frac{dx^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dx^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + 14\frac{dx^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^2}\ldots.$$

$$d^3y = 6\frac{dx^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + 36\frac{dx^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4}\ldots.$$

$$d^4y = 24\frac{dx^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4}\ldots.$$

Nun setze man die Differenz dx unendlich klein, so sind die Potenzen dx^2, dx^3.... von dx wieder, jede gegen die vorige, unendlich klein, und die Reihen, welche die Werthe der [*ersten, zweiten, dritten etc.*] Differenzen dy, d^2y, d^3y.... von y ausdrücken, sind aus Gliedern zusammengesetzt, deren jedes wieder gegen das vorhergehende unendlich klein ist, so dass, wenn man allemal die Unendlich-Kleinen höherer Ordnung gegen die, niedriger Ordnung, weglässt, blos

$$dy = \frac{dy}{dx}dx,\ d^2y = \frac{d^2y}{dx^2}dx^2,\ d^3y = \frac{d^3y}{dx^3}dx^3\ldots.$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3}\ldots.$$

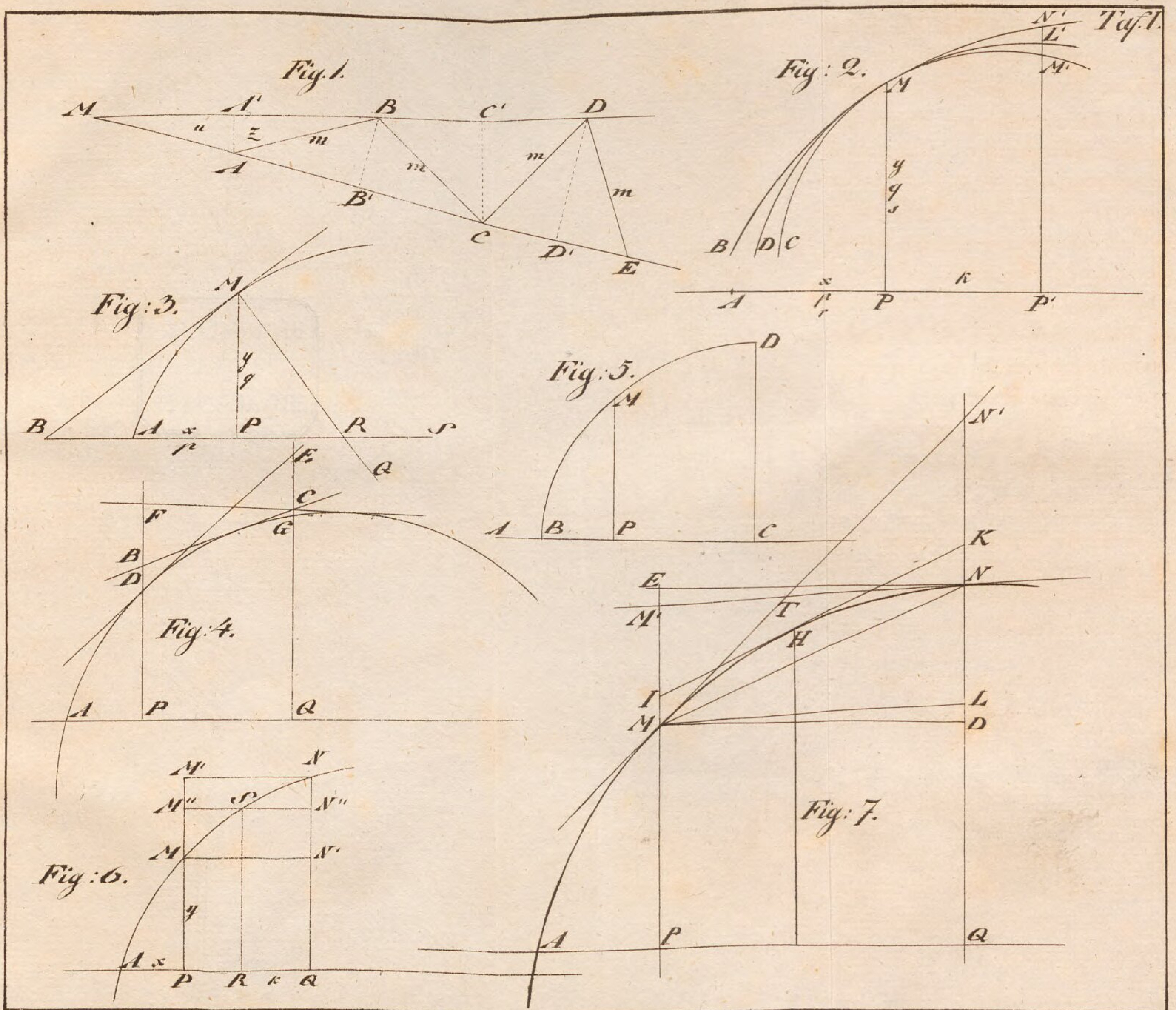
ist.

Hieraus sieht man, wie das Unendlich-Kleine dienen kann, die Ableitungen zu finden, und es folgt daraus, dass die Differential-Formeln $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$....

statt das auszudrücken, was sie zu bezeichnen scheinen, in der That blos Zeichen sind, welche die verschiedenen Ableitungen der Stammgrösse y, die von derselben auf verschiedene Weise abhängen, andeuten sollen. [*In diesem Sinne sind auch bei dieser Uebersetzung die alten Differential-Zeichen gebraucht worden.*] Man sehe die 18te Vorlesung über die Functionen-Rechnung, welche Bemerkungen, den Uebergang vom Endlichen zum Unendlich-Kleinen betreffend, enthält. [*In diesem Zusatze kann man, wenn man will, die alte Bezeichnung der sogenannten höheren Differentiale gerechtfertigt finden; allein es geschieht durch Nullen, die gegen andere Nullen wieder Null sind. Von solchen Nichtsen lässt sich nichts deutlich begreifen.*]

Ende der Functionen-Theorie.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.


Taf. I.
Fig. 1.
M A' B C' D
u z m m m m
A B' C D' E
Fig: 2.
N' L' M'
M
y q s
B D C
x p r k
A P P'
Fig: 3.
M
y q
B A x P R S
p
Q
Fig: 4.
E C F G B D
A P Q
Fig: 5.
D M
A B P C
Fig: 6.
M' N
M'' S N''
M N'
y
A x P R k Q
Fig: 7.
N' K E N M' T H I L M D
A P Q

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

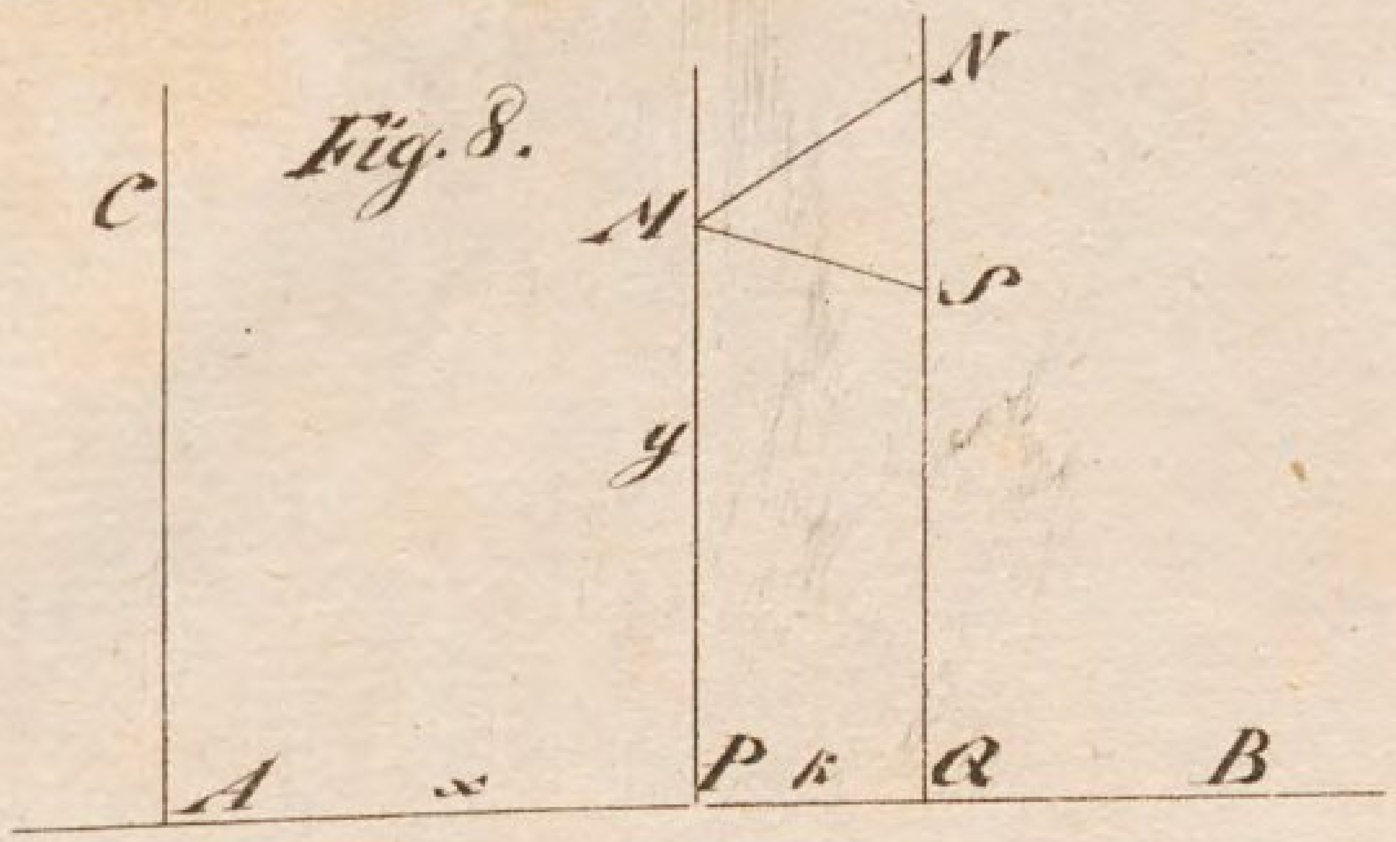


Fig. 8.

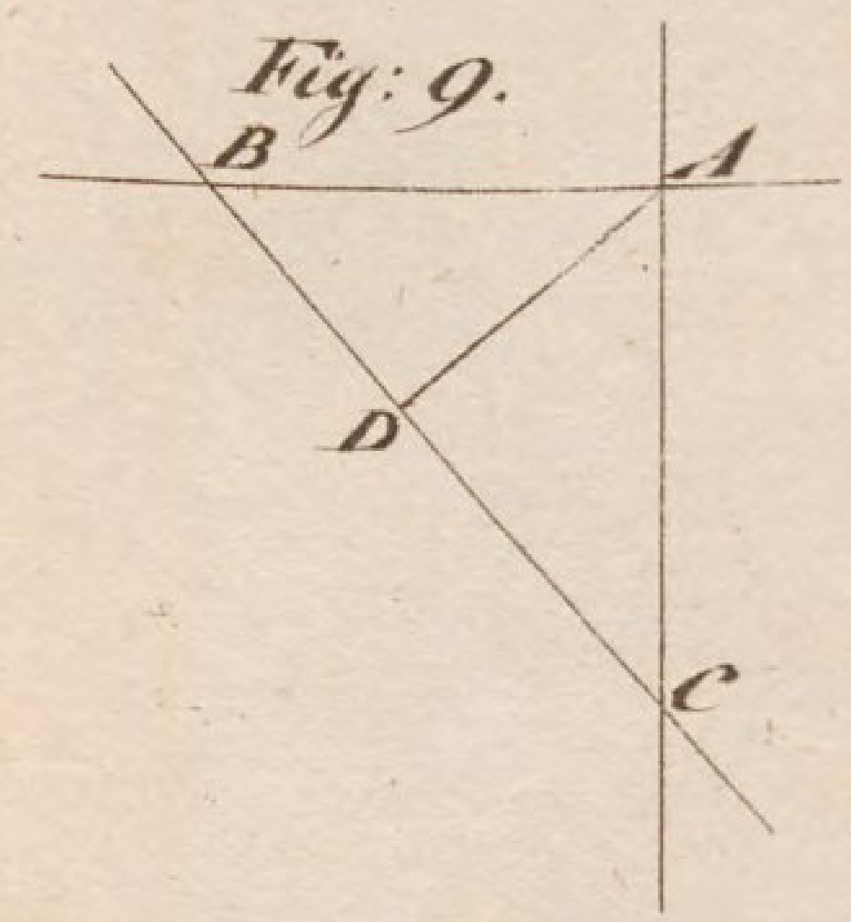


Fig: 9.

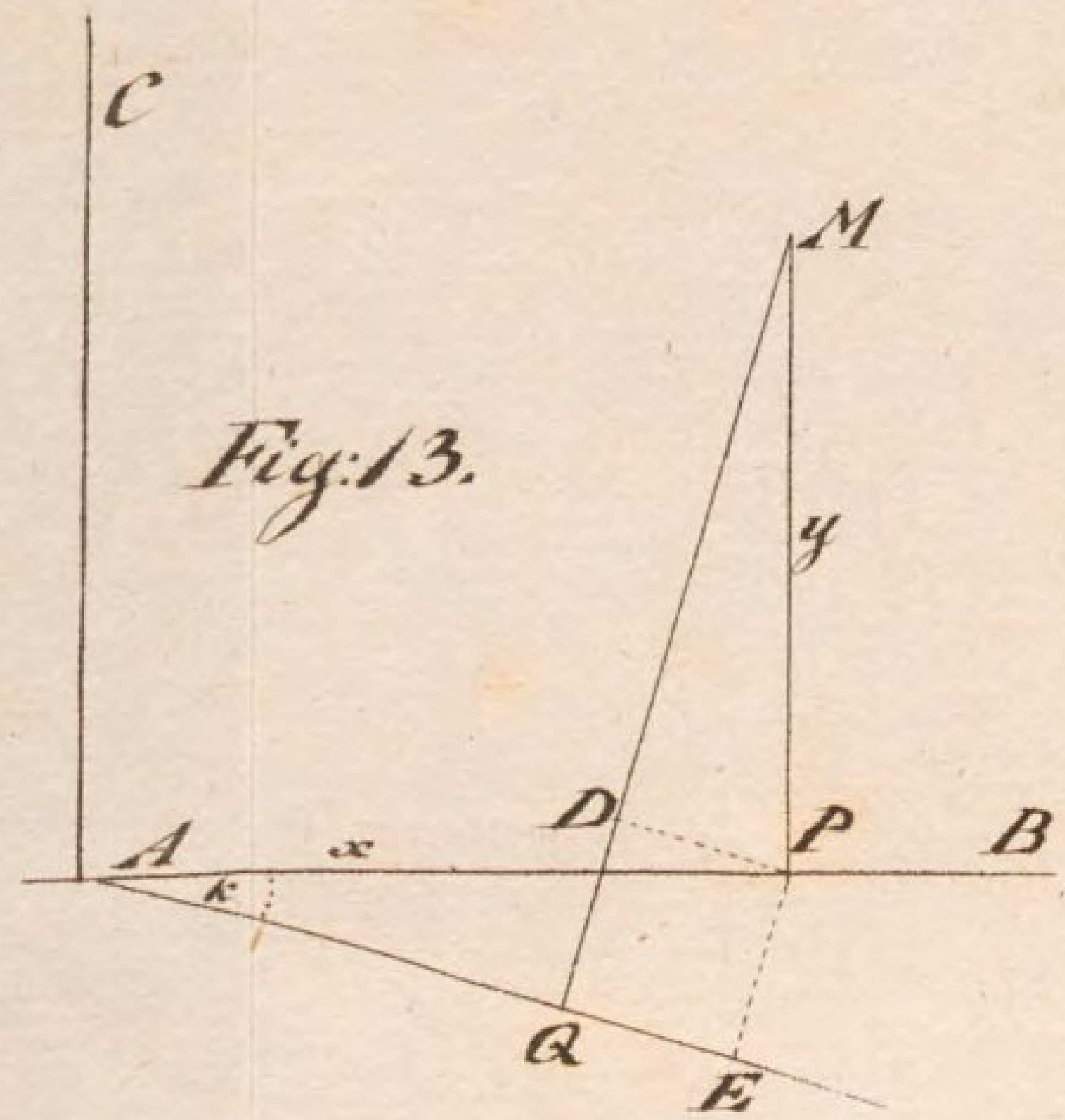


Fig: 13.

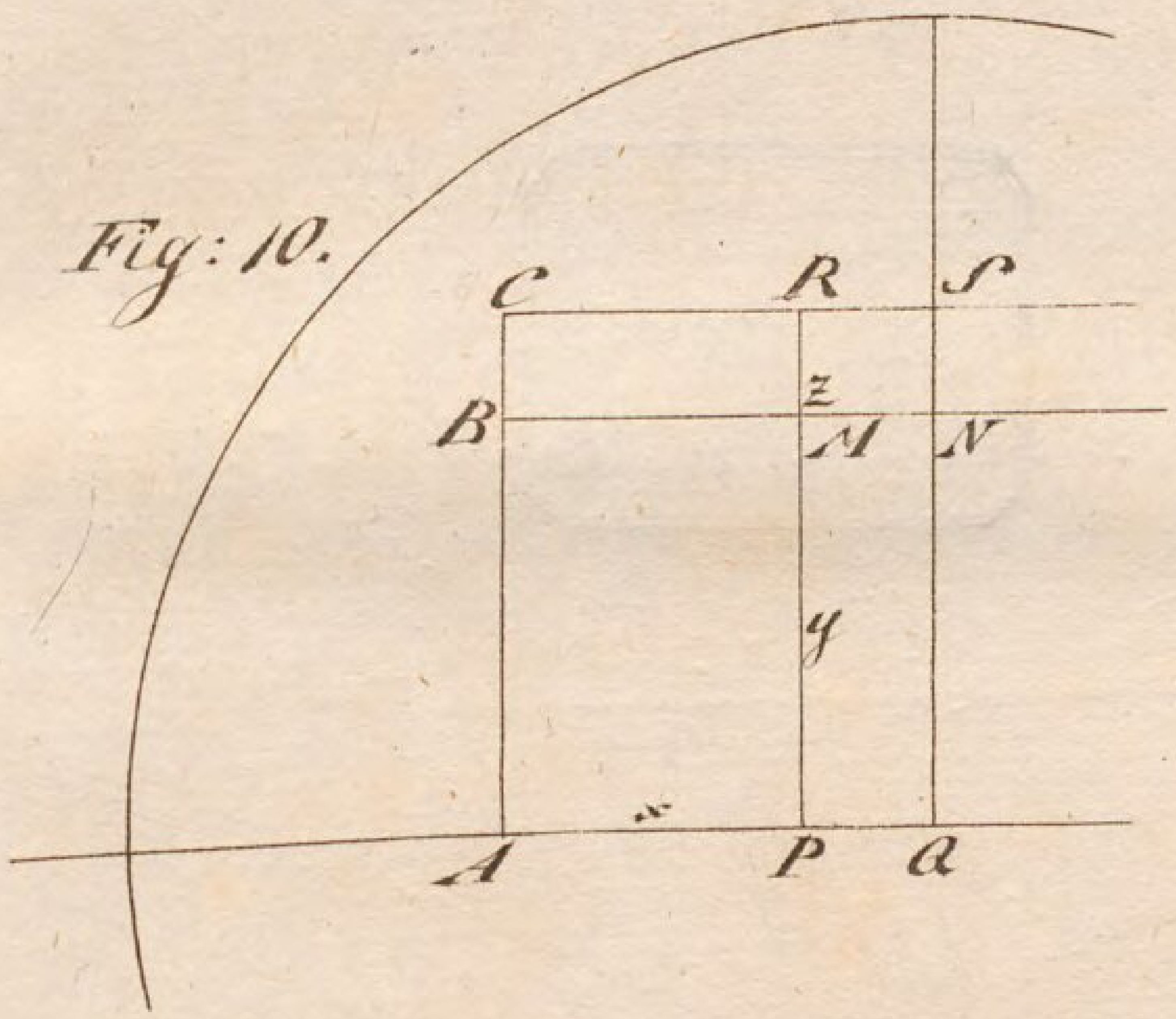


Fig: 10.

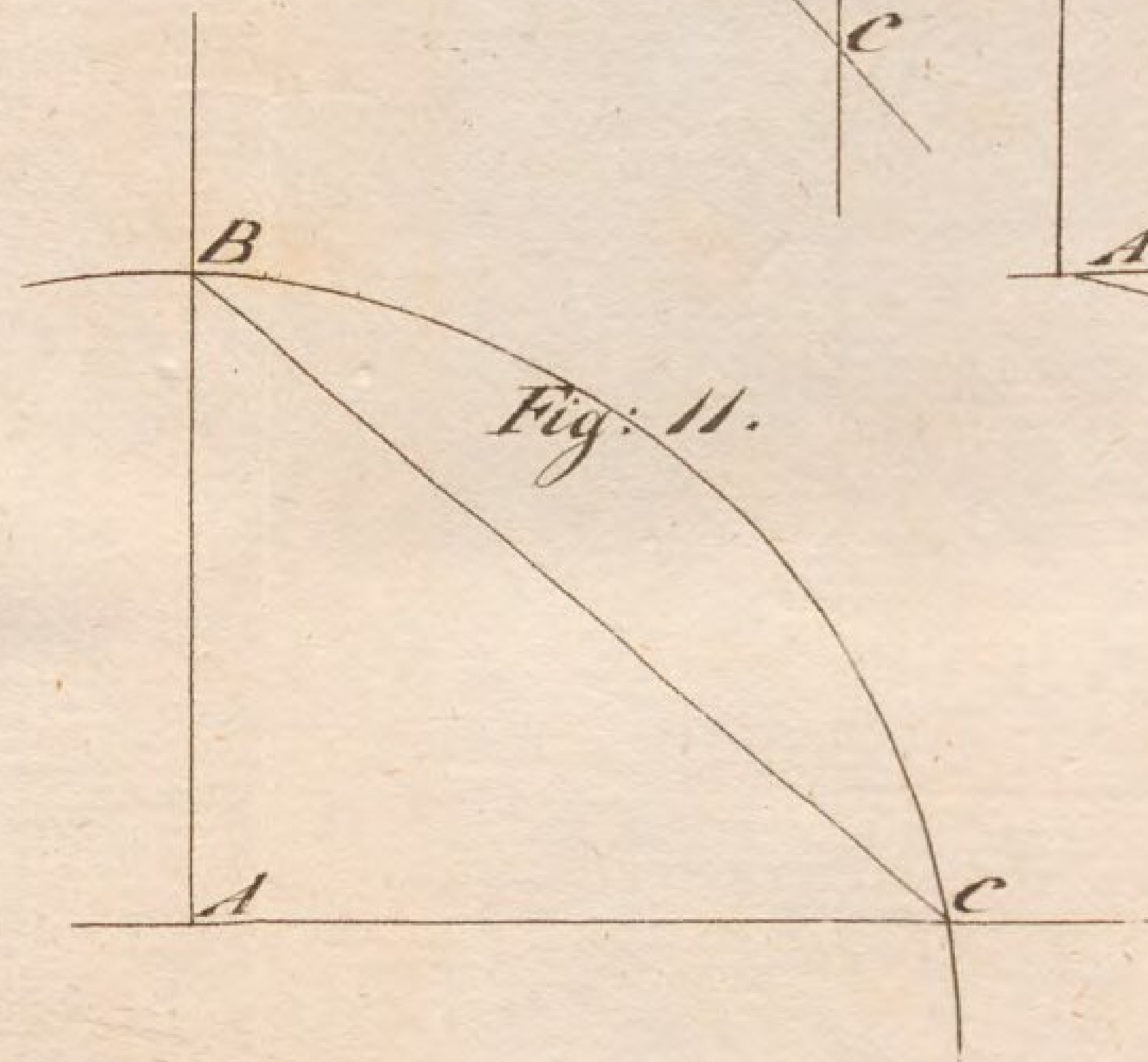


Fig: 11.

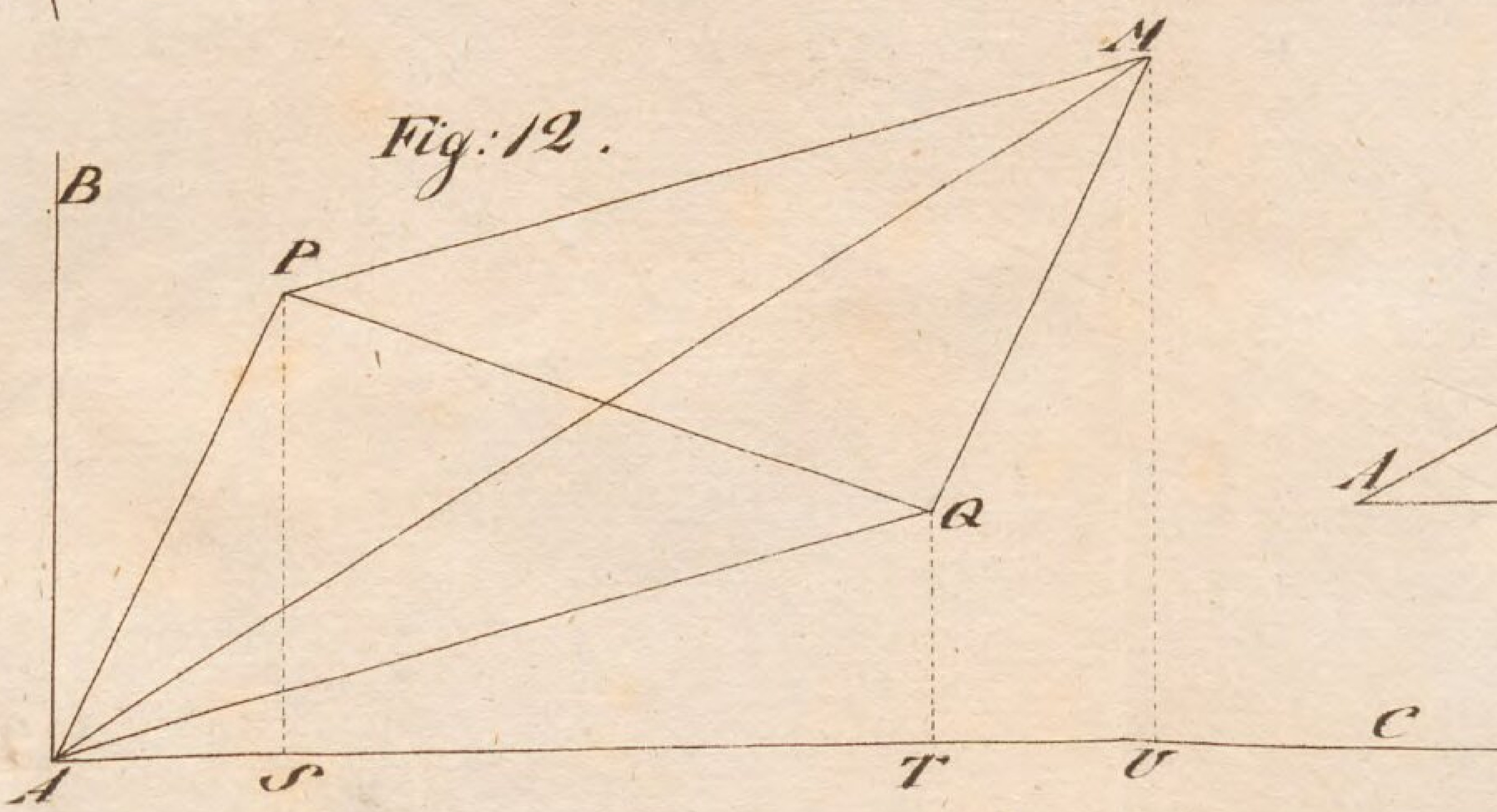


Fig: 12.

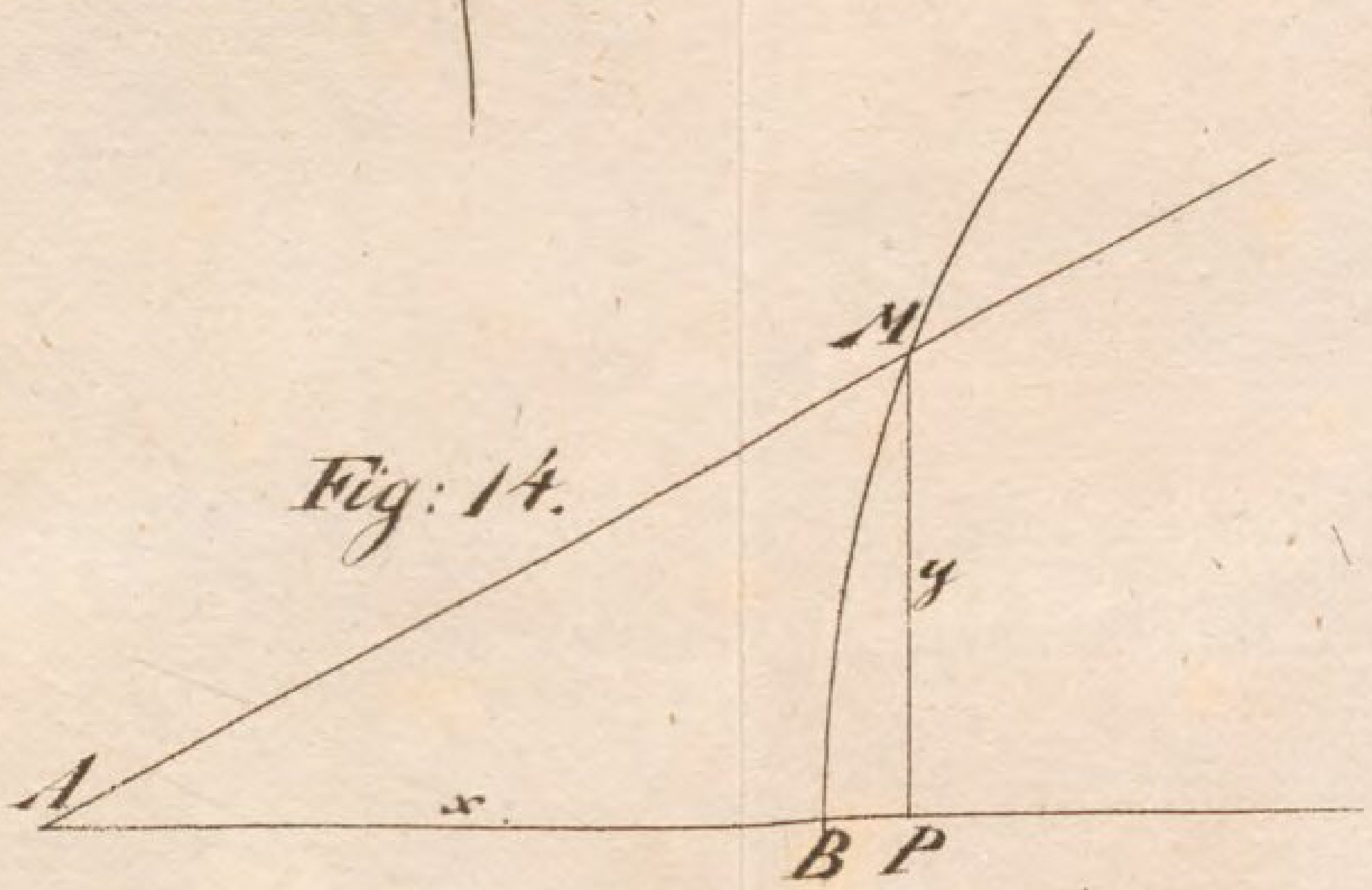


Fig: 14.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Berlin, gedruckt bei G. Hayn.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lagrange, Joseph Louis <<de>>,

J.L. Lagrange's mathematische Werke

Bd.: Erster Band

Berlin 1823

Math.u. 91 s-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594043-3